LECTURAS
DE
ECONOMIA

Elkin Castaño Vélez

Un modelo de Economía urbana aplicado a ciudades monocéntricas: el caso de Medellín

Lecturas de Economía. No. 19. Medellín, enero-abril de 1986. pp. 137-152.

• **Resumen.** En el estudio del precio de la tierra en una ciudad se emplean frecuentemente modelos para medir la relación entre el precio de un lote y su distancia al centro comercial de la ciudad. Para obtener una estimación de dicha relación se acostumbra ajustar tantas relaciones como períodos tenga el estudio y luego compara los modelos ajustados con el fin de investigar la evolución de dicha relación. El propósito de este artículo es mostrar cómo esta metodología puede ser mejorada modificando el modelo ajustado por períodos de forma tal que permita obtener inferencias simultáneas acerca de la estructura de la relación precio-distancia a través de todos los períodos bajo estudio. Este modelo fue utilizado para la ciudad de Medellín en un estudio sobre el precio de la tierra urbana realizado por el Centro de Investigaciones Económicas –CIE– de la Universidad de Antioquia.

• **Sumarry.** *One basic tool for the analysis of the price of urban land is its distance from the central business district. In order to estimate this relationship it is usual to construct base period estimates and to project them forward to compare with the actual prices measured in a second (later) stage of the projet. This article demonstrates a better method in which one can estimate separately the price distance relationship in each period of the study. It is applied to the casi of Medellín.*

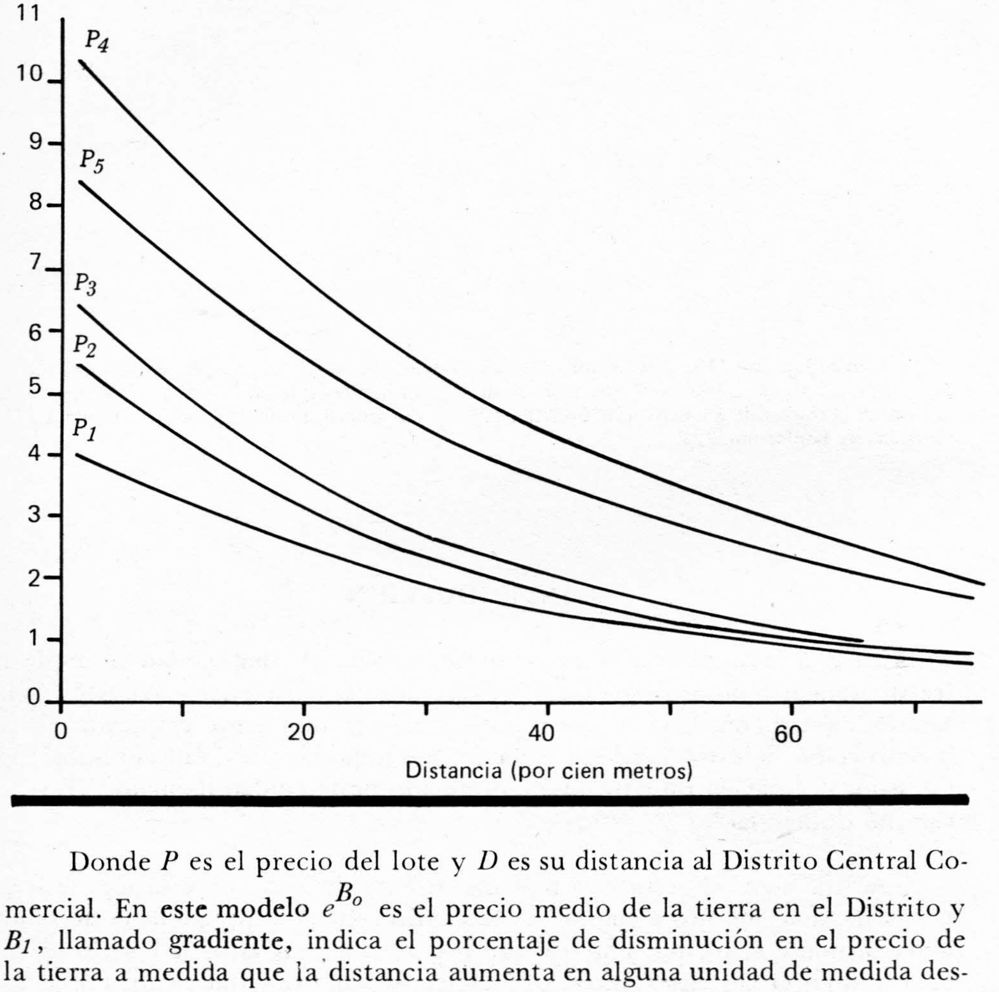
I. INTRODUCCION

En la determinación de la estructura urbana de una ciudad se emplean frecuentemente modelos teóricos presentados bajo diferentes supuestos de la Economía Urbana. Una de las hipótesis más comúnmente empleadas en la construcción de estos modelos es la de que todas las actividades económicas están localizadas en un sitio predeterminado de la ciudad llamado "Distrito Central Comercial".

