

## ANÁLISIS CINETOESTÁTICO DE UN MECANISMO ARTICULADO Y UN ENGRANAJE NO CIRCULAR CINEMÁTICAMENTE EQUIVALENTES

### RESUMEN

En multitud de aplicaciones es de interés diseñar mecanismos con relación de transmisión variable a lo largo de una vuelta del eslabón conductor. Ésta se puede obtener con diferentes mecanismos, entre ellos los engranajes no circulares. En este trabajo se comparan la fluctuación del par motor y la fuerza transmitida al chasis en un engranaje no circular y en un mecanismo articulado con igual ley de desplazamiento y bajo similares condiciones de operación.

**PALABRAS CLAVES:** Engranajes no circulares, fluctuación del par motor, fuerzas transmitidas al chasis.

### ABSTRACT

*There are many applications where non-uniform rotation transmission mechanisms, throughout of a rotation period of the driving link, are required. Noncircular gears wheels can be used to produce this kind of non-constant transmission ratio. A comparison of the torque fluctuations and the transmitted forces to chassis produced by a linkage mechanism and by a noncircular gear, with the same displacement law and identical operation conditions, are shown in this paper.*

**KEYWORDS:** *Noncircular gears ,torque fluctuation, chassis transmitted forces.*

### 1. INTRODUCCIÓN

En multitud de aplicaciones, es de interés diseñar mecanismos con relación de transmisión variable. Ésta puede obtenerse mediante diversos mecanismos, entre ellos los engranajes no circulares. Éstos permiten la obtención de cualquier ley de transmisión variable, siempre que se cumplan las condiciones adecuadas de continuidad, de periodicidad y de curvatura exigidas a las curvas primitivas de las ruedas. La libertad de elegir libremente las curvas primitivas, como ocurre con el perfil de la leva en los mecanismos leva palpador, permite la definición continua de la ley de transmisión, sin que ésta esté restringida por unos pocos puntos de precisión, como ocurre en los mecanismos articulados.

En el diseño de un mecanismo se debe prestar atención a la interfase entre el mecanismo y el bastidor. Cuando un eslabón está en movimiento, transmite fuerzas a su alrededor. Si este eslabón está desbalanceado, sus fuerzas de inercia contribuyen a la generación de vibraciones, ruido, desgaste y, por lo tanto, problemas de fatiga. Si un mecanismo es balanceado completamente, la suma vectorial de las fuerzas de inercia que actúan sobre la estructura es cero. En un mecanismo articulado, se puede reducir el efecto de estas fuerzas, mas no eliminar completamente, debido a la existencia de eslabones que se mueven sin tener un apoyo fijo; un engranaje no circular puede ser fácilmente balanceado. Con la intención de comprobar las ventajas de los engranajes no circulares frente a los mecanismos articulados, en relación a las fuerzas transmitidas al bastidor, se diseñan

### HÉCTOR FABIO QUINTERO R.

Ingeniero Mecánico, M. Sc.  
Profesor Asociado  
Universidad Tecnológica de Pereira  
hquinte@utp.edu.co

### SALVADOR CARDONA FOIX

Ingeniero Mecánico, Dr.  
Profesor Catedrático  
Universitat Politècnica de Catalunya  
salvador.cardona@upc.edu

### LLUÏSA JORDI NEBOT

Licenciada en Ciencias Físicas, Dra.  
Profesora Titular  
Universitat Politècnica de Catalunya  
lluïsa.jordi@upc.edu

ambos mecanismos de tal forma que tengan la misma relación de transmisión.

### 2. CURVAS PRIMITIVAS DE LOS ENGRANAJES NO CIRCULARES

Considérense dos ruedas dentadas (sus curvas primitivas se presentan en la figura 1) que giran en direcciones opuestas sobre su respectivo centro de rotación  $O_1$  y  $O_2$ . Las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida se definen, respectivamente, en los sistemas coordenados  $O_1X_1Y_1$  y  $O_2X_2Y_2$ , que son fijos a las ruedas dentadas 1 y 2;  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son, respectivamente, las coordenadas geométricas de los eslabones conductor y conducido; la distancia entre centros,  $d$ , es un parámetro conocido. En este trabajo, *la ley de desplazamiento*,  $f$ , se define como la función que relaciona la posición angular del elemento conducido,  $\varphi_2$ , con la correspondiente posición angular del elemento conductor,  $\varphi_1$ .

