CÁLCULO DE LOS VALORES MÁXIMOS DE CAMPO MAGNÉTICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA
Ingeniero Electricista, Ms.C
Profesor
Universidad Tecnológica de Pereira
andreses1@utp.edu.co

GUSTAVO BETANCOURT O.
Ingeniero Electricista
Profesor
Universidad Tecnológica de Pereira
gustavoa@ohm.utp.edu.co

Grupo de Investigación en Control e Instrumentación. Ingeniería Eléctrica

RESUMEN
El método de los elementos finitos (FEM) es ampliamente utilizado en varias áreas del conocimiento las cuales incluyen aplicaciones de la ingeniería mecánica en áreas como transferencia de calor, mecánica de sólidos, estudios de elasticidad, dinámica de fluidos y análisis del comportamiento de materiales cuando son sometidos a esfuerzos. Las aplicaciones en ingeniería eléctrica van desde el análisis de campo eléctrico y magnético en un punto hasta el modelamiento de las líneas de flujo en una máquina eléctrica o línea de transmisión.

PALABRAS CLAVES: Elementos finitos, Máquinas eléctricas.

ABSTRACT
The finite element method (FEM) is used in many research areas like mechanical engineering, heat transference, solid devices, analysis in materials when they are put under efforts. In electrical engineering they are used in electric and magnetic field in a machine or in a transmission line.

KEYWORDS: *Finite element, Electrical Machines.*

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad existen gran cantidad de problemas de la ingeniería que requieren la aplicación de cálculo numérico avanzado para la solución de problemas complejos [2]. Tales problemas pueden ser resueltos con la ayuda de las técnicas computacionales actuales, las cuales han revolucionado la forma en la cual los problemas como los del electromagnetismo son analizados.

Técnicas de aproximación como la de los Elementos Finitos (FEM) constituyen un método numérico destinado a resolver mediante ecuaciones matriciales las ecuaciones diferenciales que se plantean en sistemas discretos (estructuras) o continuos (campos).

Este método fue propuesto por primera vez en la década de los cuarenta y fue empleado para el diseño de aeronaves. De ahí en adelante fue ampliamente usado en problemas de análisis estructural en donde se requiere identificar y analizar puntos de esfuerzo de materiales sin necesidad de realizar pruebas destructivas [3].

En ingeniería eléctrica el FEM puede ser aplicado a los transformadores, motores, líneas de trasmisión y otros componentes magnéticos con el fin de determinar distribuciones de campos magnéticos en puntos o zonas determinadas [4].

Básicamente se plantean dos técnicas para el análisis con los FEM. El método variacional o de Rayleigh-Ritz y el método de los residuos ponderados o de Galerkin [5].

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2006
Fecha de Aceptación: 7 Abril de 2006

2. MARCO TEÓRICO DEL MÉTODO

El método de los elementos finitos (FEM) o método de aproximación por porciones es una técnica numérica empleada para obtener soluciones aproximas de problemas matemáticos con coediciones de frontera que son dominados por las ecuaciones diferenciales.

Actualmente se considera el método de las diferencias finitas FD como una subclase del FEM. El cual se reduce al método de las FD cuando las mallas son regulares.

Figura 1. Diferencias finitas y elementos finitos

Es por eso que muchas de las técnicas conocidas para la solución de problemas por medio de las FD pueden ser empleadas en la aplicación de los elementos finitos.

Algunas ventajas del método de los FEM son [1]:

- Puede aplicarse a cuerpos compuestos por varios materiales.

- Las formas irregulares que se presenten en la frontera pueden ser aproximadas usando elemento con lados rectos o exactamente usando lados curvos.

- El tamaño de los elementos puede variar.
- El método emplea una formulación integral para generar un sistema de ecuaciones algebraicas.

2.1. Formulación del sistema de ecuaciones

Un problema típico de condiciones de frontera puede ser el que se define por la siguiente ecuación diferencial:

$$\varsigma\phi = f \qquad (1)$$

En donde las condiciones de frontera definen el dominio de la función. ς representa el operador diferencial y f es la excitación o función de fuerza y ϕ es una variable desconocida. Se desea entonces resolver la ecuación (1) con sus condiciones de frontera de una manera analítica. Sin embargo dichas soluciones solo pueden ser obtenidas en algunos casos los cuales incluyen el potencial entre dos placas paralelas infinitas, propagación de ondas por diferentes medios, resonancia en cavidades, etc. Muchos otros problemas del electromagnetismo no tienen una solución analítica directa por lo cual se deben implementar técnicas de aproximación como los métodos de Ritz y Galerkin.

