

EL ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UNA LÁMINA RECTANGULAR CON PARED DELGADA

RESUMEN

En este artículo se estudiará la bifurcación en el proceso de deformación de elementos constituidos por láminas de paredes delgadas, utilizando un aparato matemático adecuado y algunas teorías de deformación.

PALABRAS CLAVES: Estabilidad, bifurcación, proceso de post-bifurcación, teoría de la micro deformación, principio de Donell-Mushtar-Vlassov.

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ

Profesor Auxiliar, Ph.D

Matemático

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

jorodryy@utp.edu.co

ABSTRACT

In this paper the bifurcation of process deformation of constructions made of thin rectangular plates with the utilization of appropriate mathematical methods and some deformations theories is investigated.

KEYWORDS: *Stability, bifurcation, post-bifurcation process, the theory of micro-deformation, Donell-Mushtar-Vlassov principle.*

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad el problema para la determinación de los puntos de bifurcación en esta clase de elementos ha sido muy analizado. A este tipo de trabajos se le han dedicado publicaciones muy completas. En muchos casos la destrucción de este tipo de construcciones no es debida a la destrucción del material, sino a la pérdida de estabilidad de las delgadas paredes de estos elementos. Debido a esto toma mucha importancia el análisis de la estabilidad de este tipo de construcciones.

Basado en esto la teoría de la micro deformación elástico-plástica y de las diferentes teorías matemáticas de flujo con superficies suaves no pueden ser utilizadas para la solución de este tipo de problemas de estabilidad después de superar la zona elástica, sin embargo, es conocido que la bifurcación en su proceso de deformación es seguida por aumento de los parámetros de la carga externa, debido a esto en el punto de bifurcación la capacidad de sostenimiento de tales elementos no pierde su estabilidad, lo que verdaderamente se necesita es un detallado estudio de tal comportamiento en el comienzo de la post-bifurcación.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Analicemos una lámina rectangular elástica simplemente apoyada en sus extremos de dimensiones a y b y de grosor h .

En la lámina las cargas distribuidas uniformemente actúan longitudinalmente en los lados P_1, P_2 (fig. 1) La condición pre-crítica se acepta como homogénea. Supongamos que el proceso de carga está dado por las líneas OAB (fig. 2).

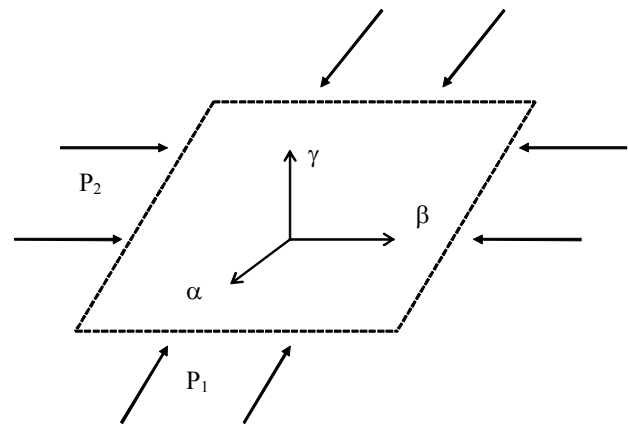


Fig. 1

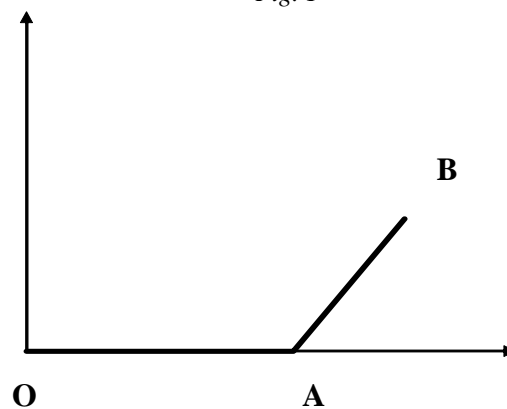


Fig. 2

Es necesario determinar los factores que afectan parámetros críticos e investigar el comportamiento en el comienzo del proceso de post-bifurcación en la lámina.