$$\varphi_2 = f(\varphi_1) \quad (1)$$

De acuerdo a la figura 1, se obtiene la siguiente expresión:

$$r_1(\varphi_1) + r_2(\varphi_1) = d \quad (2)$$

Las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida se representan, respectivamente en los sistemas coordenados  $\{O_1X_1Y_1\}$  y  $\{O_2X_2Y_2\}$ , mediante las siguientes expresiones:

$$r_1 = r_1(\varphi_1) e^{j\theta_1(\varphi_1)}, \theta_1(\varphi_1) = -\varphi_1 \quad (3)$$

$$r_2 = r_2(\varphi_1) e^{j\theta_2(\varphi_1)}, \theta_2(\varphi_1) = \pi + f(\varphi_1) \quad (4)$$

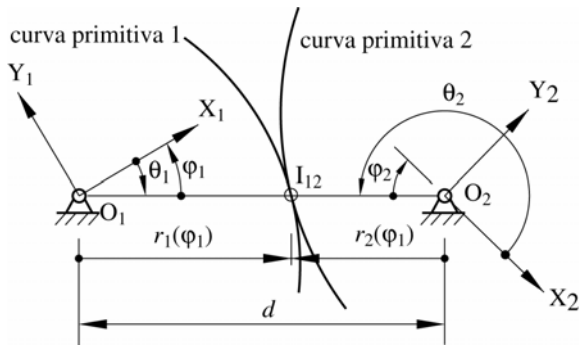


Figura 1. Sistemas coordenados

Los radios de las curvas primitivas se obtienen de la condición de rodadura sin deslizamiento de las ruedas alrededor de su punto de contacto, centro instantáneo de rotación relativo,  $I_{12}$ , que está localizado sobre la línea de centros entre ambas ruedas. Las expresiones para los radios son [1]:

$$r_1(\varphi_1) = \frac{f'(\varphi_1)}{1 + f'(\varphi_1)} d, \quad r_2(\varphi_1) = \frac{1}{1 + f'(\varphi_1)} d \quad (5)$$

El signo ' representa la derivada con respecto a  $\varphi_1$ . La velocidad y aceleración angular de la rueda conducida, considerando  $\omega_1$  constante, se obtienen al derivar la ley de desplazamiento con respecto al tiempo y aplicar la regla de la cadena:

$$\omega_2(\varphi_1) = f'(\varphi_1)\omega_1, \quad \alpha_2(\varphi_1) = f''(\varphi_1)\omega_1^2 \quad (6)$$

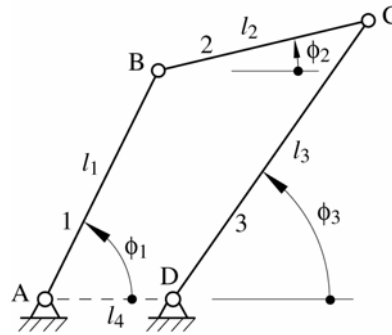
### 3. DISEÑO DEL MECANISMO ARTICULADO Y ENGRANAJE NO CIRCULAR

#### 3.1 Mecanismo articulado

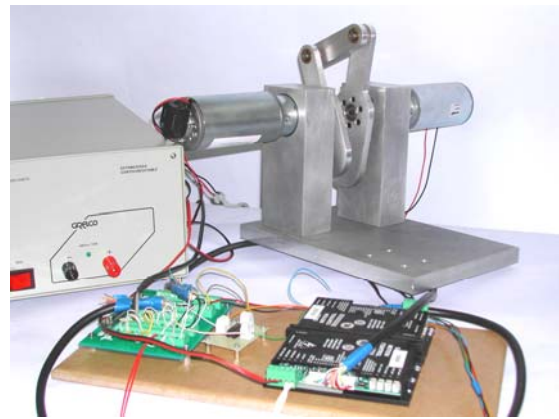
En la figura 2.a se muestra un mecanismo de doble manivela donde el eslabón 1 es la manivela, el eslabón 2 es el acoplador, el eslabón 3 representa la contramanivela y 4 representa al bastidor. Para satisfacer la condición de Grasshof de un mecanismo de doble manivela [2], se eligieron las siguientes dimensiones del mecanismo articulado:  $l_1 = 75$  mm,  $l_2 = 75$  mm;  $l_3 = 100$  mm;  $l_4 = 25$  mm. En la figura 2.b se presenta el mecanismo articulado con el montaje requerido para la fase experimental.