2.1.1. El método de Ritz.

Conocido también como el método de Rayleigh – Ritz, es un método variacional en el cual los problemas con condiciones de frontera son formulados en términos de expresiones variacionales cuyo valor mínimo de la función corresponde a una ecuación diferencial gobernada por las condiciones de frontera. La solución aproximada se obtiene minimizando la función con respecto a sus variables.
Una solución para (1) puede obtenerse minimizando la función (2) con respecto a la variable $\tilde{\phi}$ [4]:

$$F\left(\tilde{\phi}\right)=\frac{1}{2}\left\langle\varsigma\tilde{\phi},\tilde{\phi}\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\tilde{\phi},f\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle f,\tilde{\phi}\right\rangle \qquad (2)$$

En donde $\tilde{\phi}$ es una función de prueba que es utilizada comúnmente para resolver problemas del electromagnetismo [5]. Por facilidad se supone que la solución a la ecuación (2) es un valor real y que la función $\tilde{\phi}$ se puede aproximar por expansión a:

$$\tilde{\phi}=\sum_{j=1}^{N} c_j v_j=\{c\}^T\{v\}=\{t\}^T\{c\} \qquad (3)$$

En donde v_j es una función de expansión definida sobre todo el dominio y c_j es un coeficiente constante que debe ser determinado. Reemplazando (3) en (2) se tiene:

$$F=\frac{1}{2}\{c\}^T\int_\Omega\{v\}\varsigma\{v\}\,d\Omega\{c\}$$
$$-\{c\}^T\int_\Omega\{v\}\,fd\Omega \qquad (4)$$

Con el fin de minimizar la función $F\left(\tilde{\phi}\right)$ se toman las derivadas parciales con respecto a c_j con lo cual se obtiene la ecuación algebraica que puede escribirse de la forma:

$$[S]\{c\}=\{b\} \qquad (5)$$

En donde:

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(v_i\varsigma v_j+v_j\varsigma v_i\right)d\Omega$$
$$b_i=\int_\Omega v_i\,fd\Omega \qquad (6)$$

Siendo $[S]$ una matriz simétrica. Una manera mas clara de escribir la ecuación (6) aprovechando las ventajas del operador ς es:

$$S_{ij}=\int_\Omega v_i\varsigma v_j d\Omega \qquad (7)$$

Una solución aproximada para el problema inicialmente planteado en la ecuación (1) es obteniendo la solución matricial de S_{ij} .

2.1.2. Método de Galerkin.

Es un método residual en el cual la solución se obtiene ponderando los residuos de la ecuación diferencial. Supóngase que $\tilde{\phi}$ es una solución aproximada de la ecuación (1) y sustituyendo $\tilde{\phi}$ por ϕ se tiene que:

$$r=\varsigma\tilde{\phi}-f=0 \qquad (8)$$

Una buena aproximación para $\tilde{\phi}$ debe de ser aquella que reduce el residuo r a un valor pequeño para todos los puntos de Ω . El método cumple con la condición:

$$R_i=\int_\Omega w_i r d\Omega=0 \qquad (9)$$

Donde R_i la integral del residuo y w_i es la función de peso escogida.
En el método de Galerkin la función de pesos es seleccionada para que represente de la forma más exacta la función empleada para la expansión de la solución aproximada, lo cual le da más exactitud a la solución y es la manera más común de emplear la ecuación de los elementos finitos [4].
Por ejemplo si la función de peso es seleccionada de tal forma que $w_i = v_i$ siendo $i = 1, 2.3\ldots, N$ se tiene que:

$$R_i=\int_\Omega\left(v_i\varsigma\{v\}^T\{c\}-v_i f\right)d\Omega=0 \qquad (10)$$

En donde los parámetros de la ecuación (10) cumplen con las propiedades de los parámetros de la ecuación (7), por lo tanto el método planteado por Galerkin resulta en el mismo sistema de ecuaciones planteado por el método de Ritz [6].

3. CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO MÁXIMO EN UNA DIMENSIÓN

Uno de los pasos más importantes para la solución de problemas con la técnica de los FEM, es la formulación del sistema de ecuaciones para cualquiera de los dos métodos [5].

Se plantea un problema para ser resuelto por el método de Elementos Finitos utilizando el método de Ritz: Se desea hallar las magnitudes máximas de campo magnético en un elemento cuya forma o estructura se asemeja al núcleo de un transformador monofásico. Este tienen en una de sus columnas un arrollamiento de alambre por el cual circula una corriente y el cual representa la fuerza magnetomotriz de entrada, en la otra columna se tiene un entrehierro. Ver figura 2.

