TRAYECTORIA DE LA ÓRBITA TERRESTRE ALREDEDOR DEL SOL

SILVIA CEBALLOS
Estudiante de Ingeniería Física
Universidad Tecnológica de Pereira
silveria19@hotmail.com

RESUMEN
Isaac Newton [1] fue el primero en reconocer que la misma fuerza que produce la caída de los cuerpos hacia la tierra también produce el movimiento de la luna alrededor de la tierra. En cierto sentido, es posible hablar de la gravedad como la "goma invisible" que mantiene unido al universo.
Al estudiar con mas detalle la ley de gravitación universal se logra obtener la descripción del movimiento de los planetas.
Las leyes del movimiento planetario desarrolladas por Johannes Kepler se deducen de la ley de gravitación universal y del concepto de conservación del momento angular.

PALABRAS CLAVES: Newton, Kepler, órbita, movimiento, tierra, sol.

ABSTRACT
Isaac Newton [1] was the first one in recognizing that the same force that it produces the fall of the bodies toward the earth it also produces the movement of the moon around the earth. In certain sense, it is possible to speak of the graveness like the "invisible rubber" that it maintains together to the universe. When studying with but it details the law of universal gravitation it is possible to obtain the description of the movement of the planets. The laws of the planetary movement developed by Johannes Kepler are deduced from the law of universal gravitation and of the concept of conservation of the angular moment.

KEYWORDS: *Newton, Kepler, orbit, movement, earth, sun.*

1. INTRODUCCIÓN [2]

Uno de los problemas fundamentales que ha intrigado al hombre desde los albores de la civilización ha sido el movimiento de los cuerpos celestes o, como decimos hoy día, el movimiento planetario. Quizá uno de los procesos más interesantes en la historia de la ciencia ha sido la evolución de nuestra comprensión del movimiento planetario.
Los griegos que consideraban al hombre como el centro del universo, supusieron que la tierra era el centro geométrico del universo y que los cuerpos celestes se movían alrededor de la tierra. Los cuerpos conocidos en aquel tiempo fueron ordenados de acuerdo con la distancia promedio a la tierra: la luna, Mercurio, Venus, el sol, Marte, Júpiter y Saturno.
La primera hipótesis relacionada con el movimiento planetario consistió en suponer que los planetas describían círculos concéntricos, teniendo a la tierra en su centro. Esta suposición, sin embargo, no explicaba el movimiento observado de estos cuerpos con respecto a la tierra, y la geometría del movimiento planetario se hizo más y más compleja. En el siglo segundo de la era cristiana, el astrónomo Ptolomeo de Alejandría desarrolló la teoría de las epicicloides para explicar este movimiento. En forma sencilla se suponía que el planeta describía, con movimiento uniforme, un círculo denominado un *epiciclo*, cuyo centro a su vez se desplazaba en un círculo mayor, concéntrico con la tierra y llamado deferente. La trayectoria resultante del planeta es así una *epicicloide* (Figura1). En algunos casos era necesaria una disposición mas complicada para describir los movimientos planetarios. En nuestro lenguaje actual, lo que hicieron los griegos fue describir el movimiento planetario con respecto a un sistema de referencia situado en la tierra.
Esta descripción fue aceptada como correcta hasta que, en el siglo dieciséis, el monje polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), que buscaba una solución más simple, propuso describir el movimiento de todos los planetas, incluyendo la tierra, con respecto al sol, el cual estaría en el centro. La idea no era nueva; había sido propuesta por primera vez por el astrónomo griego Aristarco alrededor del siglo tercero antes de Cristo. De acuerdo a Copérnico, el de las órbitas de los planetas con respecto al sol era el siguiente: Mercurio, Venus, La tierra, Marte, Júpiter y Saturno, la luna girando alrededor de la tierra. Lo que Copérnico propuso esencialmente fue otro sistema de referencia situado en el sol, respecto al cual el movimiento de los planetas tenía una descripción más sencilla.