Ahora bien, el resultado más importante derivado de esta hipótesis es que a medida que nos alejamos de este sitio central el precio de la tierra urbana disminuye, lo que implica que los precios más altos del suelo se encuentran en el Distrito Central Comercial. Se han presentado varios modelos teóricos para describir esta situación dentro de los cuales se ha destacado el modelo propuesto por E. Mills (1972) el cual asume que la relación entre el precio de la tierra y su distancia al Distrito Central Comercial toma la forma: véase Gráfico 1).

$$P = e^{B_o + B_1 D} \qquad B_1 < 0$$

Gráfico 1 **Relación precio-distancia en Medellín por períodos**



Donde P es el precio del lote y D es su distancia al Distrito Central Comercial. En este modelo e^{B_o} es el precio medio de la tierra en el Distrito y B_1, llamado gradiente, indica el porcentaje de disminución en el precio de la tierra a medida que la distancia aumenta en alguna unidad de medida desde el Distrito Central Comercial.

En el estudio de la evolución de la relación precio-distancia para diferentes períodos en una ciudad se ha empleado este modelo para investigar sus posibles alteraciones. Para ello se ajustan independientemente tantas relaciones precio-distancia como períodos presenta el estudio (véase por ejemplo, Villamizar [1981]), y con base en las relaciones estimadas se hacen inferencias sobre su comportamiento conjunto en el tiempo. Sin embargo, esta metodología no es la apropiada si queremos hacer inferencia simultánea sobre las características de las diferentes relaciones, lo que es, por supuesto, de interés fundamental en este tipo de estudios.

Algunos de los problemas que surgen al aplicar esa metodología son:

a. El tamaño muestral total es dividido por subperíodos y con estas submuestras se estiman las relaciones para cada período. Esto conlleva a la pérdida de grados de libertad en la estimación y pruebas de hipótesis en el modelo.

b. Esta misma utilización de muestras por períodos da lugar a otro problema que puede ser grave: la comparación de las estimaciones obtenidas para los diferentes períodos basados en diferentes tamaños muestrales (puede ocurrir la comparación de estimaciones basados en muestras pequeñas con estimadores basados en muestras grandes).

c. La misma comparación de los estimadores en varias relaciones se dificulta debido a la dependencia de los datos entre períodos.

El propósito de este artículo es mostrar como el modelo propuesto por Mills (1972) puede ser ampliado para estimar simultáneamente las relaciones en los distintos períodos, evitando así los problemas anteriores, y entonces poder recurrir a técnicas adecuadas de inferencia estadística. Para ilustrar la aplicación del modelo ampliado se muestra su utilización para el caso de la ciudad de Medellín, en un estudio sobre el precio de la tierra en la ciudad realizado por el Centro de Investigaciones Económicas –CIE– de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Antioquia (véase Hernández et al [1985]).

II. AMPLIACION DEL MODELO

Como decíamos, la relación precio-distancia planteada por Mills (1972) toma la forma:

$$P_i = e^{B_o + B_1 D_i} \qquad B_1 < 0 \tag{1}$$

Donde e^{B_o} es el precio de la tierra en el punto central de la ciudad (el Distrito Central Comercial), P es el precio del lote, D es la distancia del lote al Distrito Central Comercial y B_1, el gradiente, indica el porcentaje de reducción en el precio de la tierra debido a alejamientos del punto central.

Cuando tenemos información de tipo histórico es importante determinar cual es la relación específica en cada período y utilizando procedimientos estadísticos simultáneos, hacer comparaciones entre las verdaderas relaciones. El procedimiento de ajustar relaciones por períodos, es decir, empleando el Modelo presentado en (1) para cada período, y luego inferir conjuntamente sobre las verdaderas relaciones es un procedimiento incorrecto puesto que no podemos asumir independencia entre los datos de un período y otro.

Sin embargo, una ampliación de este modelo nos permitirá obtener estimaciones conjuntas de todas las relaciones y efectuar procedimientos simultáneos sobre las relaciones estimadas. El Modelo propuesto toma la siguiente forma:

$$P_i = e^{B_1 + B_2 T_{2i} + \ldots + B_T T_{Ti} + \theta_1 D_i + \theta_2 (DT_2)_i + \ldots + \theta_T (DT_T)_i + \mu_i} \tag{2}$$

Donde P_i es el precio del i-ésimo lote.

D_i es la distancia del i-ésimo lote al Distrito Central Comercial

$$T_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si el precio del } i\text{-ésimo lote fue tomado en el período } j, \\ o & \text{en otro caso, } j = 2, 3, \ldots, T. \end{cases}$$

$$(DT_j)_i = \begin{cases} D_i & \text{si el precio del } i\text{-ésimo lote fue tomado en el período } j, \\ o & \text{en otro caso, } j = 2, 3, \ldots, T. \end{cases}$$

y μ_i : término de error aleatorio asociado con la i-ésima observación.

III. EXPLICACION DEL MODELO

En este modelo están expresadas las relaciones entre el precio y la distancia para los T período de estudio.

