Rodney Maddock
Centro de Investigaciones Económicas –CIE–
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Antioquia

¿Debemos tener confianza en los coeficientes de Gini?

Lecturas de Economía. No. 20. Medellín, mayo-agosto de 1986. pp. 139-152.

• **Resumen.** Existe una metodología [Blackorby y Donaldson (1978)] para investigar las propiedades éticas de índices que miden la desigualdad de una distribución de ingreso. Su aplicación sugiere que el índice de Gini no es igualitario y sufre otras características no deseables. Indices del tipo propuesto por Atkinson (1970) son más adecuados. Pueden ser calibrados para un nivel deseado de sensibilidad de desigualdad, penalizan más las redistribuciones contra los más pobres en situaciones de sustancial desigualdad y tienen implícitas curvas de indiferencia que son continuas. Un índice de esta clase, el de Shorrocks (1980), tiene otra característica adecuada: nos permite hacer una descomposición de la desigualdad total entre sus componentes.

• **Abstract.** *The methodology proposed by Blackorby and Donaldson (1978) allows one to investigate the ethical properties implicit in indices designed to measure distribution. Its application suggests that the Gini index is not especially egalitarian and suffers other deficiencies. Indices of the family proposed by Atkinson (1980) are more adequate. They can be calibrated to the desired level of sensitivity to inequality, they penalise more redistributions against the poor when the initial distribution is unequal, and imply smooth indifference curves. The index of this general class proposed recently by Shorrocks (1980) has the additional benefit that it allows inequality to be decomposed into its constituent parts in an additive way.*

Quiero agradecer a Pat Troy por la oportunidad que me brindó para presentar este trabajo en un seminario para el "Social Justice Projeect" de la Australian National University, a sus participantes por sus comentarios y a Carlos Esteban Posada Posada por su ayuda con la traducción al español.

I INTRODUCCION

Mi objetivo en este artículo es analizar las características de la medida más común de desigualdad: el coeficiente de Gini[1]. Muchos de los problemas que consideramos en Economía tienen un aspecto distributivo y actualmente, casi sin excepción, las consecuencias para la distribución son resumidas con la fórmula de Gini. Ejemplos de la literatura colombiana sobre el tema son: Córdoba, Sandoval y Rodríguez (1971), Urrutia y Berry (1975) y varias publicaciones del Departamento Administrativo Nacional de Estadística –DANE–. En todos estos casos el uso de una medida objetiva para resumir el tamaño de la desigualdad pretende establecer la objetividad del análisis. Esta impresión es falsa. Primero, tales medidas solamente pueden ofrecer un ordenamiento completo de distribuciones si implican la existencia de, y son basadas en, una función de bienestar social. Para presentar un cálculo del grado de desigualdad es obligatorio tomar, implícitamente, decisiones según una cierta concepción de bienestar social. Con esto en mente quiero

1. En la discusión nos referiremos a la distribución de ingresos, pero otros conceptos –como riqueza, utilidad, vivienda, etc.– pueden ser igualmente usados.

demostrar aquí que las características éticas implícitas en el coeficiente de Gini no están de acuerdo con los sentimientos igualitarios, algo subyacente en la literatura citada arriba.

Como es convencional con estadísticas de resumen, debo hacer varios supuestos. Las unidades de análisis son tomadas como comparables, es decir, son siempre individuos o siempre hogares y no varían durante la discusión. También las unidades son anónimas, en el sentido de que si la persona A tiene siete pesos y la persona B tiene tres, esto es exactamente equivalente al caso donde la persona B tiene siete pesos y la persona A tiene tres. Otra convención que quiero establecer aquí es que la totalidad del ingreso disponible está fijada y que las diferencias en la distribución de ingreso de hoy no tienen significación para las cantidades disponibles de ingreso en el futuro[2]. Tampoco hay interacciones entre la variable que medimos y otros elementos de bienestar total, o, si las hay, vamos a ignorarlas aquí. En una discusión más amplia de la desigualdad pueden ser consideradas, pero distraerían la argumentación de su objetivo básico que es el examen de las propiedades éticas de las estadísticas de resumen, como el coeficiente de Gini.