El sol, el cuerpo más grande de nuestro sistema planetario, coincide con el centro de masa del sistema, y se mueve más lentamente que los otros planetas. Esto justifica el haberlo escogido como centro de referencia, ya que es, prácticamente, un sistema inercial. Lo propuesto por Copérnico ayudó al astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) en el descubrimiento de las leyes del movimiento planetario, como resultado del análisis

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2006
Fecha de Aceptación: 27 Marzo de 2006

cuidadoso de las mediciones astronómicas de Tycho Brahe (1546-1601). Estas leyes, denominadas leyes de Kepler, son una descripción cinemática del movimiento planetario y se enuncian de la siguiente manera:
I. *Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos.*
II. *El vector posición de cualquier planeta con respecto al sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales*. (Esta proposición se denomina *la ley de las áreas*).
III. *Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol*.(Esta ley puede expresarse por la ecuación $P^2 = k\overline{r^3}$, siendo k una constante de proporcionalidad).

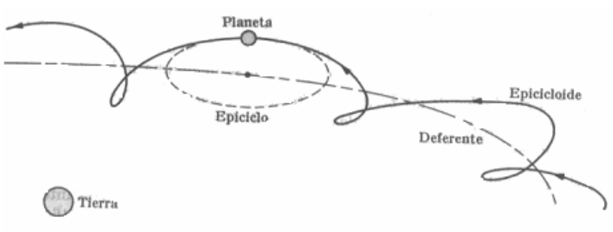

Figura 1 Modelo epicicloidal del movimiento planetario referido a la tierra.

La siguiente etapa en la historia de la astronomía fue una discusión del movimiento planetario y un esfuerzo por determinar la interacción responsable de tal movimiento. Es aquí donde sir Isaac Newton (1642-1727)llevó a cabo su grandiosa contribución, *la ley de gravitación universal*. Esta ley formulada por Newton en 1666, solo fue publicada en 1687, cuando apareció como un capítulo en su monumental trabajo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

2. CONTENIDO

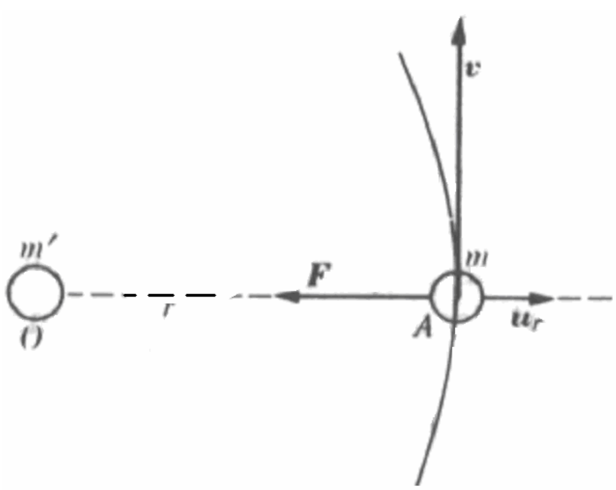

Figura 2 La atracción gravitacional de *m'* sobre *m* es opuesta al vector u_r alejándose de *m'*.

Se elige un sistema de coordenadas adecuado para la solución del problema: Coordenadas Polares.

$\vec{r} = r\,\hat{u}_r$ (1) vector de posición de la tierra respecto al sol

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r) = \hat{u}_r\frac{dr}{dt} + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} \quad (2)$$

Las componentes rectangulares de los vectores unitarios $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ son:

$$\hat{u}_r = \hat{u}_x\cos\theta + \hat{u}_y sen\theta \quad (3)$$

$$\hat{u}_\theta = -\hat{u}_x sen\theta + \hat{u}_y\cos\theta \quad (4)$$

Al derivar con respecto al tiempo las ecs. (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \hat{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\hat{u}_r\frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

Al reemplazar (5) en (2) se logra la velocidad de la tierra respecto del sol donde se ven claramente sus componentes radial y transversal:

$$\vec{v} = \hat{u}_r\frac{dr}{dt} + \hat{u}_\theta r\frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

de las ecuaciones de la cinemática se sabe que para calcular la aceleración basta con derivar la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_r$$
(8)

de la ec. (8) se pueden definir perfectamente las componentes a_r y a_θ:

(9) $$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} \quad (10)$$

aplicando la segunda ley de Newton (F=ma) en componentes, se tiene:

$$F_r = m_t a_r \quad (11)$$

$$F_\theta = m_t a_\theta \quad (12)$$

Como se esta considerando el movimiento de la tierra de masa m_t, alrededor del sol (siendo el sol un marco de referencia estacionario respecto a la tierra) de masa M_s, la única fuerza que actúa sobre el planeta tierra es la fuerza gravitacional que se encuentra a lo largo del radiovector dirigido hacia el sol. Una fuerza de este tipo, dirigida hacia un punto fijo o en sentido contrario a él (es decir, una fuerza que sea función de r únicamente) se conoce como fuerza central[1].

