Darío Vélez Botero
Guillermo Pérez Puerta
Javier Ramírez Montoya
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Antioquia

Indices de pobreza y funciones de bienestar

Lecturas de Economía. No. 23. Medellín, mayo-agosto de 1987. pp. 157-193

• **Resumen.** En el artículo: *"Indices de pobreza: una discusión metodológica"*, publicado en la revista *Lecturas de Economía No. 22*, presentamos tres índices P_1, P_2 y P_3. El primero es el porcentaje de pobres para una línea de pobreza dada. El segundo añade la brecha porcentual que existe entre la línea de pobreza y los ingresos medios de los pobres. El P_3 tiene en cuenta, además, el grado de desigualdad que hay entre los ingresos de los pobres. La ordenación con el índice P_1 es equivalente a una ordenación de funciones de bienestar –utilidad media– asociadas a funciones de utilidad crecientes con el ingreso. Esta propiedad de las funciones de bienestar: la de aumentar el bienestar con los ingresos, llamada la eficiencia, descubre la estructura económica que subyace en P_1. Las ordenaciones con P_2 son equivalentes a ordenaciones con funciones de bienestar que tienen la propiedad de la eficiencia y la equidad. Esta última propiedad se entiende en el sentido de que cualquier transferencia del ingreso, desde los niveles más altos hacia los más bajos, es progresiva, porque aumenta el bienestar. En P_3, además de la eficiencia y la equidad, aparece la sensitividad de las funciones de bienestar, puesto que los impactos de las transferencias son mayores cuando ellas están dirigidas a favorecer a los más pobres de la población.

• **Abstract.** *In the article:* "Indices de pobreza: una discusión metodológica" *published in the previous number of this journal we presented three indices P_1, P_2 and P_3. The first is based on the percentage of poor people below a fixed poverty line, the second adds a measure of the gap between the poverty line and the average income of the poor. While the third considers in addition the degree of inequality amongst the poor. This paper considers an ordering amongst distributions of income based on these three indices. The first turns out to be equivalent to welfare functions based simply on the supposition that utility rises with income. Indices based on P_2 are equivalent to welfare functions which increase with any transfer from a richer to a poorer person, that is with any progressive transfer. P_3 is shown to introduce the additional element whereby welfare rises more the poorer the person receiving a given transfer.*

INTRODUCCION

En un artículo publicado en el número anterior de esta revista: "Indices de Pobreza: una discusión metodológica", presentamos tres índices y sus propiedades teóricas. El primer índice (P_1) se define simplemente como el porcentaje de pobres para una línea de pobreza dada (un número real positivo z). El índice P_2 añade al P_1 : la brecha porcentual que existe entre la línea de pobreza y los ingresos medios de los pobres. Finalmente, el P_3 introduce una medida de desigualdad entre los ingresos de los pobres. Los tres índices tienen una estructura matemática común que los relaciona a unos con otros.

En este artículo abordaremos el problema de una manera diferente. ¿Cuál es la estructura económica que subyace en cada uno de estos índices? ¿Con qué clase de funciones de utilidad se relacionan? ¿Qué condiciones progresivas va imponiendo cada índice a las funciones de bienestar? ¿Se le puede fijar un tope máximo a la línea de pobreza y mantener los resultados? A estos interrogantes procuraremos dar respuesta en este artículo, basándonos en el documento: "Porverty Orderings and Welfare Dominance" de James E. Foster y Anthony F. Shorrocks.

Tal vez no sobre un comentario adicional. Son bien conocidas las interpretaciones intuitivas de la primera y segunda derivada de una función, pero no se puede afirmar lo mismo de la tercera derivada. Este documento de los investigadores que citamos antes muestra hasta qué punto el desarrollo de las dos ciencias es simultáneo. No se trata, solamente, de que la Economía acuda a la Matemática, como a un cuerpo supuestamente ya acabado, a solicitarle concurso para avanzar en su desarrollo, sino también de lo contrario: la Economía forzando nuevos usos e interpretaciones de aquella disciplina.

Hemos procurado hacer comprensible este artículo a cualquier lector que tenga un conocimiento de las ideas elementales de la matemática. Para ello, después de las formulaciones generales, hemos introducido un buen número de ejemplos.