3. OBSERVACIONES PRELIMINARES

Tenemos en cuenta que el comportamiento mecánico del material lo describe la teoría plástica que tiene en cuenta la micro-carga.

Para comodidad de la solución del problema todo el proceso de deformación lo dividimos en tres etapas:

- comportamiento de la carga pre-crítica
- bifurcación del proceso de deformación
- comportamiento de la post-bifurcación

La determinación de la condición del modo de deformación ante la carga pre-crítica no nos da ningún problema, debido a que la lámina es totalmente homogénea. Basándonos en esto podemos escribir

$$\sigma_\alpha^o = P_1, \sigma_\beta^o = P_2.$$

4. LA BIFURCACIÓN EN EL PROCESO DE DEFORMACIÓN

Para la construcción de los sistemas de ecuaciones utilizamos la teoría tridimensional de láminas y envolturas.

Para más comodidad, primero analizaremos una envoltura, para la cual la geometría interna de su superficie media coincide con la geometría euclidiana en el plano. Permitamos que el sistema de coordenadas esféricas (fig.3), donde la mitad del la superficie de la envoltura esta determinado por las coordenadas (α, β) , es de tal forma que para los coeficientes de la primera cuadratura A, B y para las principales curvaturas, tienen lugar las siguientes expresiones

$$A=1, B=1, k_1 = R_\alpha^{-1}, k_2 = R_\beta^{-1} \tag{1}$$

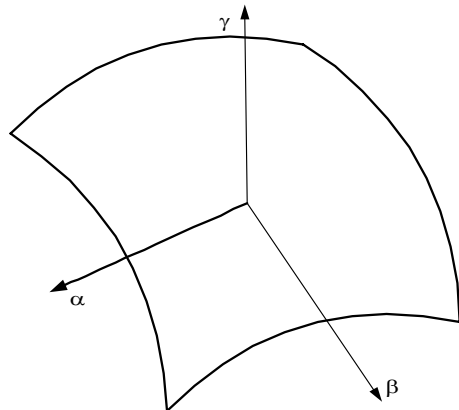


Fig.3

El proceso de carga en la condición del modo de deformación de la envoltura se caracteriza por las tensiones $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}$ y en el punto de bifurcación obtienen incremento los componentes de tensión

$\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\alpha\gamma}$ y de deformación $\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\beta\gamma}, \epsilon_{\alpha\gamma}$.

Las ecuaciones en términos de velocidades después de tener en cuenta lo anteriormente expuesto van a ser dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\alpha\alpha} &= a_{11}\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} + a_{12}\dot{\epsilon}_{\beta\beta}, \\ \dot{\sigma}_{\beta\beta} &= a_{21}\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} + a_{22}\dot{\epsilon}_{\beta\beta}, \\ \dot{\sigma}_{\alpha\beta} &= 2g\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}, \dot{\sigma}_{\beta\gamma} = 2g\dot{\epsilon}_{\beta\gamma}, \dot{\sigma}_{\alpha\gamma} = 2g\dot{\epsilon}_{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

aquí

$$\left[\frac{1}{2h} T_x^o \right] W_{,xx} + \left[\frac{1}{2h} T_y^o \right] W_{,yy} = 0$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} (A_{11} + 2\sqrt{3}A_{12} + 3A_{22}), \tag{2}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} (3A_{22} - A_{11}),$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} (A_{11} - 2\sqrt{3}A_{12} + 3A_{22}).$$

Para la construcción de los demás coeficientes A_{pq} se puede seguir un procedimiento análogo.

Ahora podemos construir la ecuación característica para la determinación de los puntos de bifurcación en el proceso de deformación.

En la teoría fundamental de Kirchoff-Lyava las velocidades de desplazamiento $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ en un punto aleatorio (α, β, γ) de la envoltura se pueden representar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_\alpha &= U(\alpha, \beta) - \gamma W_{,\alpha}, \\ v_\gamma &= W(\alpha, \beta), \\ v_\beta &= V(\alpha, \beta) - \gamma W_{,\beta}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $U, V, W, -$ son las velocidades de desplazamiento en la mitad de la superficie de la envoltura, $\psi_\alpha, \psi_\beta -$ funciones que dependen de las coordenadas $(\alpha, \beta), f_\alpha(\gamma), f_\beta(\gamma) -$ son simplemente funciones sin dimensiones que dependen de la función γ .