De lo anterior se deduce que $F_r = -G\dfrac{m_t M_s}{r^2}$ y $F_\theta = 0$

Entonces las ecs. (11) y (12) se transforman respectivamente en:

$$-G\frac{m_t M_s}{r^2} = m_t\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \quad (13)$$

$$0 = m_t\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}\right) \quad (14)$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} = 0 \quad (15)$$

Analizando un poco la ec. (15). Esta parece tener la forma de la derivada de un producto y, nótese que:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \quad (16)$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \quad (17)$$

o también:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \quad (18)$$

de donde

$$\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = cte \quad (19)$$

La figura 3 aporta los elementos necesarios para concluir el significado de la ec. (19).

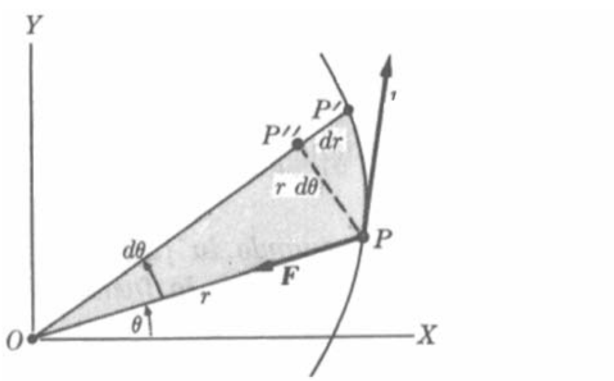

Figura 3 bajo fuerzas centrales, el vector posición barre áreas iguales en tiempos iguales.

[1] Otro ejemplo de una fuerza central es la fuerza electrostática entre dos partículas cargadas.

De otro lado $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ es el momento angular de la tierra, donde **p**=m**v**, es el momento lineal y **r** es el radiovector desde el sol hasta la tierra.

$$\vec{L} = \vec{r} \times m_t\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right) \quad (20)$$

de las propiedades del producto vectorial o producto cruz:

$$\vec{r} \times \hat{u}_r = 0 \quad \text{(por ser paralelos)} \quad (21)$$

$$\vec{r} \times \hat{u}_\theta = r\hat{u}_\theta \quad \text{(por ser perpendiculares)} \quad (22)$$

$$\vec{L} = m_t r^2\frac{d\theta}{dt} \quad (23)$$

$$\left|\vec{L}\right| = l = m_t r^2\frac{d\theta}{dt} \quad (24)$$

en la ec.(24) m_t= constante y de la ecuación.

(19) $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = cte$, por lo tanto de ecuación (24) se deduce que la magnitud del momento angular es constante, lo que indica que la tierra se mueve respecto al sol, en un plano[2].

Ahora se observa la ec. (13)

$$(13)\ -G\frac{m_t M_s}{r^2} = m_t\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$$

de donde se desea obtener r en función de θ porque lo que se necesita es encontrar una ecuación para la trayectoria del movimiento terrestre alrededor del sol. Para obtener *r=r(*θ*)*, se debe entonces eliminar la dependencia con *t*, de la ec. (13) así:

de la ec. (24) $l = m_t r^2\dfrac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{m_t r^2} \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{m_t r_2}\frac{d}{d\theta} \quad (26)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l^2}{m_t^2 r^4}\frac{d^2}{d\theta^2} \quad (27)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{m_t r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{l}{m_t r^2}\frac{d}{d\theta}\right) \quad (28)$$

A partir de la ec. (13)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -G\frac{Ms}{r^2}$$

y teniendo en cuentas las ecs. (25) (26) y (28) se tiene:

[2] Para mayor claridad se recomienda repasar el concepto de momento angular de una partícula.

$$\frac{l}{m_t r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{m_t r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{l^2}{m_t r^3}=-G\frac{M_s}{r^2} \qquad (29)$$

en la ec. (29) teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \qquad (30)$$

y haciendo un cambio de variable: $u=1/r$

(31) $$-\frac{l^2u^2}{m_t^{\,2}}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)+u\right]=-GM_s u^2$$

o rescribiendo la ec. (31):

$$\frac{l^2u^2}{m_t}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=GM_s m_t u^2 \qquad (32)$$

la cual es la ecuación de la órbita.