I. ORDENES DE POBREZA

Dadas dos funciones F y G de distribución del ingreso (dos funciones del conjunto Γ), que pueden representar en la práctica, por ejemplo, las distribuciones de los ingresos de dos comunidades distintas o de la misma en diferentes períodos de tiempo, nos proponemos indagar si F es más pobre que G[1] o viceversa, o si no es posible hacer ninguna de las afirmaciones anteriores.

Fijada una línea de pobreza z_o y un índice cualquiera P se cumple una y sólo una de estas relaciones:

$$P(F, z_o) < P(G, z_o), \quad P(F, z_o) = P(G, z_o), \quad P(F, z_o) > P(G, z_o)$$

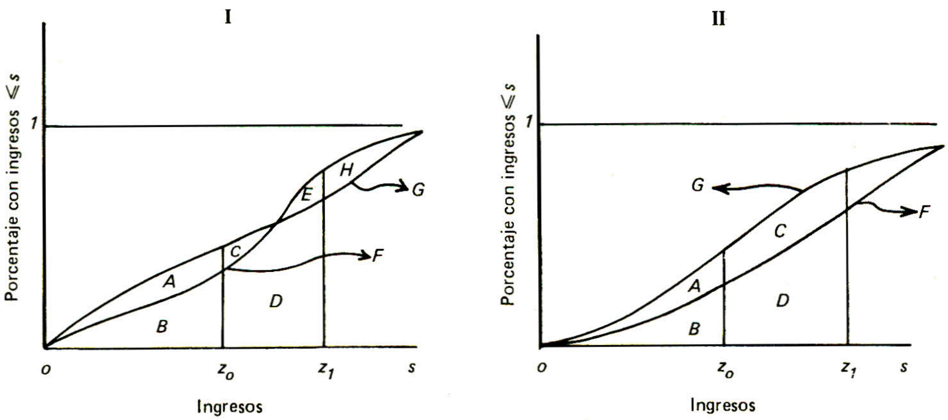
que se pueden resumir ordenadamente así: F es menos, igual o más pobre que G.

Ejemplo 1. Orden de pobreza para una línea y un índice de pobreza dados

Si la línea de pobreza es $z = 40$, el índice elegido es P_1, y para dos distribuciones arbitrarias F y G se tiene que $P_1(F, 40) = 0.48$ y $P_1(G, 40) = 0.43$, podemos concluir que G es menos pobre que F, puesto que un porcentaje menor de la población (43°/o) cae por debajo de la línea de pobreza en la distribución G.

La relación $\leqslant$ (menor o igual) para una línea de pobreza dada, z_o, y un índice P también fijado de antemano induce, entonces, una ordenación completa sobre el conjunto Γ^2. El problema que se presenta es que para una línea de pobreza z_o se pueda afirmar, por ejemplo, que F es menos pobre que G; pero para otra línea de pobreza razonablemente elegida z_1 el veredicto se invierta: G es menos pobre que F. En tal caso, ningún juicio concluyente se puede pronunciar entre F y G. Sin embargo, eso no significa que en ningún caso se puedan hacer comparaciones inequívocas o definitivas entre pares de funciones de Γ. Por ejemplo, si para dos funciones F y G, F es menos pobre que G cualquiera que sea la línea de pobreza, entonces para el índice elegido el pronunciamiento es contundente. En la gráfica siguiente se presentan algunos casos de los que hemos comentado.

Gráfico 1 **Comparaciones de pobreza**



Como vimos en el artículo anterior[3] el índice P_1 ("la relación del número de pobres") es la ordenada de la función de distribución correspondiente (la recta vertical). En el Gráfico 1-I, para la línea de pobreza z_o la ordenada de F es menor que la de G. Esto significa que $P_1(F, z_o) < P_1(G, z_o)$ y F es menos pobre que G si el patrón de pobreza es z_o. En cambio, en z_1 se invierte el fallo, siendo G menos pobre que F para el índice P_1. No existe, pues, entre F y G, en el Gráfico 1-I, un juicio definitivo que nos permita decidir, de acuerdo con la distribución de los ingresos de esas dos comunidades, cuál es en términos absolutos menos pobre que la otra. En el Gráfico 1-II, la afirmación no admite duda: F es menos pobre que G, según el índice P_1, para cualquier línea de pobreza.