Utilizando las velocidades de desplazamiento (3) encontramos las velocidades de deformación

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \left(U_{,\alpha} + \frac{W}{R_\alpha} \right), \dot{\epsilon}_{\beta\beta} = \left(V_{,\beta} + \frac{W}{R_\beta} \right),$$

$$2\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = (U_{,\beta} + V_{,\alpha}) - 2\delta\gamma W_{,\alpha\beta} + f_{\alpha}(\gamma)\psi_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta) + f_{\beta}(\gamma)\psi_{\beta,\alpha}(\alpha, \beta),$$

$$2\dot{\epsilon}_{\gamma} = (1-\delta)W_{,\alpha} + f'_{\beta}(\gamma)\psi_{\beta,\alpha}(\alpha, \beta),$$

$$2\dot{\epsilon}_{\beta\gamma} = (1-\delta)W_{,\beta} + f'_{\alpha}(\gamma)\psi_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta).$$

Las integrales características $\dot{T}_{\alpha}, \dot{T}_{\beta}, \dot{T}_{\alpha\beta}, \dot{T}_{\alpha}, \dot{M}_{\beta}, \dot{M}_{\alpha\beta}, \dot{Q}_{\alpha}, \dot{Q}_{\beta}$ están expresadas en términos de U, V, W . La linearización de la ecuación de estabilidad va a tener el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} \dot{T}_{\alpha,\alpha} + \dot{T}_{\alpha\beta,\beta} &= 0, \\ \dot{T}_{\beta,\beta} + \dot{T}_{\beta\alpha,\alpha} &= 0, \\ \dot{Q}_{\alpha,\alpha} + \dot{Q}_{\beta,\beta} - \frac{\dot{T}_{\alpha}}{R_{\alpha}} - \frac{\dot{T}_{\beta}}{R_{\beta}} + T_{\alpha}^o W_{,\alpha\alpha} + T_{\beta}^o &= 0 \\ \dot{M}_{\alpha,\alpha} + \dot{M}_{\alpha\beta,\beta} - \dot{Q}_{\alpha} &= 0, \\ \dot{M}_{\beta,\beta} + \dot{M}_{\beta\alpha,\alpha} - \dot{Q}_{\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Después de reemplazar todas las expresiones de los cambios de tensión y los momentos en la ecuación de estabilidad, y haciendo el respectivo cambio de una envoltura a una lámina es decir cuando $R_{\alpha} \rightarrow \infty$ y $R_{\beta} \rightarrow \infty$, llegamos a la ecuación de la lámina

$$\begin{aligned} a_{11}U_{,\alpha\alpha} + gU_{,\beta\beta} + (a_{12} + g)V_{,\alpha\beta} &= 0, \\ \left[(1-\delta)g + \frac{1}{2h}T_{\alpha}^o \right] W_{,\alpha\alpha} + \left[(1-\delta)g + \frac{1}{2h}T_{\beta}^o \right] W_{,\beta\beta} + \\ + gf_{\alpha}^*(h)\psi_{\alpha,\alpha} + gf_{\beta}^*(h)\psi_{\beta,\beta} &= 0, \\ -\frac{2}{3}\delta a_{11}W_{,\alpha\alpha\alpha} - \frac{2}{3}\delta(a_{12} + 2g)W_{,\alpha\beta\beta} - \frac{2}{h_2}g(1-\delta)W_{,\alpha} + \\ + (a_{11}\psi_{\alpha,\alpha\alpha} + g\psi_{\alpha,\beta\beta})b_{\alpha}^*(h) - \frac{2}{h^2}gf_{\alpha}^*(h)\psi_{\alpha} + \\ + (a_{12} + g)b_{\beta}^*(h)\psi_{\beta,\alpha\beta} &= 0, \\ -\frac{2}{3}\delta a_{22}W_{,\beta\beta\beta} - \frac{2}{3}\delta(a_{21} + 2g)W_{,\beta\alpha\alpha} - \frac{2}{h^2}g(1-\delta)W_{,\beta} + \\ + (a_{22}\psi_{\beta,\beta\beta} + g\psi_{\beta,\alpha\alpha})b_{\beta}^*(h) - \frac{2}{h^2}gf_{\beta}^*(h)\psi_{\beta} + \\ + (a_{21} + g)b_{\alpha}^*(h)\psi_{\alpha,\beta\alpha} &= 0, \\ b_{\alpha}^*(h) = b_{\alpha}(h)/h, \quad b_{\beta}^*(h) = b_{\beta}(h)/h \end{aligned}$$