– El precio medio en el Distrito Central Comercial (denominado Nivel de Precios) en el período

$$j: \quad e^{B_1} \quad \text{si } j = 1; \quad e^{B_1 + B_j} \quad \text{si } j = 2, \ldots, T \tag{3}$$

– El gradiente para el período

$$j: \theta_1 \quad \text{si } j = 1; \theta_1 + \theta_j \quad \text{si } j = 2, \ldots, T \tag{4}$$

Se observa de las condiciones (3) y (4) que el período *1* es el período base para la comparación con otros períodos.

Cuadro 1 **Submodelos estimados conjuntamente por el modelo ampliado**
El modelo está resumido por períodos

Período	
1	$P_i = e^{B_1 + \theta_1 D_i}$
2	$P_i = e^{(B_1 + B_2) + (\theta_1 + \theta_2)D_i}$
.	.
.	.
.	.
T	$P_i = e^{(B_1 + B_T) + (\theta_1 + \theta_T)D_i}$

Lo más importante a observar es que estos T modelos han sido ajustados en forma simultánea y por tanto podemos hacer inferencias conjuntas sobre los coeficientes B_j y θ_j los cuales indicarán posibles cambios tanto en el nivel de precios (precio medio en el Distrito Central Comercial) como en los gradientes en las relaciones precio-distancia para los diferentes períodos. Si empleáramos el Modelo simple expresado en (1) se dificultaría la contrastación de las diferencias obtenidas entre los estimadores de los gradientes o de los niveles de precio, es decir, no podríamos asegurar si las diferencias obtenidas son estadísticamente significativas o sólo se deben a fluctuacines muestrales.

IV. AJUSTE DEL MODELO

El Modelo indicado en (2) es un modelo no-lineal pero el cual puede linearizarse al obtener el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación.

Este procedimiento proporciona:

$$l_n P_i = B_1 + B_2 T_{2i} + \ldots + B_T T_{Ti} + \theta_1 D_i + \theta_2 (DT_2)_i + \ldots + \theta + (DT_T)_i + \mu_i \quad (5)$$

Datos: la información que generalmente se encuentra disponible para el ajuste de (5) está basada en N lotes a través de los T períodos de estudio y donde, en general, no se encuentra información de un mismo lote para períodos consecutivos, es decir, para los diferentes períodos se dispone del precio y la distancia de diferentes lotes.

Sobre el término de error del modelo hacemos las siguientes hipótesis:

1. La varianza de μ_i es σ^2, es decir, los términos de error del Modelo tienen la misma varianza dentro de cada período y entre los períodos.

2. Los términos de error son incorrelacionados, es decir, $Cov\ (\mu_i, \mu_j) = 0$ para $i \neq j$, y su media es cero.

3. Los términos de error del Modelo se distribuyen normalmente; este supuesto debe cumplirse con buena aproximación si queremos contrastar hipótesis y construir intervalos.

El Modelo linearizado expresado en (5) puede, bajo tales supuestos, ser ajustado por el método de los mínimos cuadrados.

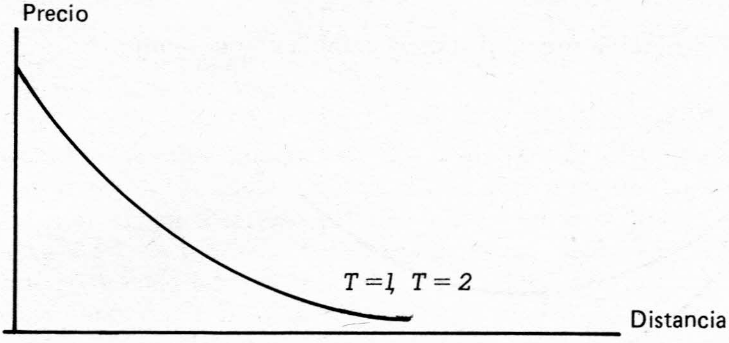
V. VERIFICACION DE ALGUNAS HIPOTESIS DE INTERES

Una vez que el Modelo ha sido ajustado (y que estemos seguros de que ningún supuesto básico del procedimiento ha sido violado, incluyendo el supuesto de normalidad con buena aproximación) podemos emplear una amplia variedad de técnicas estadísticas comunes en el manejo de regresión múltiple que nos permiten resolver algunas preguntas de interés, por ejemplo:

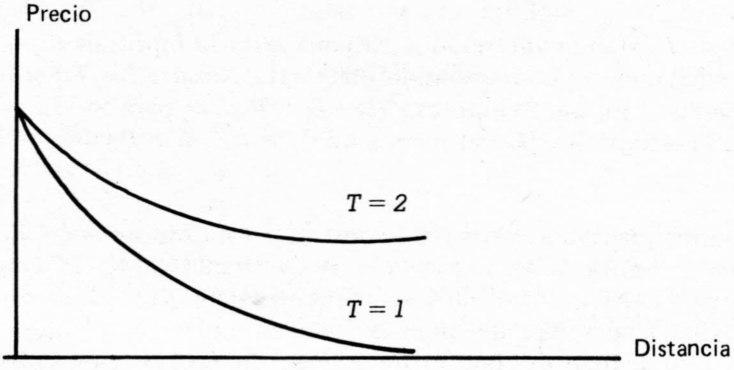
(1). ¿Se conserva el nivel de precio y el gradiente durante los T períodos de estudio?; (2). ¿Si se rechaza la hipótesis anterior se conserva siquiera el nivel de precios?; o, (3). ¿Se conserva el gradiente?. Si se rechazan las dos últimas, (4). ¿Para cuáles períodos se conserva el nivel de precios?; (5). ¿Para cuáles períodos se conserva el gradiente?; (6). ¿Existe debilitamiento de la relación precio-distancia con el tiempo?

Una representación gráfica de las preguntas anteriores para $T = 2$, sería:

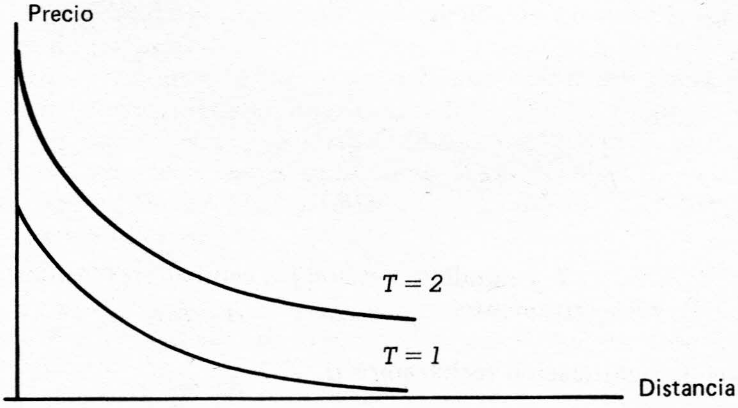
1. Existe una única relación para todos los períodos.



2. Los gradientes son diferentes y el nivel de precios se mantiene

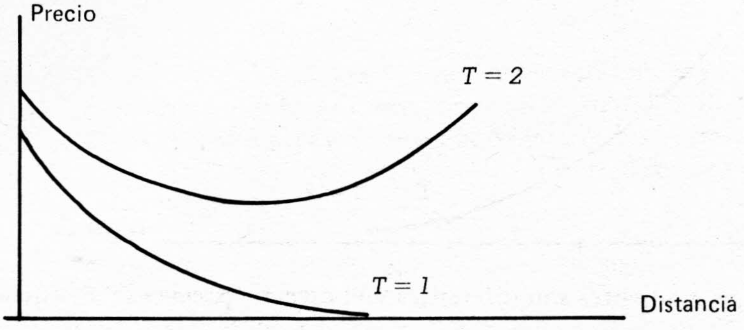


3. Los niveles de precios son diferentes y el gradiente se mantiene



4 y 5. Buscar para cuáles períodos se verifica lo dado en las tres figuras anteriores.

5. Si la función precio-distancia cambia con el tiempo.



Para el caso *1* estamos interesados en contrastar la hipótesis de que la relación precio-distancia se ha mantenido constante durante los T períodos. Esto es equivalente a probar la hipótesis H_o : $B_j = \theta_j = o$, para todo $j = 2, 3, \ldots, T$ contra la alternativa H_j : al menos un $B_j \neq 0$ ó $\theta_j \neq 0$ para $j = 2, 3, \ldots, T$.

Existen varios procedimientos para contrastar esta hipótesis (véase por ejemplo Draper y Smith (1981), Netter y Wasserman (1974), F. Graybill (1976), *H.* Theil (1978)). Entre ellos se encuentran los procedimientos simultáneos, de los cuales uno de los más frecuentemente empleados es el basado en la Desigualdad de Bonferroni (véase Anexo) y cuyo procedimiento es el siguiente:

a. Calculamos el valor del estadístico.

donde $S(.)$ es la desviación estándard de .

$$t_{B_j} = \frac{b_j}{S(b_j)} \qquad \text{y} \qquad t\theta_j = \frac{\hat{\theta}_j}{S(\hat{\theta}_j)}$$

para todo $j = 2, 3, \ldots, T$ y donde b_j y $\hat{\theta}_j$ son los estimadores mínimo cuadráticos de B_j y θ_j, respectivamente.

b. A un nivel de significación rechazamos H_o si

$|t_{B_j}| \geqslant t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)$ ó $|t\theta_j| \geqslant t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)$

para algún $j = 2, 3, \ldots T$, donde n es el tamaño muestral, m es el número de coeficientes para los cuales se va a hacer la prueba simultánea; en este caso $m = 2T\text{-}2$ y $t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)$ es el percentil $\alpha/2m$ superior de la distribución t con $n\text{-}2T$ grados de libertad.