El vector  $q = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T$  es el vector de coordenadas generalizadas del mecanismo articulado y proporciona la configuración del mecanismo. La ecuación vectorial de enlace,  $f(q)=0$ , es el conjunto de ecuaciones que imponen las restricciones geométricas del mecanismo articulado:

$$\begin{aligned} f_1(q) &= l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2 - l_3 \cos \phi_3 - l_4 = 0 \\ f_2(q) &= l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2 - l_3 \sin \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$



a) representación esquemática



b) montaje del mecanismo articulado

Figura 2. Mecanismo articulado

El vector  $q$  usualmente se divide en un vector de coordenadas independientes  $\{q_i\} = \{\phi_1\}$  y en un vector de coordenadas dependientes  $\{q_d\} = \{\phi_2, \phi_3\}^T$ . La posición angular del eslabón conducido,  $\phi_3$ , en función de la posición angular del eslabón conductor,  $\phi_1$ , se obtiene mediante la expresión (8) [3]:

$$\tan \frac{\phi_3}{2} = \frac{2 \sin \phi_1 \pm \sqrt{(2 \sin \phi_1)^2 - 4AC}}{2A} \quad (8)$$

En la Ec.(8) A y C dependen de los parámetros  $c_1, c_3$  y  $c_4$  que son relaciones adimensionales de las longitudes de los eslabones del mecanismo articulado:

$$A = -c_1 + c_4 + \cos \phi_1 (1 - c_3), \quad C = c_1 + c_4 - \cos \phi_1 (1 + c_3)$$

$$c_1 = l_4 / l_1; c_3 = l_4 / l_3; c_4 = (l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2) / (2l_1 l_3)$$

Los análisis de velocidad y aceleración se obtienen después de derivar el sistema de ecuaciones de enlace con respecto al tiempo. En la figura 3 se representan la posición, velocidad y aceleración angular del eslabón 3 en función de la posición angular del eslabón 1,

asumiendo que la velocidad angular de la manivela es constante e igual a  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ .

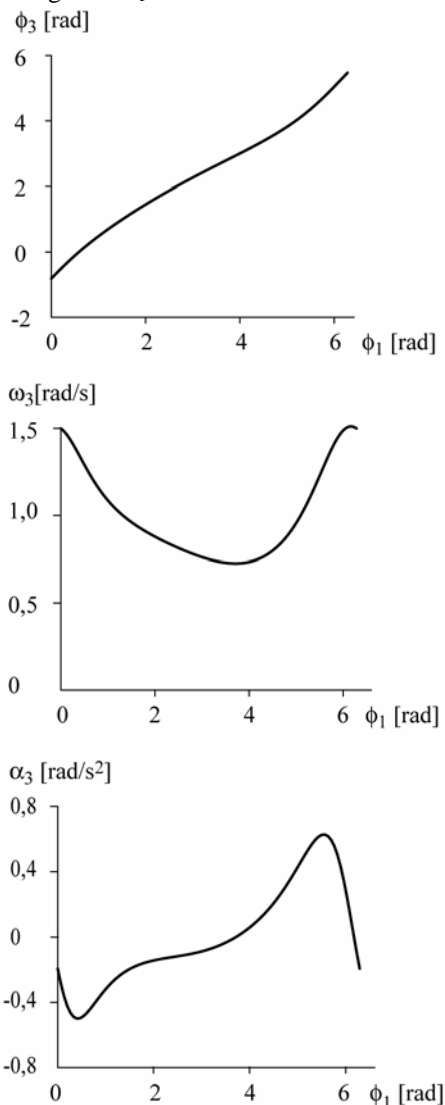


Figura 3. Posición, velocidad y aceleración angular del eslabón 3 del mecanismo articulado

Para balancear al mecanismo articulado se utilizó el método de los vectores linealmente independientes descrito ampliamente en [3,4].