Si se eligen las coordenadas convenientemente y se reorganiza la ec. (32) entonces

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=G\frac{M_s m_t^{\,2}}{l^2} \qquad (33)$$

[3]hacemos $GM_s m_t=k$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{km_t}{l^2} \qquad (34)$$

hecemos $y=u-(km_t)/l^2$ y reemplazamos

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=0 \qquad (35)$$

y se obtiene una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes que admite la siguiente solución:

(36) $y=b(\cos(\theta-\theta'))$

donde b y θ' son las dos constantes de integración.

De nuevo haciendo los cambios de variable en la ec. (36) se obtiene la solución en función de r:

$$\frac{1}{r}=b\cos(\theta-\theta')+\frac{kM_s}{l^2} \qquad (37)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{M_s k}{l^2}\left(1+\frac{bl^2}{M_s k}\cos(\theta-\theta')\right) \qquad (38)$$

el término $\frac{bl^2}{M_s k}=\varepsilon$ (excentridad de la cónica).

$$\frac{1}{r}=\frac{M_s k}{l^2}\left(1+\varepsilon\cos(\theta-\theta')\right) \qquad (39)$$

Enseguida trataremos de obtener la excentricidad como función de la energía mecánica del sistema, lo que nos ayudará en análisis.

De la ec. (13) $\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-G\frac{Ms}{r^2}$

recordando las ecs. (26) y (28) y sabiendo que:

$$ldt=M_s r^2 dv \qquad (40)$$

$$\frac{dr}{dt}=v \qquad (41)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} \qquad (42)$$

reemplazando en la ec. (13)

$$v\frac{dv}{dt}-r\left(\frac{l^2}{m_t^{\,2}r^4}\right)=-G\frac{m_t M_s}{r^2} \qquad (43)$$

$$m_t v dv=\left(\frac{m_t l^2}{m_t^{\,2}r^3}-G\frac{m_t M_s}{r^2}\right)dr \qquad (44)$$

al integrar se obtiene

$$\frac{1}{2}m_t v^2+G\frac{m_t M_s}{r}=-\frac{l^2}{2m_t r^2}+C_1 \qquad (45)$$

donde claramente se ven los términos de la energía cinética y energía potencial gravitacional.

$$\frac{1}{2}m_t v^2=E-G\frac{m_t M_s}{r}-\frac{l^2}{2m_t r^2} \qquad (46)$$

$$v^2=\frac{2}{m_t}\left(E-G\frac{m_t M_s}{r}-\frac{l^2}{2m_t r^2}\right) \qquad (47)$$

$$v=\sqrt{\frac{2}{m_t}\left(E-G\frac{m_t M_s}{r}-\frac{l^2}{2m_t r^2}\right)} \qquad (48)$$

$$v=\frac{l}{m_t r^2}\frac{dr}{dt} \qquad (49)$$

$$d\theta=\frac{ldr}{m_t r^2\sqrt{\frac{2}{m_t}\left(E-G\frac{m_t M_s}{r}-\frac{l^2}{2m_t r^2}\right)}} \qquad (50)$$

$$\frac{m_t}{l}\sqrt{\frac{2}{m_t}\left(E-G\frac{m_t M_s}{r}-\frac{l^2}{2m_t r^2}\right)}=\frac{dr}{r^2d\theta} \qquad (51)$$

nuevamente con $\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$, y $1/r=u$

$$\frac{m_t}{l}\sqrt{\frac{2}{m_t}\left(E-Gm_t M_s u-\frac{l^2}{2m_t}u^2\right)}=-\frac{du}{d\theta} \qquad (52)$$

$$d\theta=-\frac{l}{m_t}\frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m_t}\left(E-Gm_t M_s u-\frac{l^2}{2m_t}u^2\right)}} \qquad (53)$$

$$d\theta=-\frac{du}{\sqrt{\frac{2m_t E}{l^2}-\frac{2Gm_t^{\,2}M_s}{l^2}u-u^2}} \qquad (54)$$