Debido a la equivalencia entre los resultados de una prueba bilateral para un parámetro a un nivel α como al que acabamos de describir y los de la construcción de un intervalo para el mismo parámetro con coeficiente de confianza $1\text{-}\alpha$*, la hipótesis bajo consideración puede ser contrastada construyendo para cada período $j = 2, 3, \ldots, T$ los intervalos cuyos límites están dados por:

$$(b_j - t(\alpha/2m, n\text{-}2T)\, S(b_j),\ b_j + t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)\, S(b_j))\ \text{y}$$

$$(\hat{\theta}_j - t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)\, S(\hat{\theta}_j), \hat{\theta}_j + t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)\ S(\hat{\theta}_j))$$

Si todos los intervalos contienen el cero se acepta H_o ó, en otras palabras, la relación no ha cambiado con el tiempo. Pero si se rechaza H_o, este procedimiento proporciona información sobre los coeficientes que pueden estar contribuyendo a su rechazo.

En caso de rechazar H_o, para contestar a las preguntas (2) y (3) podemos emplear la información dada por la prueba sobre los coeficientes que posiblemente están contribuyendo a su rechazo: si existen $|t_{B_j}| \geqslant t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)$ para algún $j = 2, 3, \ldots, T$ entonces posiblemente hay cambio en el nivel de precio para ese período J. Si existen $|t\theta_j| \geqslant t(\alpha/2m\,, n\text{-}2T)$ entonces posiblemente hay cambio en el gradiente para ese período j.

La prueba de la pregunta (2), es decir, si se conserva el nivel de precios a través de los períodos es equivalente a probar la hipótesis $H_o : B_2 = B_3 = \ldots, = B_T = 0$ contra la alternativa H_a: existe al menos un $B_j \neq 0$, $j = 2, 3, \ldots, T$, se puede efectuar empleando los estadísticos t_{B_j} calculados antes y comparándolos con el percentil $t(\alpha/2m, n\text{-}2T)$ donde m cambia su valor a $m = T\text{-}1$, es decir, m es el número de coeficientes que estamos contrastando. Análogamente al caso 1 podemos emplear $T\text{-}1$ intervalos para contrastar esta hipótesis.

---

* Los resultados obtenidos en la prueba de $H_o : \theta = \theta_o$ contra $H_a : \theta \neq \theta_o$ a un nivel se encuentran en un intervalo para θ con $(1\text{-}\alpha)$ o/o de confianza, si empleamos el mismo estadístico como base.

La prueba del caso 3, es decir, si el gradiente es estable a través de los períodos, es equivalente a probar H_o: $\theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_T = 0$ contra la alternativa H_a: existe al menos un $\theta_j \neq 0$, $j = 2, 3, \ldots, T$, sigue el mismo esquema del caso 2. Calculamos $t\theta_j$ y los comparamos con $t(\alpha/2m, n\text{-}2T)$ con $m = T\text{-}1$.

Para este modelo podemos inclusive tratar de estudiar cual es la relación entre los niveles de precio (ó los gradientes) de diferentes períodos. Por ejemplo, contrastar si el nivel de precios del período j es k veces el nivel de precios del período r, donde k es un número real. Esto equivale a probar la hipótesis H_o: $\theta_j = k\theta_r$ o, lo que es lo mismo, H_o : $\theta_j\text{-}k\theta_r = 0$. Ahora, está prueba se puede representar en forma más general como H_o : $C'B = 0$ donde $C' = (0, 0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ donde C es de $2T \times 1$ y si $r < j$, k ocupa la posición $T + r\text{-}1$ y 1 ocupa la posición $T + j\text{-}1$ y donde $B' = (B_1, B_2, \ldots B_T, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_T)$ es de $2T \times 1$. Es decir, se trata de pruebas sobre combinaciones lineales de los coeficientes del modelo, para cuya verificación empleamos el estadístico

$$t = \frac{c'b}{S(c'b)} = \frac{c'b}{[\hat{\sigma}^2\ c'(X'X)^{-1}\ c]^{1/2}}$$

Donde b es el estimador mínimo cuadrático de B, y donde B es el vector que contiene los coeficientes del modelo expresado en (5). Para un nivel de significación rechazamos H_o en favor de H_a: $C'B \neq 0$ si

$$|t| \geqslant t(\alpha/2, n\text{-}2T)$$

Para verificar simultáneamente m combinaciones lineales basta reemplazar $t(\alpha/2, n\text{-}2T)$ por $t(\alpha/2m, n\text{-}2T)$.

Para el cálculo del percentil $t(\alpha/2m, n\text{-}2T)$ de las pruebas anteriores existen tablas las cuales calculan directamente $t(\alpha/2m, n\text{-}2T)$ dado el valor de α (véase Dun [1961]).

Las respuestas a las preguntas (4) y (5) podemos obtenerlas siguiendo la misma metodología anterior.

Otro de los supuestos de la Economía Urbana sobre la estructura de una ciudad es la del "debilitamiento" de la relación precio y distancia al Distrito Central Comercial a medida que pasa el tiempo (pregunta)): esto puede ser causado, por ejemplo, por el nacimiento de otros centros de actividad económica que entran a competir con el viejo Distrito Central Comercial.