**3.2 Engranaje no circular**

A partir de las curvas de posición, velocidad y aceleración angular del eslabón conducido del mecanismo articulado, figura 3, se diseña la ley de desplazamiento del engranaje no circular; este diseño se realiza tal que los eslabones conducidos de ambos mecanismos tengan similar comportamiento bajo las mismas condiciones cinemáticas del eslabón conductor, aunque los eslabones conducidos de ambos mecanismos giran en sentido contrario.

A pesar de tener solución analítica para la ley de desplazamiento del mecanismo articulado, tal como se

pone de manifiesto en la Ec. (8), en este trabajo se decidió tomar una curva de Bézier que la aproxime. Las ordenadas de los puntos de control de la curva de Bézier, que definen la ley de desplazamiento, se obtienen mediante un proceso de optimización, basado en los algoritmos genéticos, que minimiza una función objetivo; en [5] se presenta un estudio completo de los algoritmos genéticos. La función objetivo se define, en este caso, como la suma de: i) el valor absoluto de la diferencia entre la ley de desplazamiento del mecanismo articulado y del engranaje no circular evaluadas en un conjunto de ángulos de giro del eslabón conductor, ii) el valor absoluto de la diferencia entre la primera derivada de la ley de desplazamiento de ambos mecanismos evaluadas en el conjunto de ángulos y iii) el valor absoluto de la diferencia entre la segunda derivada de la ley de desplazamiento de ambos mecanismos evaluadas en el conjunto de ángulos.

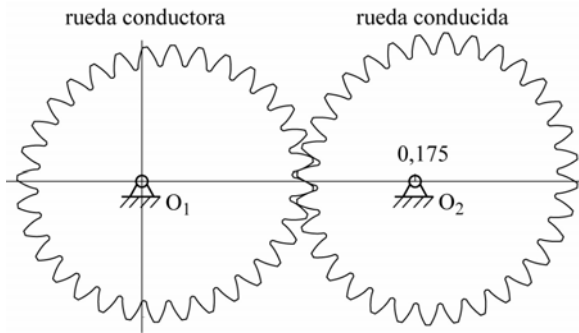
En el diseño de la ley de desplazamiento, se elige una curva de Bézier de grado 15 y continuidad  $C^3$  con lo que se obtiene el grado de continuidad adecuado para este tipo de aplicaciones. Las características de la curva de Bézier, cuando se utilizan para el diseño de la ley de desplazamiento de un engranaje no circular, se presentan en un trabajo previo de los autores de este artículo [6]. La ley de desplazamiento del engranaje no circular, por lo tanto, requiere de 16 puntos de control para su completa definición; las abscisas de los puntos de control están uniformemente distribuidos en el intervalo  $\phi_1 = \{0, 2\pi\}$ .

De acuerdo con las propiedades de las curvas de Bézier, las primeras y últimas 3 ordenadas del vector de ordenadas deben satisfacer los valores de la ley de desplazamiento, de la velocidad y aceleración del eslabón conducido en  $\phi_1 = 0 \text{ rad}$  y en  $\phi_1 = 2\pi \text{ rad}$ ; estos valores se obtienen del análisis cinemático del mecanismo articulado, figura 3. La satisfacción adicional del grado de continuidad  $C^3$  de la ley de desplazamiento depende de las ordenadas 4ª y 13ª; de esta forma se puede elegir arbitrariamente la 13ª ordenada y calcular la 4ª ordenada para satisfacer el grado de continuidad elegido. Por lo tanto, 7 de las 16 ordenadas, las primeras 4 y las últimas 3, son valores conocidos o dependientes. Las restantes 9 son los genes de cada uno de los individuos que conforman la población en el proceso de optimización basado en los algoritmos genéticos y conforman el conjunto de ordenadas de diseño de la ley de desplazamiento del engranaje no circular. El vector de ordenadas de los puntos de control de la curva de Bézier que se obtiene es:

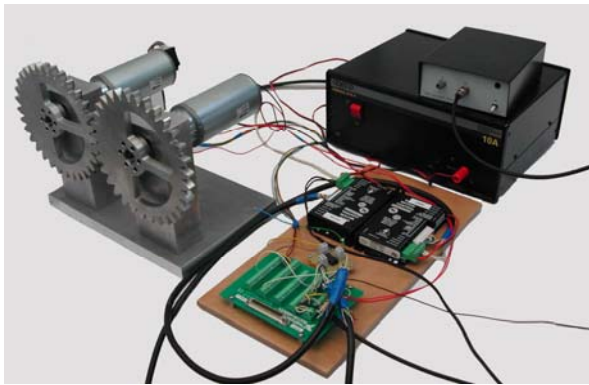
$$\{b_i\} = \{0, 0, 1, 0, 194, 0, 261, 0, 297, 0, 433, 0, 351, 0, 584, 0, 466, 0, 612, 0, 612, 0, 687, 0, 705, 0, 794, 0, 9, 1\} 2\pi$$

En la figura 4 se presenta un esquema de los engranajes no circulares que satisfacen la ley de desplazamiento requerida, así como el montaje de los engranajes no circulares para la fase experimental. El número de dientes

de las ruedas dentadas es de 32, la distancia entre centros es  $d = 175$  mm y el ángulo de presión de la cremallera en el proceso de diseño es de  $25^\circ$ . La manufactura de la rueda se realizó en un centro de mecanizado CNC.



a) ruedas dentadas



b) montaje del engranaje no circular

Figura 4. Engranaje no circular

#### 4. DINAMICA DEL MECANISMO ARTICULADO Y DEL ENGRANAJE NO CIRCULAR

##### 4.1 Mecanismo articulado

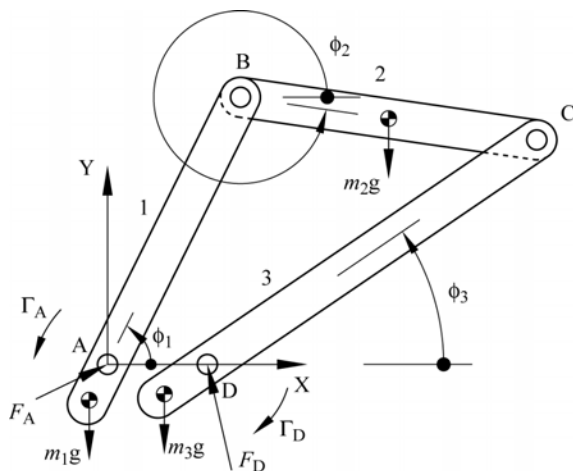


Figura 5. Fuerzas sobre el mecanismo articulado

En la figura 5 se representan las fuerzas y pares externos que actúan sobre el mecanismo articulado. El par  $\Gamma_D$  es el

par en el eje del eslabón conducido,  $\Gamma_A$  es el par requerido en el eje del eslabón conductor. Las fuerzas  $F_A$  y  $F_D$  son las fuerzas transmitidas por el bastidor al mecanismo; por el principio de acción y reacción, el mecanismo articulado transmite al bastidor una fuerza igual y de sentido contrario.

##### 4.2 Engranaje no circular

En la figura 6 se representan las fuerzas  $F_A$  y  $F_D$  y los pares  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_D$  que tienen el mismo significado que en el caso del mecanismo articulado.

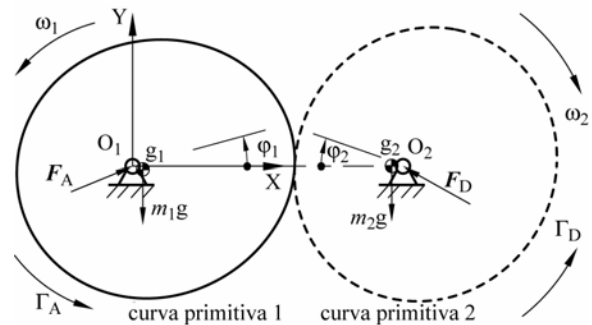


Figura 6. Fuerzas y pares sobre el engranaje no circular

##### 4.3 Resultados

El análisis dinámico se realiza considerando una velocidad angular constante en el eje del eslabón conductor,  $\omega_1 = 6,15$  rad/s, y un par constante en el eje del eslabón conducido,  $\Gamma_D = 2,3$  N m. En la tabla 1, se resumen los valores medios y los valores eficaces de las componentes oscilatorias del par requerido en el eje del eslabón conductor y de las fuerzas transmitidas al bastidor. En la figura 7 se tiene la representación polar de las fuerzas transmitidas en los apoyos fijos por ambos mecanismos. El orden de magnitud de las fuerzas transmitidas por las ruedas dentadas es similar al las del mecanismo articulado aunque la variación de sus componentes es menor.