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m_t E}{l^2} + \frac{2m_t \bar{a} u}{l^2} - u^2}} \quad (55)$$

donde θ'=constante de integración

Mirando de una tabla de integrales se encuentra la siguiente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos\left(-\frac{b+2cx}{q}\right) \quad (56)$$

donde $q=b^2-4ac$; par acomodarnos a esta tabla:

$$a = \frac{2mE}{l^2} \quad (57)$$

$$b = \frac{2m_t \hat{a}}{l^2} \quad (58)$$

$$c=-1 \quad (60)$$

por lo tanto

$$q = \left(\frac{2m_t \hat{a}}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{m_t \hat{a}^2}\right) \quad (61)$$

entonces

$$\theta = \theta' - \arccos\left(\frac{\frac{l^2 u}{m_t \hat{a}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m_t \hat{a}^2}}}\right) \text{, con } u=1/r \quad (62)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m_t \bar{a}}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m_t \bar{a}^2}} \cos(\theta - \theta')\right) \quad (63)$$

Con la ventaja de tener la excentricidad como función de la energía de donde podemos relacionarlas con la trayectoria de la siguiente manera:

Excentricidad	Energía	Trayectoria
ε >1	E>0	*Hipérbola*
ε =1	E=0	*Parábola*
ε <1	E<0	*Elipse*
ε =0	E=($ma^2/2L^2$)	*Círculo*

Tabla 1 Relación de la trayectoria con la excentricidad y la energía

Si E<0, entonces la trayectoria es una elipse, una orbita cerrada, lo que significa que la energía cinética no es suficiente en ningún punto de la órbita para llevar la partícula al infinito, para la cual cambiaría su energía cinética en energía potencial y vencería la atracción gravitacional.

Si E>0, la partícula puede llegar al infinito y tener aún energía cinética. En la ec. (47) si suponemos r=∞, y designamos la velocidad en el infinito por $v\infty$, la energía cinética en el infinito es

$$\frac{1}{2} m_t v_\infty{}^2 = E \text{ ,ò} \quad (64)$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m_t}} \quad (65)$$

Este resultado puede interpretarse de la siguiente manera. Suponeos a la tierra (de masa m_t) y al sol de masa M_s como dos partículas cualesquiera.

Supongamos que la partícula m_t se encuentra a una distancia muy grande de M_s y se le arroja hacia ella con velocidad $v\infty$, denominada velocidad de aproximación, de modo que la energía total se determina por la ec. (64). Mientras la partícula m_t se aproxima a M_s, su energía potencial disminuye (volviéndose más negativa), y la energía cinética aumenta hasta que alcanza su valor máximo en el punto de mayor proximidad, el cual depende del momento angular de la partícula. Entonces la partícula comienza a alejarse, pierde energía cinética y eventualmente, a grandes distancias, recupera la velocidad $v\infty$. La trayectoria es una curva abierta y puede demostrarse que es una hipérbola.

El caso en el que E=0, esinteresante porque entonces la partícula, de acuerdo a la ec. (64), se encuentra en reposo en el infinito ($v\infty$=0). La órbita está aún abierta pero en lugar de ser una hipérbola, es ahora una parábola. Físicamente corresponde a la situación en la cual se suelta una partícula m_t a una distancia de M_s con una velocidad inicial que hace iguales su energía cinética y su energía potencial.

La figura 4 muestra los tres casos posibles, indicando en cada caso la energía total, la energía potencial, la energía cinética y el tipo de órbita; para esta figura $m_t=m$ y $M_s=m'$

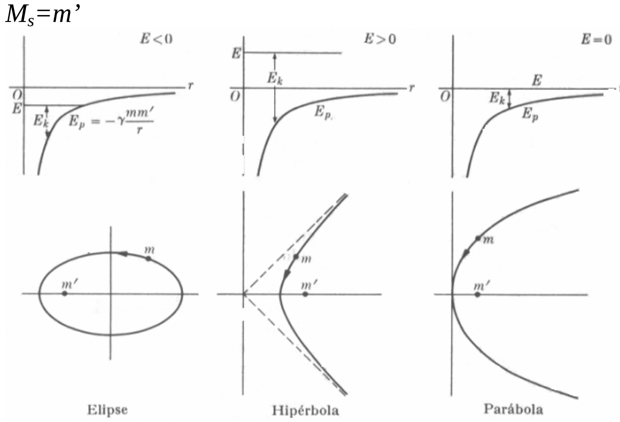

Figura 4 Relación entre la energía total y la trayectoria en el movimiento bajo una fuerza que varía inversamente con el cuadrado de la distancia.