Para verificar esta hipótesis, algunos trabajos anteriores (véase por ejemplo, Villamizar [1981]) han empleado la sucesión de los coeficientes de determinación (R^2) de los modelos ajustados por períodos: una tendencia a la disminución en el valor de dichos coeficientes daría información sobre el deterioro de la relación con el tiempo. En realidad el interés por detectar tal deterioro exigiría hacer uso de técnicas estadísticas que permitan confirmar o no la estabilidad del modelo en el tiempo (véase por ejemplo, Thomas [1984]; Brown, Durbin y Evans [1975]). Sin embargo, para nuestro caso este problema puede ser examinado utilizando el modelo propuesto; éste puede proporcionarnos información acerca de los posibles cambios en la estructura de la relación con el tiempo. Puesto que el coeficiente de regresión asociado con la distancia para el período j está dado por $\theta_1 + \theta_j$, podemos emplear procedimientos simultáneos para contrastar conjuntamente las hipótesis H_o (j): $\theta_1 + \theta_j = 0$, lo que es equivalente a probar que para el período j no existe relación en la forma propuesta anteriormente entre el precio y la distancia, contra la alternativa H_a (j): $\theta_1 + \theta_j < 0$.

Estas pruebas están basadas en el procedimiento visto antes sobre combinaciones lineales de los elementos de B. Para este caso los estadísticos t se reducen a

$$t_j = \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_j}{[Var(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_j) + 2Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_j)]^{1/2}}$$

Donde $Var(\hat{\theta}_1)$, $Var(\hat{\theta}_j)$ y $Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_j)$ se encuentran en la matriz de covarianzas de b, es decir en la matriz $(X'X)^{-1}\hat{\sigma}^2$.

VI. APLICACION AL CASO DE LA CIUDAD DE MEDELLIN (1970-1983)

El modelo presentado fue empleado en el estudio de la relación precio-distancia para la ciudad de Medellín durante los años 1970 y 1983. Con tal fin el tiempo de observación fue dividido en cinco períodos en la siguiente forma: (i) 1970 a 1972; (ii) 1973 a 1975; (iii) 1976 a 1978; (iv) 1979 a 1981 y (v) 1982 a 1983.

El modelo considerado fue:

$$\hat{P}_i = e^{B_1 + B_2 T_{2i} + \ldots + B_5 T_{5i} + \theta_1 D_i + \theta_2 (DT_2)_i + \ldots + \theta_5 (DT_5)_i + \mu_i}$$

Datos: Los datos fueron suministrados por la Federación Colombiana de Lonjas de Propiedad Raíz –Fedelonjas–, los cuales consistían en 3.900 lotes avaluados de 1970 a 1983. Se trabajó con precios reales de 1980. La distancia considerada fue la distancia del área del lote al Distrito Central Comercial. Empleando el paquete estadístico S.A.S. se ajustó la forma linearizada del modelo y se obtuvo.

$$\ln P_i = \underset{**}{8.33582} + \underset{*}{0.30671}\, T_{2i} + \underset{*}{0.46019}\, T_{3i} + \underset{**}{0.936783}\, T_{4i} + \underset{**}{0.737102}\, T_{5i} - \underset{**}{0.026233}\, D_i$$

$$-0.003701\, (DT_2)_i - 0.004054\, (DT_3)_i + 0.003528\, (DT_4)_i + 0.003558\, (DT_5)_i$$

Donde:

** Coeficientes estadísticamente significativos individualmente para α = *0.0001.*

* Coeficiente estadísticamente significativos individualmente para niveles entre *0.0007* y *0.037.*

$R^2 = 0.36,\ \bar{R}^2 = 0.35,\ GL = 3.890,\ \hat{\alpha}^2, = 0.649618,\ d = 2.1\ F = 237.746$

($\alpha = 0.0001$).

Se obtuvieron además bajos índices de colinealidad (véase Besley, Kuh y Welch [1981]).

No se detectaron problemas de heteroscedasticidad. De estos resultados podemos observar que la distancia es una variable de gran importancia en este modelo y que existen otras variables de importancia que no han sido tenidas en cuenta. Además, los coeficientes de las variables asociadas al cambio en el nivel de precios de los períodos se muestran significantes individualmente mientras los coeficientes asociados a los gradientes por períodos no se muestran significativamente ni siquiera individualmente. El modelo de interés es el modelo retransformado.

$$\hat{P}_i = e^{8.33582 + 0.30671\, T_{2i} + 0.46019\, T_{3i} + 0.936783\, T_{4i} + 0.737102\, T_{5i} - 0.026233\, D_i}$$

$$-0.003701\, (DT_2)_i - 0.004054\, (DT_3)_i + 0.003528\, (DT_4)_i + 0.003558\, (DT_5)_i$$

En este modelo se han estimado conjuntamente los submodelos que expresan las relaciones entre precio y distancia para los cinco períodos bajo estudio (estos se presentan en el Cuadro 2). Para su representación véase el Gráfico 1.

