Nota didáctica

El operador "hat" (^) y su aplicación en la derivación de las propiedades de la función translogarítmica de costo[1]

Por: *Carlos Eduardo Vélez E.*
Centro de investigaciones Económicas -CIE- Universidad de Antioquia

Los economistas realizamos a menudo ejercicios de estática comparativa utilizando la diferenciación total de las ecuaciones que determinan el equilibrio o el óptimo de algún problema económico[2]. Las reglas de *diferenciación total relativa u operador "hat"* son aplicables al mismo tipo de problemas y están basadas en los mismos principios del cálculo diferencial. Sin embargo, el método de la diferenciación total relativa tiene la gran ventaja de permitir una interpretación económica mucho más transparente e intuitiva, ya que en los resultados obtenidos las tasas de cambio de las variables endógenas aparecen en términos de elasticidades, de las tasas de crecimiento de las variables exógenas y de otros parámetros del modelo. En efecto, al utilizar *comparaciones relativas* -independientes de la escala de las variables- se evitan las "ilusiones" que produce la comparación de cambios absolutos obtenidos por el método de la diferenciación total. Debemos advertir al lector que para ciertas formas funcionales la diferenciación logarítmica lleva a los mismos resultados, no obstante creemos que el operador "hat" es más práctico, en tanto alcanza esos resultados con una notación y unas reglas de aplicación más simples.

A continuación presentamos algunas reglas del operador "hat" para expresiones que usualmente encontramos en los problemas

---

1 Esta nota recoge y amplia las reglas del operador "hat" aprendidas de mi compañero de estudios Donald Davis y del profesor André Burgstaller, en la Universidad de Columbia. Algunas de ellas aparecen en el conocido manual Chiang (1984), sección 10.7.

2 Samuelson (1947).

económicos. Una vez probadas, pasamos a aplicarlas a la derivación de las propiedades de la función translogarítmica de costo.

El álgebra del operador "hat"

El operador "hat" se define como la tasa de cambio de una variable. Esta tasa de cambio se mide con respecto a una variable de referencia que usualmente es el tiempo:

$$\hat{z} \equiv \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{z}$$

o simplemente

$$z$$

La pregunta por resolver es la siguiente: Si $z = F(x,y)$, ¿Cómo se expresa la tasa de cambio de z en función de las tasas de cambio de x e y? *Las reglas de diferenciación "hat"* para formas generales y específicas de F (.) aparecen en la Tabla 1[3]:

Pruebas: la diferenciación logarítmica nos da directamente todos los resultados excepto las reglas 1, 3 y 6. Para estos basta diferenciar totalmente y hacer manipulaciones adicionales. A continuación presentamos las pruebas para las reglas 1, 2 y 3. El resto se pueden probar con la misma técnica.

Regla 1. $z = F(x,y)$. Diferenciando totalmente y aplicando la diferenciación en cadena tenemos que:

---

3 Obviamente, los resultados se pueden extender fácilmente a funciones en forma implícita y/o de más de dos variables a sistemas de ecuaciones (Remítase a los ejemplos 1 y 2 que aparecen más abajo).

Tabla 1 **Resumen de las reglas de la diferenciación "hat"**

1. $z = F(x, y)$	$\hat{z} = \eta_{F,x}\hat{x} + \eta_{F,y}\hat{y}$
Corolario: $F(x, y) = 0$	$0 = \eta_{F,x}\hat{x} + \eta_{F,y}\hat{y}$
2. $z = ax^{b}y^{c}$	$\hat{z} = b\hat{x} + c\hat{y}$
Dos corolarios :	
2.a $z = axy$	$\hat{z} = \hat{x} + \hat{y}$
2.b $z = ax/y$	$\hat{z} = \hat{x} - \hat{y}$
3. $z = x \pm y$	$\hat{z} = \frac{x}{z}\hat{x} \pm \frac{y}{z}\hat{y}$
4. $z = e^{gt}$	$\hat{z} = g$
5. $z = a^{f(x)}$	$\hat{z} = xf'(x)\ln(a)\hat{x}$
Dos corolarios :	
5.a si $f(x) = x$	$\hat{z} = x\ln(a)\hat{x}$
5.b si $f(x) = \ln(x)$	$\hat{z} = \ln(a)\hat{x}$