Se propone un modelo simétrico con las siguientes dimensiones:

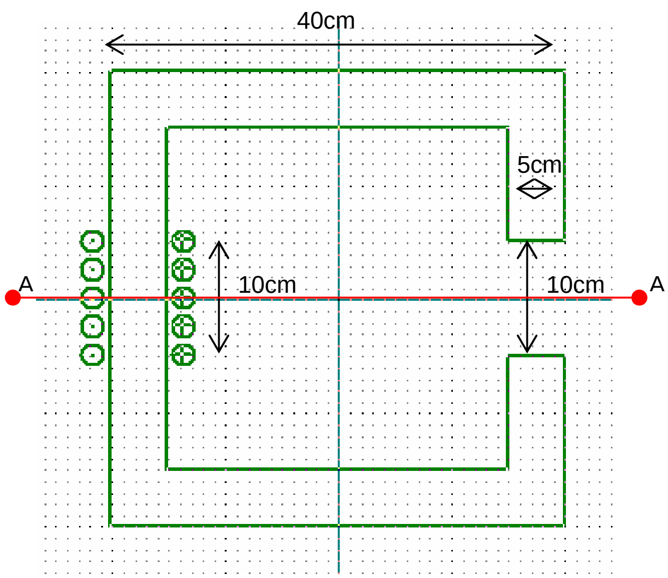

Figura 2. Modelo a ser resuelto por FEM

Por el arrollamiento de alambre de 10cm de longitud circula una corriente de 100mA, el entrehierro tiene una longitud de 10cm, se hizo la permeabilidad magnética del elemento lo más alta posible (10000) para observar más claramente el efecto de dispersión en el entrehierro.

La solución a este problema fue implementada en el software Vizimag™ que utiliza el método de Elementos Finitos para resolver problemas de campo magnético.

En la solución del problema se emplea una grilla de 100x100 elementos lo cual da un total de 10000 incógnitas (puntos a resolver).

Al correr la simulación el sistema entrega la solución en forma de líneas de campo como se ilustra en la Figura 3.

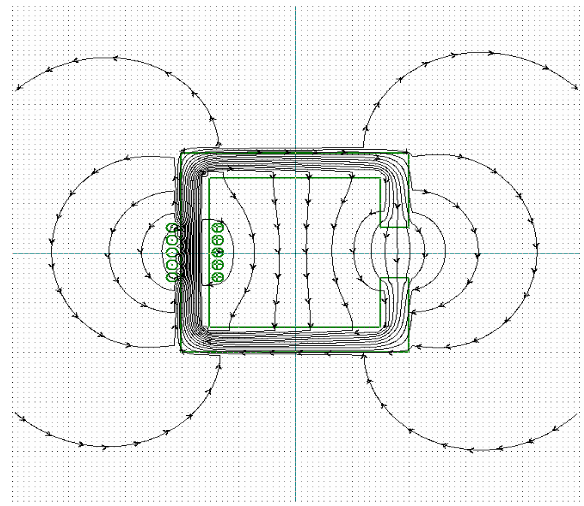
Figura 3. Solución del problema mostrando Líneas de campo

En donde se puede encontrar el valor de campo magnético para cualquier par de coordenadas.

En otra vista del programa se observa un gradiente en donde se visualizan las concentraciones de campo.

Así mismo, el programa nos da la opción de mostrar las magnitudes de campo por medio de escala de colores[1], como se ve en la figura 4.

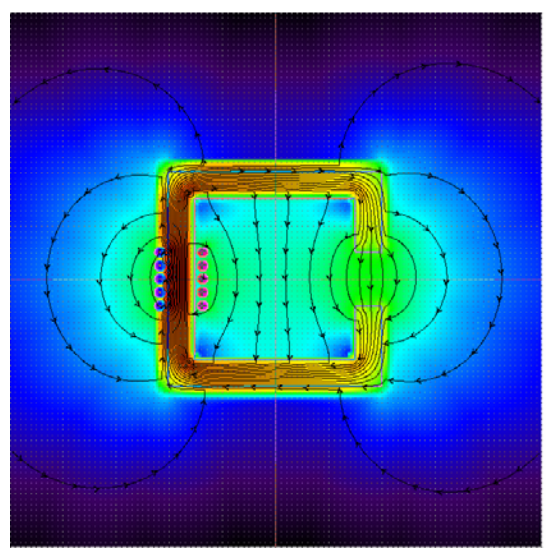
Figura 4. Magnitud de campo

Los valores de la magnitud de flujo en el corte A-A que se muestra en la figura 2 se presentan en la figura 5 en

[1] Referirse a la versión en línea de este documento.

donde se observa como el campo presenta una mayor intensidad dentro de la estructura magnética.