Cuadro 2 **Submodelos estimados**

Período	*Submodelo*
t	$\hat{P}_i = e^{(b_1 + b_t) + (\theta_1 + \theta_t) D_i}$
1	$\hat{P}_i = e^{8.33582 - 0.026233\ D_i}$
2	$\hat{P}_i = e^{8.64253 - 0.029934\ D_i}$
3	$\hat{P}_i = e^{8.79601 - 0.030287\ D_i}$
4	$\hat{P}_i = e^{9.272603 - 0.022705\ D_i}$
5	$\hat{P}_i = e^{9.072922 - 0.022675\ D_i}$

Sobre estos resultados podemos contrastar algunas hipótesis de interés:

(*i*) ¿Se mantiene la relación precio-distancia durante los cinco períodos? Para responder esta pregunta contrastamos la hipótesis:

$H_o: B_2 = B_3 = \ldots = B_5 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_5 = 0$ contra la alternativa H_a: existe al menos un $B_j \neq 0$ ó $\theta_j \neq 0$, $j = 2, \ldots, 5$. Debemos calcular los valores observados de los estadísticos t_{B_j} y $t\theta_j$ para cada $j = 2, 3, 4, 5$ (véase Cuadro 3).

Cuadro 3 **Estadísticos** *t* **calculados**

j	t_{B_j}	$t\theta_j$
2	2.087	–0.810
3	3.337	–0.937
4	7.543	0.878
5	5.346	0.836

Para un nivel de significación de tamaño $\alpha = 0.05$ y $m = 8$ (estamos probando ocho coeficientes) de las tablas del estadístico t de Bonferroni se obtiene: $t(^{\alpha}/_{2m}, 3890) = 2.74$.

Como $t(^{\alpha}/_{2m}, 3890)$ es mayor que algunos de los t calculados en el Cuadro 3, rechazamos la hipótesis de que la relación precio-distancia ha permanecido constante a través de los cinco períodos.

Esta prueba, junto con los resultados obtenidos del modelo ajustado, nos proporciona información sobre cuáles coeficientes contribuyen posiblemente al rechazo de la hipótesis. Ellos son B_3, B_4 y B_5. También nos indica que el gradiente se mantiene constante durante los cinco períodos (observe que los t_{B_j} son muy pequeños).

Con estas observaciones podemos tener idea de las respuestas a las preguntas (2) (¿Se conserva siquiera el nivel de precios? (ó (3) (¿Se conserva el gradiente?) formuladas al comienzo de la sección V.

La respuesta a la pregunta (2) es que el nivel de precios ha cambiado y para la (3) podemos concluir que el gradiente se ha conservado durante los cinco períodos.

Más formalmente, para responder a las preguntas (3) debemos calcular, para $m = 4$, $t(^{\alpha}/_{2m}, n\text{-}2T)$ el cual para $\alpha = 0.05$ es $t(^{\alpha}/_{2m}, 3890) = 2.50$ y compararlo, para la pregunta (2), con cada t_{B_j} y para la (3) con cada $t\theta_j$.

Hasta aquí hemos obtenido los siguientes resultados en el estudio de la relación precio-distancia para la ciudad de Medellín: primero, la relación se ha alterado con el tiempo; segundo, el nivel de precios ha cambiado con el tiempo; tercero, el gradiente ha permanecido constante durante los cinco períodos, todo esto a un nivel $\alpha = 0.05$.

Para verificar si la relación precio-distancia se ha "debilitado" con el tiempo, lo cual es equivalente contrastar simultáneamente las hipótesis H_o: $\theta_1 + \theta_j = 0$ contra la alternativa H_a: $\theta_1 + \theta_j < 0$, calculamos los estadísticos de la forma

$$t_j = \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_j}{[Var(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_1) + 2Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_j)]^{1/2}}$$

$$t_1 = \frac{\hat{\theta}_1}{S(\hat{\theta}_1)} \quad \text{para el período inicial.}$$

Ellos son: $t_1 = 7.229$

$t_2 = 10.45$

$t_3 = 12.69$

$t_4 = 13.33$

$t_5 = 10.04$

Para $m = 5$ y un nivel de significación igual a 0.05 obtenemos $t(\alpha/2m, 3890) = 2.6$. De aquí rechazamos H_o para todo $j = 1, 2, 3, 4, 5$, es decir, la relación no se altera con el tiempo.

Por último, podemos continuar respondiendo algunas hipótesis más sobre la relación precio-distancia, por ejemplo, cuál ha sido la tendencia del nivel de precios en Medellín durante los cinco períodos, empleando el procedimiento descrito anteriormente.

VII. CONCLUSIONES

1. La aplicación del Modelo ampliado a la ciudad de Medellín nos permite obtener información simultánea del comportamiento de la relación precio-distancia durante los cinco períodos de estudio: la relación no permanece inalterada con el tiempo. Los cambios que se efectúan en ella se muestran en el nivel de precios, mientras que el gradiente permanece constante. Esto último nos lleva a concluir que la estructura urbana de Medellín en tanto espacial no ha cambiado significativamente durante los cinco períodos.