6. $z = F(x, y)$, homogenea de grado T $=$ $T = \eta_{F,x} + \eta_{F,y}$

Nota: $\eta_{F,k} \equiv \frac{k}{F}\frac{\partial F(x, y)}{\partial k}$,

es la elasticidad parcial de F con respecto a k $(k = x,y)$.

$$dz = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por z y multiplicando los dos sumandos del lado derecho por x/x e y/y respectivamente, tenemos que:

$$\frac{dz}{z} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{x}{z}\frac{dx}{x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{y}{z}\frac{dy}{y}$$

por lo tanto $\quad \hat{z} = \eta_{F,x}\hat{x} + \eta_{F,y}\hat{y}$

Regla 2. $z = a\, x^b\, y^c$. Tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln z = \ln a + b \ln x + c \ln y.$$

y diferenciando:

$$\hat{z} = b\hat{x} + c\hat{y}$$

Regla 3. $z = x + y$. Diferenciando totalmente tenemos que:

$$dz = dx + dy$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por z y multiplicando los dos sumandos del lado derecho por x/x e y/y respectivamente, tenemos que:

$$\frac{dz}{z} = \frac{x}{z}\frac{dx}{x} + \frac{y}{z}\frac{dy}{y}$$

entonces: $\quad \hat{z} = \frac{x}{z}\hat{x} + \frac{y}{z}\hat{y}$

Ejemplo 1: Ecuaciones simultáneas y estática comparativa: supóngase que las condiciones de equilibrio (o de primer orden de optimización) para las variables endógenas x e y están dadas por

$$F[x, y, a] = 0$$
$$G[x, y, a] = 0$$

donde a representa el vector de variables exógenas y/o parámetros del modelo. El ejercicio de estática comparativa usual consiste en derivar al impacto que sobre las variables endógenas tiene el cambio de un parámetro o una variable exógena. Aplicando el corolario de la regla 1 tenemos:[4]

Dividiendo por a y reescribiendo en forma matricial

$$\eta_{F,x}\hat{x} + \eta_{F,y}\hat{y} + \eta_{F,a}\hat{a} = 0$$
$$\eta_{G,x}\hat{x} + \eta_{G,y}\hat{y} + \eta_{G,a}\hat{a} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{F,x} & \eta_{F,y} \\ \eta_{G,x} & \eta_{G,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}}{\hat{a}} \\ \frac{\hat{y}}{\hat{a}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta_{F,a} \\ \eta_{G,a} \end{bmatrix}$$

y premultiplicando por la inversa de la jacobiana, obtenemos las elasticidades de las variables endógenas con respecto al parámetro a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\hat{x}}{\hat{a}} \\ \frac{\hat{y}}{\hat{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{F,x} & \eta_{F,y} \\ \eta_{G,x} & \eta_{G,y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \eta_{F,a} \\ \eta_{G,a} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Restricciones de los parámetros las funciones de demanda del consumidor. Según la teoría del consumidor, el vector k-dimensional- de las funciones demanda marshaliana x (p,y) es homogéneo de grado cero en el vector de precios p e y. Y a su vez, el vector de funciones de demanda hicksiana o compensada a utilidad u, h(p,u), es homogéneo de grado cero en el vector de precios.

Teniendo en cuenta la homogeneidad de grado cero y la Regla 6 del operador "hat", derivamos las siguientes restricciones sobre el sistema de ecuaciones de demanda:

---

4 Asumamos para simplificar que el vector a es unidimensional.

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0, \qquad para\ todo\ i=1,\ldots,k$$

$$donde\ \varepsilon_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} \quad y \quad \eta_i \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y}\frac{y}{x_i}.$$

esto es, que la suma de la elasticidad ingreso, de la elasticidad de propio precio y de las elasticidades-precio cruzadas es nula para cada una de las k demandas marshallianas de bienes.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon'_{ij} = 0 \qquad \forall i=1,\ldots,k.$$

esto es, que la suma de la elasticidad de propio precio y de las elasticidades-precio cruzadas es nula para cada una de las k demandas hicksianas de bienes.