En un engranaje no circular la fuerza de contacto entre los dientes pasa por el centro instantáneo de rotación relativo entre las ruedas dentadas, ubicado sobre la línea de centros; su dirección se obtiene al girar al vector tangente en el centro instantáneo de rotación relativo, en sentido antihorario un ángulo igual al ángulo de presión de la cremallera. Por ello, las variaciones en magnitud y dirección de la fuerza transmitida son pequeñas.

En un mecanismo articulado, durante un periodo de rotación del eslabón conductor, la alta variación de los ángulos relativos entre sus eslabones y el movimiento rotativo de los puntos de aplicación de las fuerzas transmitidas entre los eslabones, pares B y C de la figura 5, conllevan a que las fuerzas transmitidas por el mecanismo al bastidor presenten una alta variación y por lo tanto, generan una mayor vibración y mayores esfuerzos de fatiga sobre los pivotes fijos.

		Engranaje no circular		Mecanismo articulado	
		Valor medio	Valor eficaz	Valor medio	Valor eficaz
$\Gamma_A$ [N m]		2,3	0,82	2,3	0,83
Fuerza en el eje conductor	$ F_A $ [N]	33,42	5,19	32,14	12,96
	$F_{A,x}$ [N]	-12,46	6,17	4,95	32,98
	$F_{A,y}$ [N]	-30,82	4,36	-2,40	32,96
Fuerza en el eje conducido	$ F_D $ [N]	25,40	5,45	32,98	7,99
	$F_{D,x}$ [N]	12,46	6,21	-4,94	32,98
	$F_{D,y}$ [N]	21,81	4,35	-3,00	32,95

Tabla 1 Variación de la fuerza transmitida y del par requerido en el eje conductor

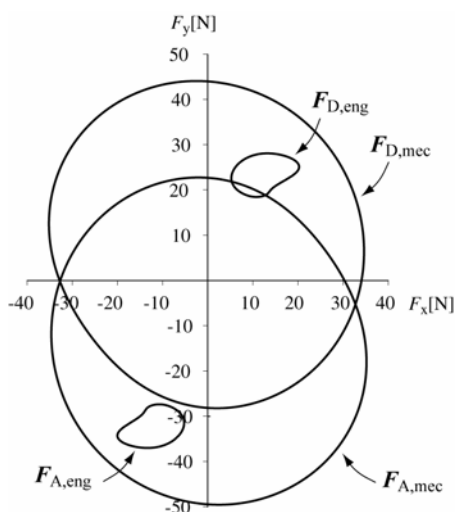


Figura 7. Representación polar de la fuerza transmitida al bastidor

### 5. VERIFICACIÓN DEL PAR

Con el propósito de verificar el modelo, se realiza un ensayo en el que se utilizan dos motores de corriente continua, uno en cada eje del mecanismo. En el eje del eslabón conductor se instala un motor alimentado con tensión constante mediante un controlador industrial; este motor tiene acoplado un encoder incremental con el que obtiene, una vez procesada la señal del encoder, la velocidad angular del eslabón motor. El controlador entrega una señal de tensión proporcional a la intensidad en el devanado del motor; de esta forma y conocida la constante del par del motor, se calcula el par en el eje del motor. En el eje del eslabón conducido se instala el otro motor alimentado con intensidad constante mediante un segundo controlador; con fines de diferenciar ambos motores, al motor del eje conducido se le denominará de ahora en adelante freno ya que el par que aplica este motor frena al mecanismo. Con este montaje, y con el procesamiento de las señales de los controladores y del encoder, se obtienen el par en cada eje y la velocidad y aceleración angular del eslabón conductor. Del análisis cinemático, en ambos mecanismos, se obtienen la velocidad y aceleración angular del eslabón conducido. La adquisición de datos se realiza mediante una tarjeta de

adquisición de datos de 16 bits con una frecuencia de muestreo de 200 Hz.