II. JUICIOS DE VALOR Y ORDENAMIENTO DISTRIBUCIONAL

Consideremos inicialmente el caso de la distribución de doce unidades de ingreso entre tres personas cuando nadie puede tener un ingreso negativo. Existe un número infinito de distribuciones que satisfacen esta condición entre la igualdad absoluta (cuatro unidades para cada una) y la desigualdad absoluta (doce unidades para alguien y nada para las otras dos). El problema de ordenar esta infinidad de distribuciones, de la más preferida (4, 4, 4: igualdad absoluta) a la menos preferida (12, 0, 0: desigualdad absoluta), requiere una serie de juicios éticos.

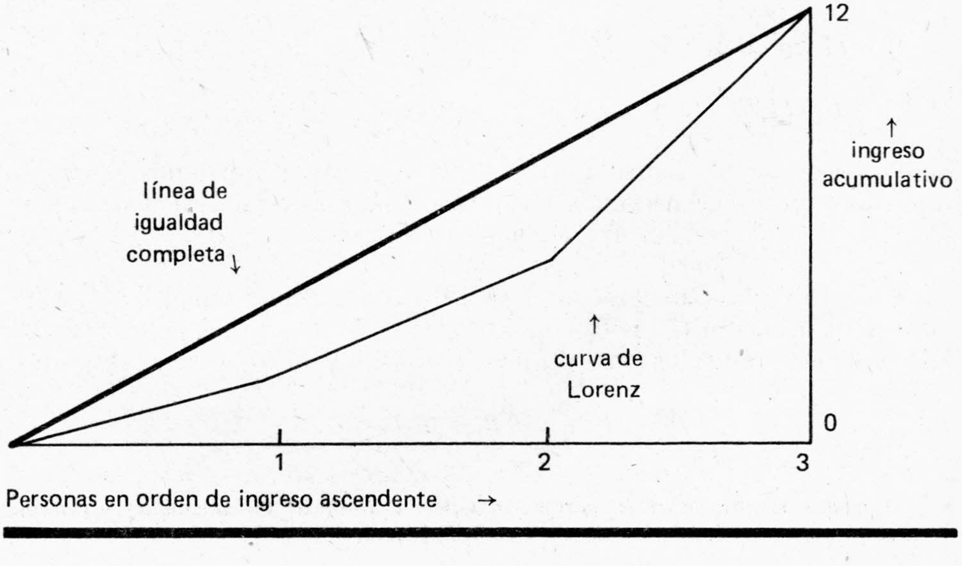
Algunos de los juicios son triviales. La distribución (9, 3, 0) es mejor (más igualitaria) que la (12, 0, 0) porque la persona más rica pierde dinero y gana alguien más pobre. Igualmente la distribución (8, 3, 1) es preferida a la (9, 3, 0) así como la distribución (9, 2, 1). En cada uno de estos casos existe una redistribución de la persona más rica a una de las dos más pobres. Pero hay posibilidades más complejas. ¿Ha mejorado la distribución si nos movemos de una distribución, (7, 4, 1) a la distribución (8, 2, 2)? En este caso la persona del medio de la distribución ha perdido dos unidades de ingreso en

2. Estos supuestos nos permiten evitar todos los problemas de la optimalidad de la distribución hoy para el nivel y la distribución del ingreso en el futuro y enfocar el análisis en cuestiones puras de medidas de distribución.

favor de alguien más rica y de alguien más pobre. Es igualmente problemático el caso inverso: si nos movemos de (8, 2, 2) a (7, 4, 1), ¿es preferible la nueva distribución? Aquí gana la del medio a costa de los extremos. En el discurso político hay tendencias de conservadores a preferir el primero de estos dos ejemplos –redistribución de la clase media en favor de ricos y pobres– y de liberales a preferir el inverso. En todo caso el objetivo del ejemplo es concretar algunos tipos de dificultades en nuestras evaluaciones de lo que es un mejoramiento en la distribución del ingreso.