De otro lado, si suponemos insaciabilidad local de las preferencias, el gasto es igual al ingreso, esto es, p.x(p,y) = y. Si aplicamos el operador hat con cambios en el ingreso, encontramos *la Agregación de Engel,* una restricción sobre la suma de las elasticidades ingreso, $\sum_{i=1}^{k} v_i \eta_i = 1$ donde v1 es la participación del gasto en el bien i en el presupuesto del consumidor.

Otras restricciones no independientes de las anteriores son: *la Agregación de Cournot,* que se obtiene derivando la misma restricción presupuestal con respecto al precio j:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i\, \varepsilon_{ij} \quad v_j = 0, \qquad \forall\ j:1,\ldots,k.$$

y si derivamos con respecto al mismo precio la restricción presupuestal expresada como, *p.h(p,u) = y,* obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i\, \varepsilon^{*}_{ij} = 0, \qquad \forall\ j:1,\ldots,k.$$

Sustituibilidad o complementariedad entre factores y la función translogarítmica de costo[5]

La definición general de la función de costo es

$$c\,(w, y) \equiv w\,.\,x\,(w, y)$$

el producto interno del vector de precios de factores w y x (w,y), que es el vector de las demandas condicionada de factores. Por el Lema de Shepard sabemos que

$$\frac{\partial c}{\partial w_i} - x_i\,(w, y)\,, \qquad \forall\ i - 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, utilizando la definición del operador “hat”

$$\frac{\hat{c}}{\hat{w}_i} \equiv \frac{w_i}{c}\frac{\partial c}{\partial w_i} - \frac{w_i x_i\,(w, y)}{c} \equiv s_i \qquad \forall i - 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

donde Si es la participación del factor i en el costo total. Note que la última expresión implica que la demanda condicionada de factores es idéntica a

$$x_i\,(w, y) \equiv \frac{s_i\,(w, y)\ \ c\,(w, y)}{w_i}, \qquad \forall\ i - 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

De otro lado, la *complementariedad o sustituibilidad* de factores depende del siglo (negativo o positivo) de la elasticidad-precio cruzada

5 Esta función translogarítmica es una aproximación de segundo orden a una función arbitraria de costos y cuenta con una flexibilidad paramétrica mucho mayor que la de una función de producción CES. Véase Nadiri (1982) y la bibliografía básica que aparece en Botero *et al* (1991).

de la demanda condicionada de cada factor o la elasticidad-precio cruzada de la demanda condicionada de cada factor o la *elasticidad parcial del Hicks-Allen,* que se define como[6]:

$$\varepsilon'_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} \equiv \frac{\hat{x}_i\,(w, y)}{\hat{w}_j}, \qquad \forall\ i, j=1, \ldots, n.$$

Para medir esta propiedad, existe otro concepto más general: *la elasticidad de sustitución de Allen,* que se define simplemente como:

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\varepsilon'_{ij}}{s_j}, \qquad \forall\ i, j=1, \ldots, n.$$

y es simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Para derivar el valor de la elasticidad parcial de Hicks-Allen, aplicamos la Regla 2 a la identidad (2), teniendo en cuenta el resultado de la ecuación (1). Tenemos, entonces el siguiente resultado, *válido para cualquier función de costo:*

$$\varepsilon'_{ij} - \frac{\hat{S}_i}{\hat{w}_j} + \frac{\hat{C}}{\hat{w}_j} - \frac{\hat{S}_i}{\hat{w}_j} \cdot s_j \tag{3.1}$$