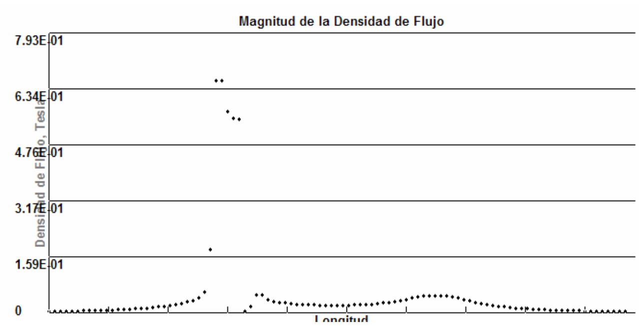

Figura 5. Magnitud de la densidad de flujo magnético $\left|B\right|$ (Tesla). Campo Vs Longitud

Los valores de la magnitud de la fuerza magnética se ilustran en la figura 6

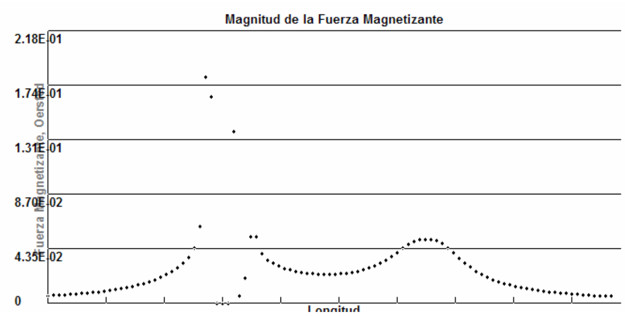

Figura 6. Magnitud de la Fuerza Magnética $\left|H\right|$ (Oersted). Intensidad de Campo Vs Longitud

Haciendo uso de los archivos con los valores de magnitud de campo calculados para cada uno de los puntos, se pueden utilizar programas como Matlab™ para realizar cálculos posteriores.

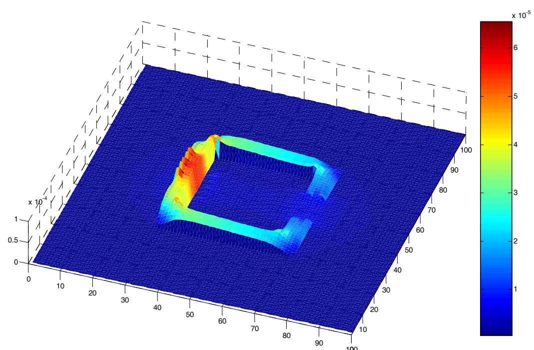

Figura 7. Reconstrucción del gráfico utilizando Matlab™

4. CONCLUSIONES

Se muestra como la técnica numérica de los elementos finitos, que inicialmente nació como una metodología para el cálculo del esfuerzo sobre materiales, puede ser adaptada para resolver problemas de campo dentro de un material magnético.

Una de las principales ventajas del método de los elementos finitos es que permite realizar cálculos en geometrías asimétricas y en espacios dimensionales superiores para las cuales sería muy complicado hacer cálculos manuales.

Herramientas de software como ANSYS, ALGOR, GID, SOFEA, OpenFEA, entre otras, son útiles para modelar materiales magnéticos que se encuentran en medio de campos. Ellos permiten modelar diferentes topologías y distribuciones.

Este método puede ser utilizado en el diseño de antenas para dispositivos móviles u otros tipos de elementos sometidos a radiaciones electromagnéticas como jaulas de apantallamiento de dispositivos médicos, equipos de laboratorio, etc.

5. RECOMENDACIONES

La presición del método depende del número de puntos de la grilla o del número de nodos empleados para obtener la solución, pero se debe de tener en cuenta que al aumentar el número de puntos se aumenta el tiempo de procesamiento de los datos.

Se propone para trabajos futuros el estudio de determinación de pérdidas y optimización en el dimensionamiento de las máquinas eléctricas mediante el método propuesto.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] RONCANCIO, Educardo. Teoría de los Elementos Finitos Introducción Aplicados en una y dos Dimensiones, Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ingeniería Mecánica, 2003.

[2] LOGAN, Daril L. A First Course in the Finite Element Method, Third edition, University of Wisconsin, 2000.

[3] SILVESTER, P. P., FERRARI, R. L., Elementos Finitos para Ingeniería Eléctrica, Primera edición, 1989.

[4] VOLAKIS, John, Finite Element Method for Electromagnetics, IEEE PRESS, 1996.

[5] SALON, Sheppard J., Finite Element Analysis of Electrical Machines, Kluwer Academic Publishers, New York, 1995.

[6] JIN, Jianming, The Finite Element Method in Electromagnetics, John Wiley & Sons INC, Michigan, 1993.