Hay una medida estadística de resumen que incorpora exactamente los principios implícitos en el párrafo previo: la curva de Lorenz (mostrada en el Gráfico 1). Se representa en el eje horizontal el número de personas, ordenadas de la más pobre a la más rica; la cantidad de ingreso disponible en el eje vertical y la curva representa el ingreso acumulativo cuando nos movemos de la extrema pobreza al otro extremo. Si todo el ingreso es distribuido con igualdad total, la curva de Lorenz se identifica con la línea diagonal (indicada en el Gráfico 1), mientras que si una persona fuese a tener todo el ingreso la curva se identificaría primero con el eje horizontal y luego con el eje vertical en el extremo derecho. Entre estas curvas extremas están contenidas todas las distribuciones posibles. Pero después de dibujar una curva de

Gráfico 1 **La curva de Lorenz**



Lorenz para representar cualquier distribución de ingreso entre nuestras tres personas, tenemos que desarrollar una regla para distinguir entre las distribuciones más preferidas y las menos preferidas. La regla que más se utiliza tiene dos componentes: (i) no es posible comparar los casos en los cuales se cruzan las curvas de Lorenz, y (ii) una distribución se prefiere a otra si su curva de Lorenz está completamente por encima de la de la otra. Un breve análisis mostrará que lo anterior no es más que la regla según la cual las redistribuciones a costa de una persona rica en favor de alguien más pobre representan mejoramientos.

Debido a que este juicio está completamente de acuerdo con los valores de casi todos nosotros, se ha establecido como una base para el análisis de distribución, pero tiene una deficiencia grave: no es completo. Hay muchas redistribuciones que no podemos analizar con la regla anterior porque están sujetas a la cláusula (i): producen curvas de Lorenz que se cruzan entre sí. Autoridades en estos temas, como Sen (1973), han sugerido que "hay razones para creer que nuestra idea de desigualdad como una relación de orden puede ser inherentemente incompleta"[3], pero no alcanzan a sugerir que la falta de completez implícita en la regla asociada con la curva de Lorenz corresponde a este ordenamiento parcial que puede ser implícito en el concepto mismo.

La mayoría de los economistas que analizan problemas de distribución utiliza la medida de Gini que nos ofrece, a diferencia a la curva de Lorenz, un ordenamiento completo. Su fórmula es:

$$G = (1/2n^2\mu)\ \Sigma\ \Sigma\ |z_i - z_j|$$

$$= 1 + (1/n) - (2/n^2\mu)\ [z_1 + 2z_2 + 3z_3 + \ldots + nz_n]$$

donde los ingresos de individuos son los z_i y z_j, hay n individuos, el ingreso promedio es μ, y en la segunda fórmula los ingresos están ordenados como $z_1 > z_2 > z_3 > \ldots > z_n$ con z_1 como el del más rico.

Estas fórmulas parecen complejas pero son bastante sencillas. Consideremos la distribución (2, 1, 0) con $\mu = 1$ y $n = 3$. Basados en la primera fórmula formamos todos los pares posibles y sumamos sus diferencias absolutas:

$$|2-1| + |2-0| + |1-0| + |1-2| + |0-2| + |0-1| = 8$$

3. Mi traducción de *There are reasons to believe that our idea of inequality a ranking relation may indeed be inherently incomplete.* p. 5.

que dividimos por $(2n^2\mu) = 18$, que produce el coeficiente de Gini de 8/18.

En esta formulación el coeficiente tiene la ventaja intuitiva de que está basado en la comparición directa entre los ingresos de cada par de personas en la sociedad. Con la segunda formulación queda claro que el coeficiente de Gini no es más que un promedio ponderado de los ingresos con un incremento lineal en las ponderaciones –la persona más rica de la sociedad recibe el menor peso–. Así, tenemos:

$$G = 1 + (1/3) - (2/9)\,[(1 \times 2) + (2 \times 1) + (3 \times 0)] = 8/18.$$

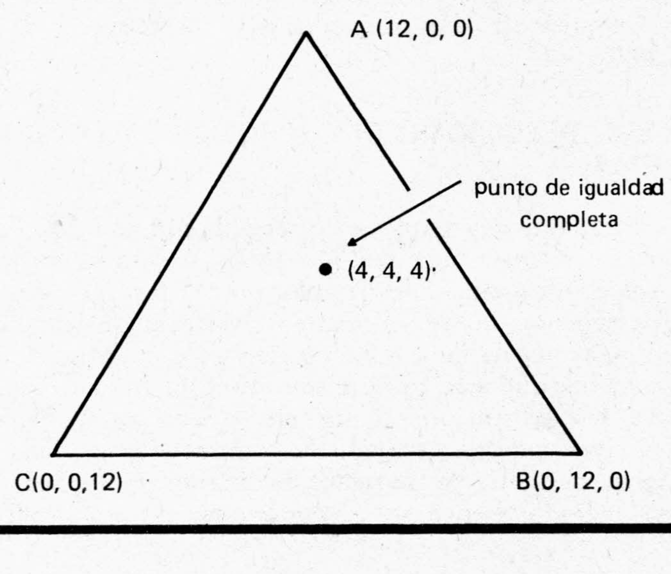
Pero si el coeficiente de Gini implica un orden que cubre todos los casos, ¿no tiene que tener implícitos unos juicios de valor más poderosos que los de la curva de Lorenz? Claro que sí, pero, ¿qué tan potente son?, y ¿cuáles son? Blackorby y Donaldson (1978) confirmaron recientemente una conjetura de Dalton (1920), según la cual debe existir una función de bienestar social implícita en cualquier medida completa de desigualdad. Cuando utilizamos el coeficiente de Gini para comparar situaciones con diferencias en la distribución del ingreso, no estamos utilizando una herramienta neutra sino una basada en el supuesto de que el bienestar social es una función específica, característica, de la serie de ingresos que analizamos. Blackorby y Donaldson (1978) han mostrado que, bajo supuestos razonables, cada índice completo de desigualdad tiene implícita una función de bienestar y que cada función de bienestar social puede ser utilizada para formar un índice de desigualdad. Este resultado nos permite analizar las características del coeficiente de Gini, o cualquier otro índice, mediante la consideración de su función de bienestar implícita.

III. PROPIEDADES ETICAS DEL COEFICIENTE DE GINI Y OTRAS MEDIDAS

Conocida la función de bienestar social implícita en un índice de distribución, podemos utilizar unos métodos estándares de análisis económico para revelar sus propiedades. Por ejemplo, con la función de utilidad de una persona, que depende de las cantidades de varios bienes de consumo, podemos derivar unas curvas de indiferencia que nos muestran todas las combinaciones de bienes que arrojan el mismo nivel de utilidad. También nos permite calcular las sustituciones marginales que el índice permite mientras mantiene el nivel dado de utilidad. En la misma forma, dada la función de bienestar social implícita en un índice de distribución (como el de Gini), podemos calcular las distribuciones de ingreso que resultan indiferentes, según el índice, y las sustituciones marginales entre los ingresos de los miembros de la sociedad que ésta estaría dispuesta a realizar sin modificación del índice.

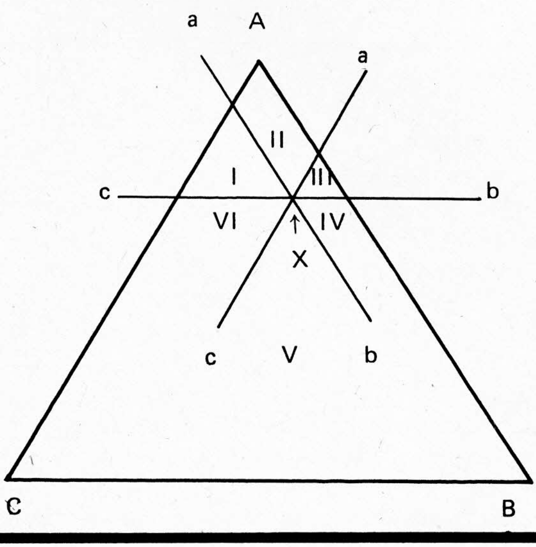
Para explicar las proposiciones anteriores utilizaré un nuevo gráfico (Gráfico 2). El incluye dentro del triángulo todas las distribuciones posibles de doce unidades de ingreso entre tres personas. El punto central representa el punto de igualdad absoluta (4, 4, 4); en el vértice A la distribución es (12, 0, 0): doce unidades de ingreso pertenecen a la persona A, B y C tienen cero. Definamos la distribución en el vértice B como (0, 12, 0) –siendo cero para A, doce para B, y cero para C– y en el vértice C la distribución (0, 0, 12). *De tal manera he cambiado la significación de expresiones como (7, 4, 1).* Ahora representa la primera posición el ingreso de A, la segunda de B, y la tercera de C, mientras anteriormente había escrito primero el ingreso de la más rica. Debe notarse que en el Gráfico 2 el ingreso de A es cero en todos puntos de la línea BC, es cuatro en todos los puntos que pasan por el punto central y son paralelos a BC, y llega a doce cuando estemos en A, es decir, el ingreso de A aumenta cuando nos movemos de BC hacia A. De la misma manera, B tiene ingreso cero en la línea AC y llega a doce en el punto B, y C tiene cero en AB y doce en C. La superficie ABC, de tal manera, incluye todas las combinaciones de doce unidades de ingreso distribuido entre tres personas, y están incluidas dentro del triángulo ABC todas las distribuciones que no tienen elementos negativos.