Además de este sistema de ecuaciones es necesario tener en cuenta las siguientes condiciones de frontera

$$U = 0, W = 0, \psi_{\alpha} = 0, \dot{T}_{\beta} = 0, \dot{M}_{\beta} = 0, \text{ para } \beta = 0 \text{ y } \beta = b,$$

$$V = 0, W = 0, \psi_{\beta} = 0, \dot{T}_{\alpha} = 0, \dot{M}_{\alpha} = 0, \text{ para } \alpha = 0 \text{ y } \alpha = a.$$

Supongamos que la solución del problema está dada en forma de senos y cósenos de la siguiente forma

$$U = hA_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a}\alpha\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}\beta\right),$$

$$V = hA_2 \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\alpha\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}\beta\right),$$

$$W = hA_3 \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\alpha\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}\beta\right),$$

Así las condiciones iniciales del problema se cumplen idénticamente utilizando la solución dada en esta forma.

Después reemplazamos esta solución en el sistema (5), en el cual es necesario tener en cuenta que $R_{\alpha} = R_{\beta} = \infty, T_{\alpha}^o = -P_1h, T_{\beta}^o = -P_2h$, así llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -A_1(a_{11}\chi_{\alpha}^2 + g\chi_{\beta}^2) + A_2\chi_{\alpha}\chi_{\beta}(a_{12} + g) - A_3a_{11}\epsilon\chi_{\alpha} &= 0 \\ A_1\chi_{\alpha}\chi_{\beta}(a_{21} + g) - A_2(a_{22}\chi_{\beta}^2 + g\chi_{\alpha}^2) - A_3a_{22}\epsilon\chi_{\beta} &= 0 \\ A_1\epsilon a_{11}\chi_{\alpha} + A_2\epsilon a_{12}\chi_{\beta} - \\ A_3\left[(1-\delta)(g\chi_{\alpha}^2 + g\chi_{\beta}^2) - p\chi_{\beta}^2 + \epsilon^2 a_{11} - \frac{1}{2}q\chi_{\alpha}^2\epsilon^{-1} \right] + \\ + B_1gf_{\alpha}^*(h)\chi_{\alpha} - B_2gf_{\beta}^*(h)\chi_{\beta} &= 0, \\ -\frac{2}{3}A_3\left[\delta a_{11}\chi_{\alpha}^3 + \delta(a_{12} + 2g)\chi_{\alpha}\chi_{\beta}^2 - 3(1-\delta)g\chi_{\beta}^3 \right] - \\ - B_1\left[b_{\alpha}^*(h)(a_{11}\chi_{\alpha}^2 + g\chi_{\beta}^2) + 2gf_{\alpha}^*(h) \right] + \\ + B_2b_{\beta}^*(h)(a_{12} + g)\chi_{\alpha}\chi_{\beta} &= 0, \\ -\frac{2}{3}A_3\left[\delta a_{22}\chi_{\beta}^3 + \delta(a_{21} + 2g)\chi_{\beta}\chi_{\alpha}^2 - 3(1-\delta)g\chi_{\alpha}^3 \right] - \\ - B_1b_{\alpha}^*(h)(a_{21} + g)\chi_{\beta}\chi_{\alpha} + \\ + B_2\left[b_{\beta}^*(h)(a_{22}\chi_{\beta}^2 + g\chi_{\alpha}^2) + 2gf_{\beta}^*(h) \right] &= 0, \\ \chi_{\alpha} = \frac{n\pi h}{2a}, \quad \chi_{\beta} = \frac{m\pi h}{2b}. \end{aligned}$$