$$\varepsilon'_{ii} - \frac{\hat{S}_i}{\hat{w}_i} + \frac{\hat{C}}{\hat{w}_i} \quad \frac{\hat{w}_i}{\hat{w}_i} - \frac{\hat{S}_i}{\hat{w}_i} + s_i \quad 1 \tag{3.2}$$

$$\forall\ i, j-1, \ldots, n.$$

6 Terminología utilizada por Layard and Walters (1978), p. 141.

Pasemos entonces a aplicar estas propiedades a la función translogarítmica. Esta función de costo se define como[7]

$$\ln c(w,y) = a_0 + \alpha \ln y + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln w_i \ln w_j \qquad (4.1)$$

donde $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ b_{ij} = b_{ji},\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0$ para $i = 1, \ldots, n.$

o tomando antilogaritmos

$$c(w,y) = y^{\alpha} e^{a_0} \prod_{i=1}^{n} w_i^{\left[a_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln w_j\right]} \qquad (4.2)$$

Si tenemos en cuenta el resultado de la ecuación (1) y diferenciamos ln c(.) con respecto al logaritmo del precio de cada factor *i*, tenemos que:[8]

$$\frac{\hat{C}}{\hat{w}_i} \equiv \frac{d \ln C}{d \ln w_i} = s_i(w,y) = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln w_j, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

y si diferenciamos con respecto a w_j y multiplicamos por w_j/s_i

$$\frac{\hat{s}_i}{\hat{w}_j} \equiv \frac{w_j}{s_i} \frac{\partial s_i}{\partial w_j} = \frac{b_{ij}}{s_i}, \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, n.$$

y sustituyendo en (3.1) y (3.2) obtenemos las elasticidades HicksAllen para la función translogarítmica de costos.

---

7 Existen versiones más generales de esta función que incluyen progreso técnico y que no restringen la función de costos a ser homogénea en el producto y. Véase Nadiri (1984), p. 466.

8 El lector puede verificar que se llega al mismo resultado por una vía alternativa: Utilizando las reglas 2 y (5.b) del operador "hat" cuando cambia el precio de un factor, aplicadas a la ecuación (4.2). La combinación de estas dos reglas del operador "hat" es aplicable a funciones de la forma $z = x^{f(x)}$. Y en ese caso z^ = [f(x) + x f'(x) ln(x)] x^. Y cuando f(x) = ln(x), f'(x) = 1/x y por lo tanto z^ = 2 ln(x).

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{b_{ij}}{s_i} + s_j, \qquad \forall i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

$$\varepsilon^*_{ii} = \frac{b_{ii}}{s_i} + s_i - 1, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Algunas veces este mismo resultado aparece en términos de las elasticidades de sustitución de Allen que definimos más arriba:[9]

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij}}{s_i\ s_j} + 1$$

$$\sigma_{ii} = \frac{b_{ii}}{s_i^{\,2}} + 1 - \frac{1}{s_i}$$

Bibliografía

Botero, J., E. Castaño y C.E. Vélez (1990). "Modelo económico de la demanda de energía eléctrica en Colombia". *Lecturas de Economía.* No. 32-33. Medellín, mayo-diciembre de 1990. pp. 97-124.

Chiang, A. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics.* New York, McGraw-Hill.

Layard, P.R.G. and A.A. Walters (1978). *Microeconomic theory.* New York, McGraw-Hill.

López, G. y Castaño, E. (1991). "La energía eléctrica dentro de la estructura tecnológica de la industria antioqueña". *Lecturas de Economía.* No. 34. Medellín, enero-junio de 1991.

Nadiri, M.I. (1982). *Producers Theory.* En K.J. Arrow and M.D. Intriligator, *Handbook of Mathematics,* vol. II. Amsterdam, North Holland.

Samuelson, P.A. (1947). *Foundations of Economic Analysis.* Mass, Harvard University Press.

Varian, H. (1984). *Microeconomic Analysis,* New York, Norton.

9 También llamada elasticidad de sustitución de Allen Usawa. Esta es la forma utilizada en Botero et al (1990, p. 107) y en López (1991).