2. El Nuevo Modelo permite el uso de toda la información al mismo tiempo, aumentando con ello los grados de libertad del modelo y, por tanto, mejorando las pruebas de hipótesis.

3. El Nuevo Modelo permite enriquecer los resultados del modelo desde el punto de vista inferencial empleando procedimientos estadísticos simultáneos, en el estudio de el gradiente, el nivel de precios y la estabilidad del modelo durante los T períodos de estudio.

4. El procedimiento de Bonferroni tiene su limitación: si m es grande los intervalos de confianza serán muy amplios y en las pruebas de hipótesis los puntos críticos serán grandes siendo entonces más difícil obtener significancia estadística. Sin embargo, existen otros procedimientos

estadísticos simultáneos que pueden ser empleados (véase por ejemplo, Seber [1977]).

5. Vimos que el proceso de ajuste del modelo requiere de la transformación de la variable dependiente P con el fin de poder emplear el método de los mínimos cuadrados en el modelo de regresión lineal múltiple. Una vez ajustado este modelo linearizado lo llevamos a su forma original utilizando una retransformación; este proceso de retransformación puede producir sesgos de importancia en la estimación de los parámetros del modelo. Para este caso los sesgos introducidos por el proceso de transformación pueden ser corregidos en gran parte por el factor $e^{\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}$, donde σ^2 es el estimador insesgado de la varianza del término de error, μ(véase Castaño [1985]).

6. Finalmente, el nuevo modelo puede ser ajustado empleando estadísticos comunes.

VIII. ANEXO. LA DESIGUALDAD DE BONFERRONI

Una de las técnicas de comparaciones múltiples más empleadas está basada en la llamada Desigualdad de Bonferroni.

Supongamos que tenemos m intervalos de confianza $H_1, H_2, \ldots, H_m$, uno para cada parámetro del modelo lineal. Sea $P(H_i)$ la probabilidad de que H_i contenga al i-ésimo parámetro y sea $P(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_m) = P(\bigcap_{i=1}^{m} H_i)$ la probabilidad de que cada intervalo H_i contenga a su respectivo parámetro simultáneamente. Esta probabilidad es llamada el Coeficiente de Confianza Simultáneo para la familia de m intervalos. Ahora, si $P(H_i) = 1-\alpha$ no es cierto que el Coeficiente de Confianza simultáneo sea también 1-α. Veamos porqué.

Supongamos que $P(H_i) = 1 - \alpha$

Entonces $P(\bigcap_{i=1}^{m} H_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{m} H_i)^c = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{m} H_i^c) \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} P(H_i^c) = 1 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$

Si todos los $\alpha_i = \alpha/m$, entonces:

$$P(\bigcap_{i=1}^{m} H_i \geq 1 - m(\alpha/m)$$

Si cada intervalo H_i tiene una tasa de error de $^{\alpha}/_{m}$ obtenemos que $P(\cap H_i) \geqslant 1\text{-}\alpha$. Esta última expresión es llamada Desigualdad de Bonferroni y muestra que si cada intervalo individual un Coeficiente de Confianza de $1\text{-}\alpha/m$, el Coeficiente de Confianza simultáneo será al menos de $1\text{-}\alpha$.

BIBLIOGRAFIA

Besley, David; Kuh, Edwin y Welch, Roy (1980). *Regression Diagnostics.* New York, John Wiley and Sons.

Brown, R.; Durbin, J. y Evans, J. M. (1975). "Techniques for Testing the Constancy of the Regression Relantioships". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B, 37. pp. 149-163.

Castaño, Elkin (1985). "Sesgos de transformación en el ajuste de modelos no-lineales". *Lecturas de Economía.* No. 16. Medellín, enero-abril.

Dunn, O. J. (1961). "Múltiple Comparisons Among Means". *Journal of the American Statistical Association.* 56. pp. 52-64.

Graybill, Franklyn (1961). *Introduction to Linear Statistical Models.* New York. Mac-Graw-Hill.

Hernández, Juan; Lotero, Jorge; Molina, Gloria y Castaño, Elkin (1985). "Los precios de la tierra y política urbana en Medellín y su área metropolitana". Medellín, Universidad de Antioquia-Centro de Investigaciones Económicas (CIE). Mec.

Johnston, J. (1975). *Métodos de Econometría.* Barcelona, Editorial Vicens-Vives.

Mills, Edwin (1972). *Studies in the Structure of the Urban Economy.* Baltimore, John Hopkins University Press.

Morrison, Donald (1974). *Multivariate Statistical Methods.* New York, MacGraw-Hill.

Netter, John and Wassermann, William (1974). *Applied Linear Statistical Models.* Homewood, Richard D. Irwin.

Villamizar, Rodrigo (1981). "Los precios de la tierra en Bogotá". 1955-1978". *Revista Cámara de Comercio de Bogotá.* Vol. 11 No. 41-42.

Seber, G.A.F. (1977). *Linear Regression Analysis.* New York, Wiley.

Thomas, J.J. (1983). *An Introduction to Statistical Analysis for Economist.* Londres, Weidenfeld and Nicholson.