De la condición de que este último sistema posee una solución no trivial, obtenemos la ecuación característica, necesaria para la obtención de los parámetros críticos.

$$\det \| m_{ij} \| = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5), \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= -(a_{11}\chi_a^2 + g\chi_\beta^2), \\
 m_{12} &= m_{21} = \chi_\alpha\chi_\beta(a_{12} + g), \\
 m_{13} &= m_{31} = a_{11}\varepsilon\chi_\alpha, \quad m_{22} = -(a_{22}\chi_\beta^2 + g\chi_\alpha^2), \\
 m_{23} &= m_{32} = -a_{22}\varepsilon\chi_\beta, \\
 m_{33} &= -\left[(1-\delta)(g\chi_\alpha^2 + g\chi_\beta^2) - p\chi_\beta^2 + \varepsilon^2 a_{11} - \frac{1}{2}q\varepsilon^{-1}\chi_\alpha^2\right] \\
 m_{34} &= gf_\alpha^*(h)\chi_\alpha, \tag{7} \\
 m_{43} &= -\frac{2}{3}\left[\delta a_{11}\chi_\alpha^3 + \delta(a_{12} + 2g)\chi_\alpha\chi_\beta^2 - 3(1-\delta)g\chi_\beta^3\right] \\
 m_{44} &= -\left[b_\alpha^*(h)(a_{11}\chi_\alpha^2 + g\chi_\beta^2) + 2gf_\alpha^*(h)\right], \\
 m_{54} &= m_{45} = -b_\alpha^*(h)(a_{21} + g)\chi_\beta\chi_\alpha, \\
 m_{53} &= -\frac{2}{3}\left[\delta a_{22}\chi_\beta^3 + \delta(a_{21} + 2g)\chi_\beta\chi_\alpha^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 3(1-\delta)g\chi_\alpha^3\right], \\
 m_{55} &= \left[b_\beta^*(h)(a_{22}\chi_\beta^2 + g\chi_\alpha^2) + 2gf_\beta^*(h)\right].
 \end{aligned}$$

Si el proceso de carga es dado, de este último sistema (7) se puede obtener el valor del grosor(ancho) crítico de la lámina (flexión) $\varepsilon = h/a$, correspondiente al punto aleatorio de la trayectoria de las cargas $\sigma_{\alpha\alpha}$ y $\sigma_{\beta\beta}$, conociendo las magnitud a/b y los parámetros de formación de las ondas medias m y n ; los cuales están sujetos a la teoría que utilizemos. En nuestro caso para la teoría de Kirchoff-Lyava obtenemos

$$\delta = 1, \quad gf_\alpha^*(h) = gf_\beta^*(h) = 0, \quad b_\alpha^*(h) = b_\beta^*(h) = 0.$$

Así los valores críticos de flexibilidad ε^* , se obtienen como el máximo entre todos los ε , calculados para varios m y n .

5 COMIENZO DE LA POST-BIFURCACIÓN

En esta etapa para la obtención de los parámetros críticos utilizaremos la hipótesis de Kirchoff-Lyava

$$\delta = 1, \quad f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma) = 0.$$

Además utilizaremos el principio de Donnell-Mushtar-Vlassov, el cual es un funcional variacional que tiene el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}
 F &= \int_A \left\{ H_{(3)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} K_{\alpha\beta} K_{\kappa\gamma} + 2H_{(2)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} E_{\alpha\beta} E_{\kappa\gamma} + \right. \\
 &\quad \left. H_{(1)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} K_{\alpha\beta} K_{\kappa\gamma} + N_o^{\alpha\beta} W_{,\alpha} W_{,\beta} \right\} dA. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Aquí el tensor de deformación $\eta_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + x^3 K_{\alpha\beta}$,

x^α ($\alpha=1,2$) – son las coordenadas medias del espacio no deformado,

x^3 – es la normal a este espacio no deformado,

$E_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ – son las deformaciones membranal y curvilineas.