Si el índice en consideración es P_2 entonces su representación gráfica viene dada, para una línea z_o, por el área bajo la curva respectiva dividida por z_o. Así, en el Gráfico 1-I, $P_2(F, z_o) = B/z_o$ y $P_2(G, z_o) = (A+B)/z_o$; luego $P_2(F, z_o) < P_2(G, z_o)$ y F es menos pobre que G según el índice P_2 para z_o. En z_1, $P_2(F, z_1) = (B+D+E)/z_1$ y $P_2(G, z_1) = (A+B+C+D)/z_1$ y se puede poner $P_2(F, z_1) < P_2(G, z_1)$ siempre que $E < A+C$. O sea, aunque se crucen las dos curvas existen casos en los que se pueden producir juicios inequívocos, en el sentido de que una de las distribuciones de ingreso es menos pobre que la otra para el índice P_2[4]. En 1-II se puede afirmar tajatemente que F es menos pobre que G para el índice P_2.

Definamos, pues, un orden parcial[5] $\vec{P}$ en el conjunto de las funciones de distribución del ingreso Γ.

$F \vec{P} G$ si y sólo si (sii) $P(F, z) \leqslant P(G, z)$ cualquiera que sea z (la línea de pobreza) en $\mathbf{R}_{++}$ (reales positivos sin el cero) y para algún z $P(F, z) < P(G, z)$. (1)

La relación $F \vec{P} G$ se interpreta diciendo que F es inequívocamente menos pobre que G para el índice elegido P.

La definición anterior puede ser muy restrictiva al exigir que se cumpla para cualquier valor de z. Podrían existir casos en que F es menos pobre que G hasta un cierto valor de z, a partir del cual ya no es razonable elegir la línea de pobreza; sin embargo, si para alguno de dichos valores extremos de z G es menos pobre que F, no se cumpliría la definición, no pudiéndose comparar F y G, aunque en la práctica F sería menos pobre que G para todos los valores realistas de z. En la última parte de este artículo veremos que la mayoría de los resultados obtenidos con esta definición se mantienen cuando se introduce un tope superior a la línea de pobreza.

II. EL ORDEN $\vec{P}_1$ BASADO EN LA "RELACION DEL NUMERO DE POBRES"

A. Caso general

Particularizando la definición (1) al caso en que el índice empleado sea P_1 nos queda definido el orden $\vec{P}_1$ de la siguiente manera:

$F \vec{P}_1 G$ sii $F(z) \leqslant G(z)$ para cualquier $z \in \mathbb{R}_{++}$ y $F(z) < G(z)$ para algún z. (2)

Basta señalar que $F(z)$ es la ordenada de la función F en el punto z para comprender el sentido de esta definición: F es inequívocamente menos pobre que G con relación al índice P_1, si y sólo si el gráfico de F nunca está por encima del gráfico de G y en algún punto está estrictamente por debajo de él.

Ejemplo 2. El orden $\vec{P}_1$ para dos funciones absolutamente continuas

Sean $F(s) = s^3$ y $G(s) = s^2$ dos funciones definidas en el intervalo $0 \leqslant s \leqslant 1$[6] (0 a 1.000 pesos). Presentemos a continuación algunos valores de F y G.

s	$F(s)$	$G(s)$
0	0	0
0.2	0.008	0.040
0.4	0.064	0.160
0.6	0.216	0.360
0.8	0.512	0.640
1.0	1.000	1.000

Para $0 < s < 1$, $F(s) < G(s)$ y podemos concluir que F es inequívocamente menos pobre que G para el índice P_1, lo que se designa $F \vec{P}_1 G$. Si la línea de pobreza fuera 0.6 (600 pesos), la comunidad cuya distribución de ingresos viene dada por F tiene un 21.6°/o de pobres contra un 36°/o de la población designada por G.