3. APLICACIÓN [4]

Los anteriores resultados son muy importantes cuando se desea colocar en órbita un satélite artificial.

La trayectoria será una elipse, una parábola, o una hipérbola dependiendo de que E sea negativo, cero o positivo. En todos los casos el centro de la tierra se encuentra en un foco de la trayectoria. Si la energía es pequeña, la órbita elíptica intersectará la tierra y el satélite retornará. Si no lo fuera se moverá un una órbita cerrada, o escapará de la tierra, dependiendo del valor de $v_{o.}$

La misma lógica se aplica a un satélite natural como la luna. Obviamente para satélites interplanetarios puede requerirse una órbita con energía positiva. En cualquier caso, generalmente se requiere algún mecanismo de guía para ajustar la trayectoria después del lanzamiento.

4. NOTA [5]

Las consideraciones precedentes serían suficientes para proporcionar un análisis completo del movimiento planetario si supiéramos que el movimiento de un planeta alrededor del sol no fuera afectado por lo otros planetas y cuerpos celestes. En otras palabras la órbita de la tierra (y de todos los otros planetas) sería una elipse perfecta si no hubiera otras fuerzas, además de la del sol actuando sobre la tierra. Sin embargo, la presencia de otros planetas introduce perturbaciones en la órbita de un planeta. Estas perturbaciones pueden calcularse con gran exactitud mediante técnicas especiales que constituyen la ciencia llamada mecánica celeste. Las perturbaciones pueden ser analizadas esencialmente, por dos efectos. Un efecto es que la órbita elíptica de un planeta no es cerrada, sino que el eje mayor de la elipse rota muy lentamente alrededor del foco donde está situado el sol, efecto que se denomina avance del perihelio (figura 5 a). El otro efecto es una variación periódica de la excentricidad de la elipse con respecto a su valor promedio, como se indica en la figura 5b. Estos cambios ocurren muy lentamente. En el caso de la tierra tienen un período del orden de 10^5 años (alrededor de 21’ de arco por siglo para el movimiento del perihelio). Aún así, han producido efectos notables especialmente en los cambios lentos de las condiciones climáticas de la tierra. Estos cambios han sido indicados por los geofísicos que han estudiado las diferentes capas de la corteza terrestre.

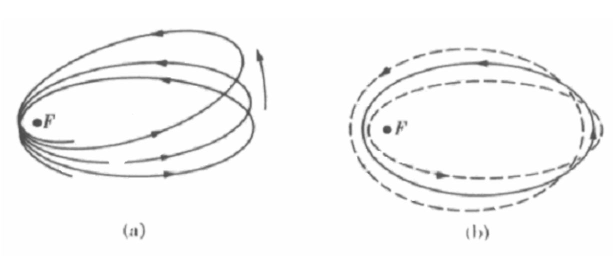

Figura 5 Perturbaciones en el movimiento planetario.
(a) Rotación del eje de la elipse. (b) Oscilación en la excentricidad de la elipse. Los dos efectos han sido grandemente exagerados.

El afelio es el punto más distante de la orbita de un planeta alrededor del sol: 152,6 millones de km.

El perihelio es el punto más cercano de la órbita de un planeta alrededor del sol: 147,5 millones de km.

5. CONCLUSIÓN

Del anterior procedimiento puede verse como es posible obtener el modelo físico de la trayectoria de la tierra alrededor del sol, usando solamente los conceptos que Newton enunció en sus tres leyes, y valiéndonos únicamente de herramientas matemáticas de nivel intermedio.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] R.A. SERWAY. Física, 978 páginas, Interamericana, México 1988.

[2][4][5] ALONSO, Marcelo – FINN Edward J. Física Volumen 1: Mecánica, 451 páginas, Fondo Educativo Interamericano SA, México 1979.

[3] H. GOLDSTEIN, Mecánica Clásica segunda ed., 793 páginas Editorial Reverté SA, 1994