### 5.1 Análisis cinetoestático

En la figura 8 se representa la configuración general del sistema motor-mecanismo-freno. Si el análisis se realiza para el mecanismo articulado, las propiedades que intervienen en el elemento *mecanismo*, son los momentos de inercia respecto al centro de masas, la masa y la posición del centro de masas de los eslabones del mecanismo articulado. En el engranaje no circular se toman los momentos de inercia de la rueda conductora y conducida respecto a su respectivo centro de rotación.

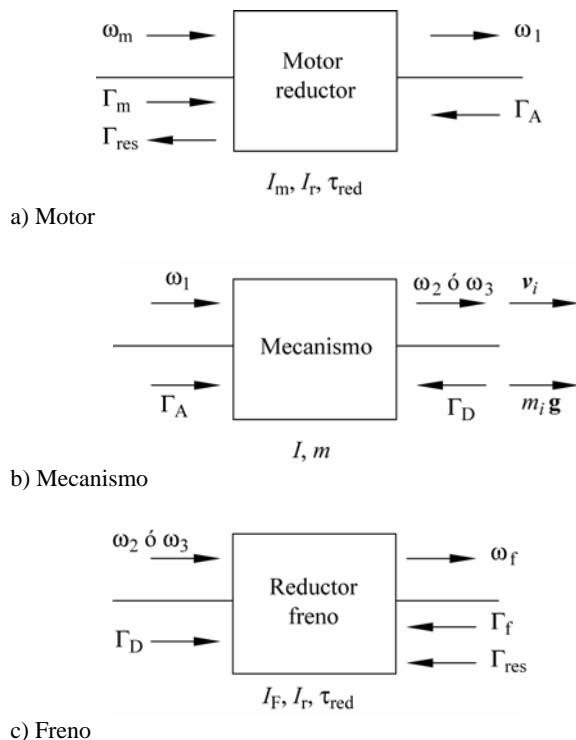


Figura 8. Potencia en el sistema motor-mecanismo-freno

El par  $\Gamma_m$  es el par que se obtiene en el eje del motor,  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_D$  son los pares que actúan, respectivamente, en el eje del eslabón conductor y conducido,  $\Gamma_{res}$  es el par debido a las resistencias pasivas en el conjunto motor reductor,  $\Gamma_f$  es el par en el eje del freno, con  $g = -9,81$  I. La velocidad angular del eslabón conducido en el engranaje no circular es  $\omega_2$  y en el caso del mecanismo articulado es  $\omega_3$ .

Los pares que se transmiten entre los elementos del sistema se obtienen mediante el análisis de potencia en cada uno de los elementos del sistema [3]:

$$\frac{d}{dt} E_C = P \tag{10}$$

donde  $E_C$  es la energía cinética total del elemento que se analiza y  $P$  es la potencia resultante de los pares y fuerzas

que actúan sobre el elemento. Del análisis de la potencia en cada uno de los componentes del sistema, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\Gamma_m = \Gamma_A / \tau_{red} + \Gamma_{res,m} + I_m \alpha_1 / \tau_{red} \quad (11)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_D \tau + (I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 \tau) - (m_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{g1} + m_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{g2}) / \omega_1$$

$$\Gamma_A = \Gamma_D \omega_2 / \omega_1 + [(I_1 \omega_1 \alpha_1 + I_2 \omega_2 \alpha_2 + I_3 \omega_3 \alpha_3)] / \omega_1$$

$$+ [(m_1 \mathbf{v}_{g1} \cdot \mathbf{a}_{g1} + m_2 \mathbf{v}_{g2} \cdot \mathbf{a}_{g2} + m_3 \mathbf{v}_{g3} \cdot \mathbf{a}_{g3})] / \omega_1$$

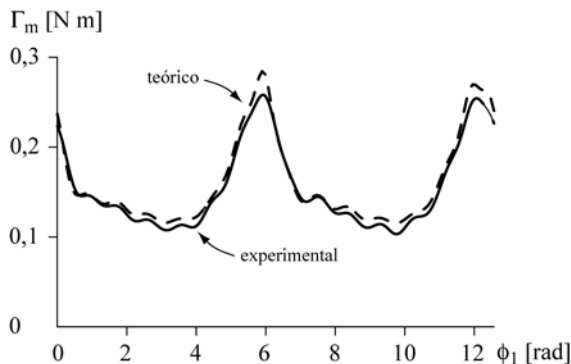
$$- (m_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{g1} + m_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{g2} + m_3 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{g3}) / \omega_1 \quad (12)$$

$$\Gamma_D = \Gamma_f / \tau_{red} - \Gamma_{res} / \tau_{red} - I_F \alpha_2 / \tau_{red}^2 \quad (13)$$