Gráfico 2 **La distribución de doce unidades de ingreso entre tres personas**



El Gráfico 2 está relacionado directamente con la curva de Lorenz. Por ejemplo, el triángulo contiene seis puntos –(7, 3, 2), (7, 2, 3), (3, 2, 7), (3, 7, 2), (2, 3, 7) y (2, 7, 3)– que producirían exactamente una misma curva de Lorenz. Consideremos el punto (7, 3, 2) (el punto *X* en el Gráfico 3). He trazado por el punto *X* las líneas ab paralela a AB, bc paralela a BC, y ac paralela a AC. Si nos alejamos un poco de *X* por encima de bc en la dirección de A, la persona más rica incrementa su ingreso, pero si nos trasladamos por debajo de BC éste se disminuye. El alejamiento de *X* por debajo de AC en la dirección de B aumenta el ingreso de la mediana en la distribución y por encima de AC los disminuye: y por el mismo análisis, un alejamiento de *X* por debajo de ab mejora el ingreso de la más pobre y por encima lo empeora.

Gráfico 3 **Cambios pequeños en la distribución (7, 3, 2)**



Si enumeramos las regiones alrededor de *X* como I hasta VI, podemos clasificar movimientos pequeños desde *X*, a tal como se presentan en el Gráfico 3 y en el Cuadro 1. En estos podemos ver que un movimiento hacia el interior de la región III resultaría en un aumento en el ingreso de A, la más rica, y de B, la intermedia, a costa de la pobre, C. De esto se deduce, obviamente, que la curva de Lorenz para este caso estaría por debajo de la curva de la distribución *X*. Es claro que las curvas de Lorenz para distribuciones que se alejen de *X* y pertenezcan a las regiones II y III estarían por debajo de la curva correspondiente a la distribución X que las curvas para distribuciones pertenecientes a V y VI estarían por encima, pero las curvas se cruzarían con desplazamientos desde X hacia las regiones I y IV.

Cuadro 1 **Cambios en los ingresos de A, B, C que resultan de pequeños alejamientos de X en el Gráfico 3**

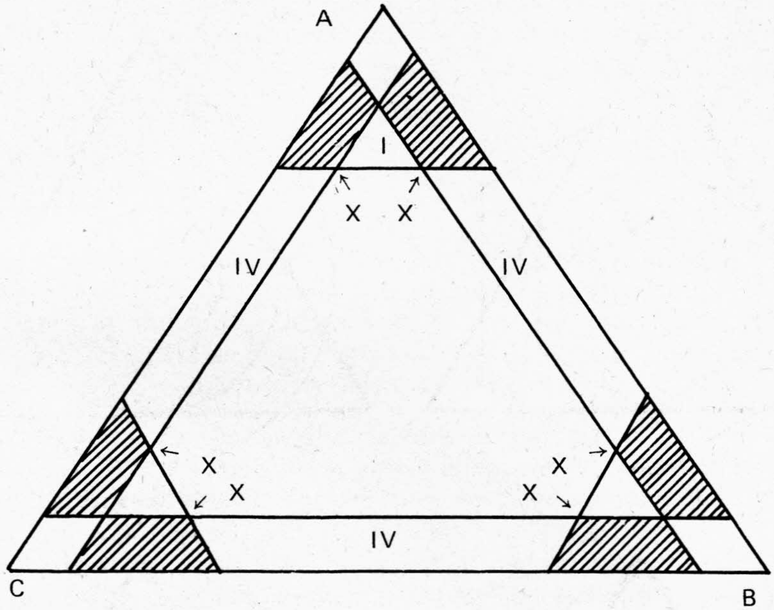
Región	Signo del cambio en el ingreso		
	A(7)	B(3)	C(2)
I	+	–	+
II	+	–	–
III	+	+	–
IV	–	+	–
V	–	+	+
VI	–	–	+