Donde

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(U_{\alpha,\beta}^o + U_{\beta,\alpha}^o), \quad K_{\alpha\beta} = -\xi W_{,\alpha\beta},$$

$$H_{(i)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{L}^{\alpha\beta\kappa\gamma} (x^3)^{i-1} dx^3. \tag{9}$$

Las condiciones de frontera tienen el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}
 W &= 0, W_{\alpha\alpha} = 0, \quad \text{para } \alpha = 0, \quad \alpha = a, \\
 W &= 0, W_{\beta\beta} = 0, \quad \text{para } \beta = 0, \quad \beta = b, \tag{10}
 \end{aligned}$$

Si representamos la solución del problema de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 U &= hA_1 \cos(N\alpha) \sen(M\beta), \\
 V &= hA_2 \sen(N\alpha) \cos(M\beta), \\
 W &= hA_3 \sen(N\alpha) \sin(M\beta), \tag{11}
 \end{aligned}$$

Donde

$$N = \frac{n\pi}{a}, \quad M = \frac{m\pi}{b}.$$

Después de reemplazar esta solución en el funcional (8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{U} &= 0, \quad \tilde{V} = 0, \\
 \tilde{W} &= hA_1 \sin(N\alpha) \sin(M\beta), \tag{12}
 \end{aligned}$$

Por intermedio de las velocidades de desplazamiento en el medio del espacio obtenemos las velocidades del desplazamiento en un punto aleatorio de la lámina

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_\gamma &= h\gamma \sen(N\alpha) \sen(M\beta) \dot{\xi}, \\
 \dot{U}_\beta &= \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^o \beta - M\gamma h \sin(N\alpha) \cos(M\beta) \dot{\xi},
 \end{aligned}$$

Ahora en base en lo ya planteado, representamos la solución de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 U &= U_o, \quad V = V_o, \\
 \dot{W} &= \dot{W}_o + h \dot{\xi} \operatorname{sen}(N\alpha) \operatorname{sen}(M\beta).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

\dot{W} – desviación lineal media de la lámina

U_o, V_o, W_o – son la solución del problema sin tener en cuenta la bifurcación del proceso de deformación.

Al reemplazar todas estas expresiones en el funcional (8) obtenemos una sola ecuación integro-diferencial con respecto al parámetro $\dot{\xi}$

$$\begin{aligned}
 F &= \int_A \left\{ H_{(3)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \dot{\xi} 2\tilde{W}_{,\alpha\beta} \tilde{W}_{,\kappa\gamma} - H_{(2)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} (U_{\alpha,\beta}^o) + \right. \\
 &+ H_{(2)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} (U_{\alpha,\beta}^o + U_{\beta,\alpha}^o) \dot{\xi} \tilde{W}_{,\kappa\gamma} + \\
 &+ \frac{1}{4} H_{(1)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} (U_{\alpha,\beta}^o + U_{\beta,\alpha}^o) (U_{\kappa,\gamma}^o + U_{\gamma,\kappa}^o) + \\
 &\left. + N_o^{\alpha\beta} \dot{x}^2 \tilde{W}_{,\alpha} \tilde{W}_{,\beta} \right\} dA
 \end{aligned}$$

En el punto crítico, la condición estacionaria del funcional F se cumple para todos los $\dot{\xi}$ y es por esto que en el punto crítico $\dot{\xi}$, se determina de tal manera que en cada punto de la lámina se cumpla la condición de la descarga completa.

6. CONCLUSIÓN GENERAL

Como hemos visto, después de analizar todos los resultados obtenidos podemos asegurar que la historia de la carga influencia de gran manera en todos los parámetros críticos de la lámina estudiada.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] GUZ A., Babich I. Teoría tridimensional de barras, láminas y envolturas, Kiev, 1980.
- [2] HUTCHINSON J. W. Post-bifurcations behavior in the plastic range // *J. Mech. Phys. Solids*. 1973. Vol.21.
- [3] KADASHEVICH Yu.I., Chernyakov Yu.A. Theory of plasticity taking into account micro stresses // *Adv. Mech.* 1992. V. 15, № 3-4. P. 3-39.
- [4] SHVAYKO N. Influencia de la historia de carga en la estabilidad en los elementos de la construcción. Dnepropetrovsk, 1991.