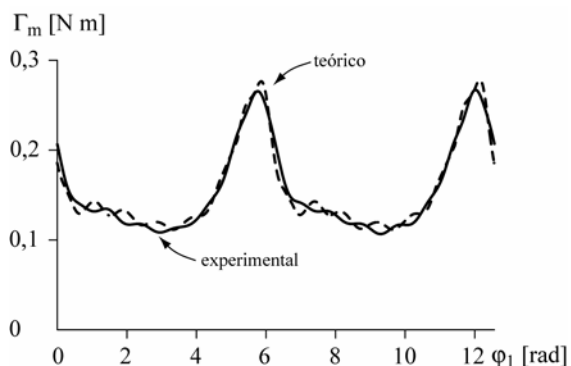
La primera expresión de la Ec. (12) se utiliza en el caso del engranaje no circular, en el caso del mecanismo articulado se utiliza la segunda expresión.

## 5.2 Resultados

En la figura 9 se presentan las comparaciones entre el par requerido en el motor del modelo teórico y el obtenido en la fase experimental, para el ensayo con el mecanismo articulado y con el engranaje no circular.



a) mecanismo articulado



b) engranaje no circular

Figura 9. Comparación del par motor teórico y experimental

El par del modelo teórico se obtiene al procesar el par del freno y la velocidad angular del motor, obtenidos en el ensayo experimental, mediante las Ecs. (11, 12 y 13) en

combinación con la cinemática del mecanismo; el par de la fase experimental se obtiene al multiplicar por la constante de par del motor a la intensidad del motor obtenida del ensayo experimental,

En el mecanismo articulado, los resultados que se presentan en la figura 8.a se corresponden con una velocidad angular del motor nominalmente constante e igual a  $\omega_m = 6,14$  rad/s y un par en el freno nominalmente constante e igual a  $\Gamma_f = 0,0861$  N m. En el engranaje no circular, figura 8.b, se corresponden con una velocidad angular del motor nominalmente constante e igual a  $\omega_m = 6,21$  rad/s y un par en el freno nominalmente constante e igual a  $\Gamma_f = 0,0832$  N m.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo con los resultados teóricos, la componente oscilante de las fuerzas transmitidas por el mecanismo articulado al bastidor es de mayor valor eficaz que la componente oscilante de las fuerzas transmitidas por el engranaje no circular. La menor variación de las fuerzas transmitidas, en dirección y magnitud, del engranaje no circular frente al mecanismo articulado, justifican estos resultados.

La bondad de las curvas de Bézier, en la definición de la ley de desplazamiento del engranaje no circular, y las ventajas de los algoritmos genéticos en el proceso de optimización se comprobaron al obtener una ley de desplazamiento idéntica a la del mecanismo articulado.

Los resultados experimentales del par en el motor, ponen de manifiesto la bondad del modelo planteado.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] CARDONA, Salvador, JORDI, Lluïsa. Aportación al Estudio de los Engranajes no Circulares, VI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Coimbra: Portugal, pp. 1291 – 1296, 2003.
- [2] MABIE, Hamilton. H., OCVRK, Fred W. Mechanisms and Dynamics of Machinery, 594 páginas, John Wiley and Sons, USA, 1975.
- [3] CARDONA, Salvador, CLOS, Daniel. Teoría de Máquinas, Ediciones UPC, 252 páginas, Barcelona, España, 2001.
- [4] ERDMAN, Arthur G., SANDOR, George N. Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis, vol 2, Prentice Hall, 685 páginas, USA, 1984.
- [5] GOLDBERG, David E. Genetic Algorithms: in Search, Optimization and Learning, Addison Wesley Publishing Company, 412 páginas, USA, 1989.
- [6] QUINTERO, Héctor F., CARDONA, Salvador, JORDI, Lluïsa. Estudio sobre las leyes de desplazamiento en los engranajes no circulares, Scientia et Technica, vol. 24, pp. 145 – 150, 2004.