Así, el juicio ético asociado con la curva de Lorenz sugiere que los movimientos hacia las regiones V y VI son mejoras en la distribución, los movimientos hacia II y III implican empeoramientos, y que no es fácil clasificar los movimientos hacia I y IV. Si estamos de acuerdo con las propiedades éticas implícitas en la curva de Lorenz, nuestra actitud hacia un índice como el de Gini, que mide la desigualdad, depende de cómo se analizan casos ubicados en las regiones I y IV (es decir, casos donde las curvas de Lorenz se cruzan entre sí).

El Gráfico 4 presenta la situación con más generalidad. Hay seis puntos en el gráfico que representan la distribución de siete unidades a alguien, tres a otra, y dos a la tercera. Nuestro supuesto de anonimato requiere que cualquier medida de desigualdad sea indiferente entre esos puntos: una curva de indiferencia que pasa por uno tiene que pasar por los otros puntos. Distribuciones en las áreas con rayas son peores que las (seis) distribuciones X y las distribuciones en las áreas sombreadas son mejores. Los casos difíciles son indicados por I o IV según su categoría apropiada. Cuando nos alejamos de X hacia una región I, la persona rica y la pobre ganan a costa de la mediana; y de X hacia IV, la rica y la pobre pierden a favor de la mediana.

El Gráfico 5 presenta las curvas de indiferencia asociadas con varias medidas de desigualdad derivadas del método sugerido por Blackorby y Donaldson (1978). El gráfico tiene cuatro partes:

Gráfico 4 **Regiones donde las curvas de Lorenz se cruzarían entre sí**



(a) Curvas según el coeficiente de Gini,

(b) Curvas según el coeficiente de variación $CV = \Sigma (z_i - \mu)^2 / n\mu$,

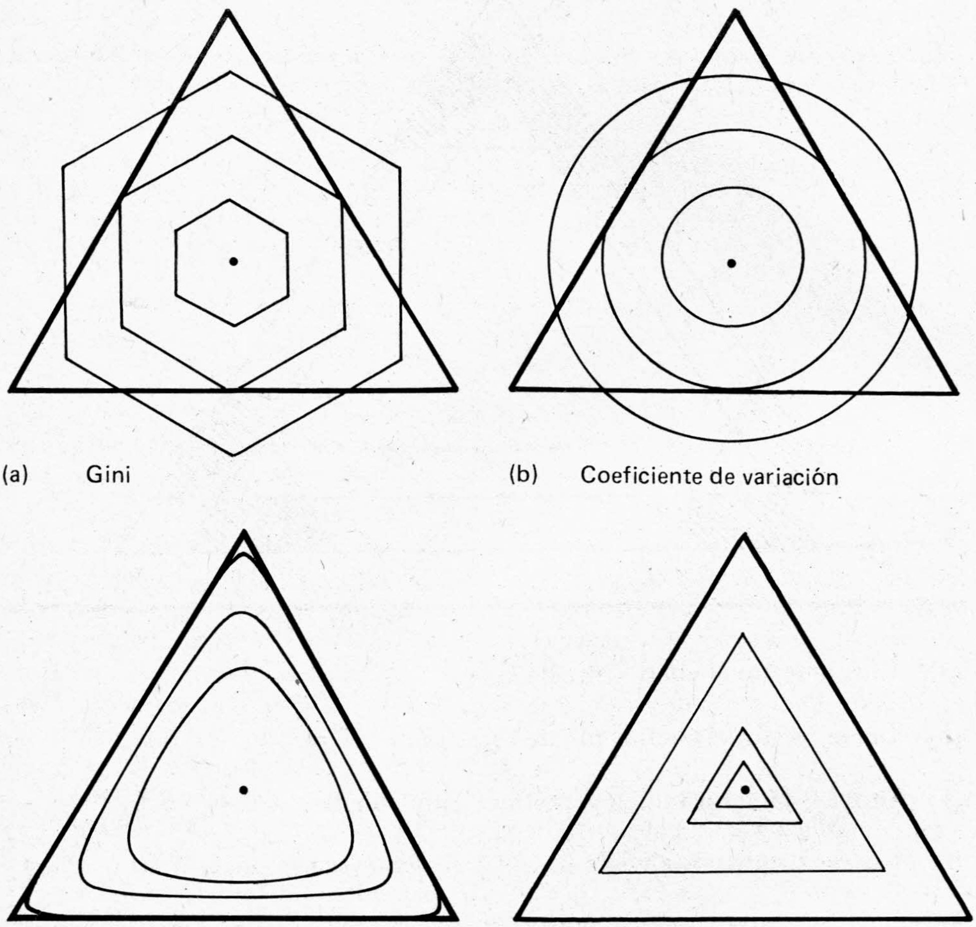
(c) Curvas según un índice del estilo Cobb-Douglas $CD = \pi(z_i/\mu)^{1/n}$,

(d) Curvas según el índice de Rawls[4] $R = \min[(nz_i/\mu)$, para todo $i]$.

Debemos recordar que los puntos pertenecientes a una curva de indiferencia son estimados por su índice como iguales; las curvas más cercanas al centro son mejores y las más lejanas peores. Todas satisfacen la condición de anonimato pero tienen perfiles completamente distintos con respecto a la división de las regiones I y IV.

4. John Rawls publicó su famoso libro *A Theory of Justice*, en 1971. Mantiene dos reglas como elementos fundamentales para la justicia en una sociedad: (a) cada persona debe tener el derecho a la misma cantidad de las libertades básicas, y (b) las desigualdades econímicas y sociales deben ser organizadas para maximizar el bienestar de los más pobres y para asegurar la igualdad de oportunidades.

Gráfico 5 **Curvas de indiferencia para varias medidas**



(a) Gini

(b) Coeficiente de variación

(c) Cobb-Douglas

(d) Rawls

Prefiero utilizar el índice de Rawls como un estándar. Es sencillamente una regla de "maximin" que establece que un cambio en la distribución es una mejora si el ingreso de la persona más pobre (el mínimo) se aumenta (es decir, tratamos de maximizar el mínimo).

Cualquier índice sería considerado como más rawlsiano que otro si sus curvas de indiferencia pasan más profundamente por las regiones I y más superficialmente por las regiones IV. Ni el coeficiente de Gini ni el coeficiente de variación tienen esta propiedad mientras que el Cobb-Douglas sí la tiene (por lo menos en parte –véase el argumento infra–). Si la sensibilidad ante la pobreza es una característica ética deseable en un índice, los de uso común no parecen adecuados: no tienen un sesgo igualitario.

Debemos notar que el índice de Cobb-Douglas es un caso especial del índice propuesto por Atkinson (1970) como un índice de igualdad:

$$A = [\Sigma (z_i/u)^{1-e} f(z_i)]^{1/1-e} ,$$

donde la selección del parámetro e nos deja cambiar la sensibilidad del índice a la pobreza. Con e significativamente mayor que cero tenemos un índice en el cual pesan mucho los ingresos de los pobres, y con $e=0$ el índice implica una función lineal de bienestar social. De tal manera podemos construir un índice con la sensibilidad a la pobreza que queramos.

Otro criterio que podemos considerar se asemeja a los efectos de escala en una función de producción. ¿Cambia la pendiente de las curvas de indiferencia cuando nos alejamos del punto de igualdad completa? De las figuras es claro que el índice de Gini no tiene esta propiedad, pero si la tiene el coeficiente Cobb-Douglas. Con el Gini y con el coeficiente de variación la pendiente de la curva de indiferencia a lo largo de cualquier rayo es siempre igual. Recuérdese que cuando nos alejamos del punto de igualdad aumenta la desigualdad de la distribución. Así, la implicación es que el índice de Cobb-Douglas se vuelve más sensitivo a la pobreza cuando mayor es el grado de ésta, pero el índice de Gini no tiene tal característica. Las curvas de indiferencia son casi circulares para el coeficiente de Cobb-Douglas cerca del punto de igualdad, pero son más triangulares si la distribución es muy desigual. Si hay gente muy pobre, redistribuciones entre los ricos no tienen mucho peso en este índice.

Para continuar nuestro ataque contra el coeficiente de Gini hay que observar las "esquinas" en las curvas de indiferencia. Estos ángulos se ubican en rayos del centro del simplex donde dos de las tres personas disfrutan de ingresos iguales. La conclusión que podemos obtener es que el Gini es muy sensible en puntos de la distribución donde existe un subconjunto de ingresos iguales y, por eso, hay cambios abruptos del índice para ciertas redistribuciones sin ninguna importancia ética.

Otra propiedad que es muy útil en un índice de distribución es la descomponibilidad aditiva, es decir, que se pueda calcular la contribución a la desigualdad total hecha por subconjuntos de la población de una manera consistente. El índice de desigualdad de Shorrocks (1980) es el siguiente:

$$S = [1/nc - 1)] \Sigma [z_i/u)^c - 1] \qquad c \neq 0, 1$$

ó, $$S = (1/n) \Sigma \ln (u/z_i) \qquad c = 0$$

donde "*c*" es un parámetro como el "*e*" de Atkinson para hacer el índice más o menos sensible a la desigualdad y por eso tiene un perfil de indiferencia como el Cobb-Douglas, que tiene esa característica. El interesado debe remitirse al artículo original, pero hay que notar que en muchas situaciones es muy útil poder investigar la fuente de la desigualdad. Nos permitiría decir, por ejemplo, cosas como la siguiente: el 60o/o de la desigualdad en la distribución del ingreso en Colombia resulta de la desigualdad de ingresos entre mujeres, el 20o/o de la desigualdad entre hombres y el otro 20o/o de la desigualdad de ingresos entre hombres y mujeres.

IV. CONCLUSION

Existe una metodología para investigar las propiedades éticas de índices que miden la desigualdad de una distribución de ingreso. Su aplicación sugiere que el índice de Gini no es igualitario, y sufre de otras características no deseables. Indices del tipo propuesto por Atkinson (1970) son más adecuados. Pueden ser calibrados para un nivel deseado de sensibilidad de desigualdad, penalizan más las redistribuciones contra los más pobres en situaciones de sustancial desigualdad y tienen implícitas curvas de indiferencia que son continuas. Un índice de esta clase, el de Shorrocks (1980), tiene otra característica adecuada: nos permite hacer una descomposición de la desigualdad total entre sus componentes.

BIBLIOGRAFIA

Atkinson, A. (1970). "On the Measurement of Inequality". *Journal of Economic Theory.* Vol. 2. pp. 240-263.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1978). "Measures of Relative Equality and their Meaning in Terms of Social Welfare". *Journal of Economic Theory.* Vol. 18. pp. 59-80.

Córdoba, P., C. Sandoval y M. Rodríguez (1971). "La Distribución de ingreso en Colombia" *Boletín Mensual de Estadística.* No. 237. pp. 55-95.

Dalton, H. (1920). "The measurement of inequalities of income". *Economic Journal.* Vol. 30. pp. 348-361.

Rawls, J. (1971). *A Theory of Justice.* Cambridge, Harvard University Press.

Sen, A. (1973). *On Economic Inequality.* Londres, Oxford University Press.

Shorrocks, A. (1980). "The Class of Additively Decomposable Inequality Measures". *Econométrica.* Vol. 48. pp. 613-625.

Urrutia, M. y A. Berry (1975). *La Distribución de ingreso en Colombia.* Medellín, Editorial La Carreta.