Introduzcamos, ahora, un conjunto de funciones de bienestar asociadas a cierta clase de funciones de utilidad.

$$\Omega_1 = \left\{ U: \Gamma \longrightarrow \mathbf{R} / U(F) = \int_0^{\infty} u(s)\, dF(s) \text{ para } u: \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tal que } u'(s) > 0 \quad \forall\, s \in \mathbf{R}_{++} \right\} \quad (3)$$

Desenredemos, paso a paso, el significado del conjunto Ω_1

1. Las funciones u minúsculas que figuran en Ω_1 se denominan funciones de utilidad, hacen corresponder a cada número real positivo s (un ingreso) un número real $u(s)$ designado: utilidad asociada al ingreso s. La condición $u'(s) > 0$ (primera derivada positiva) determina, simplemente, que las funciones de utilidad en Ω_1 deben ser crecientes con los ingresos: a mayor ingreso, mayor utilidad.

2. La $\int_0^{\infty} u(s)\, dF(s) = U(F)$ depende de dos funciones: la función de utilidad u y la función de distribución del ingreso F. Dicha integral es la media (o la esperanza matemática) de la función $u(s)$ [7]. En otras palabras, la utilidad media de u asociada a la distribución F.

3. Los elementos de Ω_1 son las U mayúsculas que se identifican como funciones de bienestar. Nótese que $U: \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}$, hace corresponder a cada función de distribución F un número real $U(F)$ que es el bienestar correspondiente a F. ¿Cómo se origina la U? Se elige, primero, una función de utilidad u y después para *cada* función de distribución se calcula la utilidad media de u que será el bienestar de la población correspondiente.

$$u \longrightarrow U: \begin{cases} F \longrightarrow U(F) = \int_0^{\infty} u(s)\, dF(s) \\ G \longrightarrow U(G) = \int_0^{\infty} u(s)\, dG(s) \end{cases}$$

$U(F)$, $U(G)$ son, respectivamente, el bienestar de las comunidades cuyas distribuciones de ingresos son F y G, bajo el supuesto de que se comparan con la misma función de utilidad u creciente con el ingreso. $U(F)$ y $U(G)$ son, también, la utilidad media de u correspondientes a F y G.

Dada la complejidad del conjunto Ω_1 nos parece conveniente proponer un ejemplo.

Ejemplo 3. Ordenes de bienestar en el caso continuo

Tomemos las funciones de distribución del ejemplo 2. O sea, $F(s) = s^3$ y $G(s) = s^2$ para $0 \leqslant s \leqslant 1$. Siendo F y G absolutamente continuas, son diferenciables: $dF(s) = 3s^2 ds$ y $dG(s) = 2sds$. Las funciones $f(s) = 3s^2$ y $g(s) = 2s$ se denominan funciones de densidad o probabilidad (Véase *la supra* nota 7).

a. Tomemos $u(s) = s$ $(s > 0)$ como función de utilidad. Para un ingreso, por ejemplo, de \$20.000 tendríamos $u(20.000) = 20.000$ unidades de utilidad. La función de utilidad elegida tiene primera derivada positiva $(u'(s) = 1 > 0)$, luego, $u(s)$ es creciente con el ingreso. Como vimos antes, una función de utilidad determina una sola función de bienestar que nos permite comparar diversas funciones de distribución del ingreso.

$$U(F) = \int_0^1 s dF(s) = \int_0^1 3s^3 ds = 3/4 = \mu_F = 0.75$$

$$U(G) = \int_0^1 2s^2 ds = 2/3 = \mu_G = 0.667$$

Para la función de utilidad elegida, $U(F) = \mu_F$ es la media aritmética de la distribución (\$750). Siendo el bienestar de F –la utilidad media– 750 y el de G de 667 –unidades en promedio de utilidad– concluimos que la comunidad cuya distribución de ingresos viene dada por F tiene más bienestar, para la función de utilidad elegida, que la comunidad cuyos ingresos los determina la distribución G.

En el ejemplo 2, mostramos que F era inequívocamente menos pobre que G para el índice P_1 : $F \vec{P}_1 G$ y ahora encontramos una relación equivalente en términos de funciones de bienestar $U(F) > U(G)$.

b. Si la función de utilidad fuera $v(s) = e^s$ $(s \geqslant 0)$ que también es creciente con el ingreso $(v'(s) = e^s > 0)$

$$V(F) = \int_0^1 e^s\,(3s^2)\,ds = 2.1548$$

$$V(G) = \int_0^1 e^s(2s)\,ds = 2$$

y nuevamente, $V(F) > V(G)$, el bienestar de F mayor que el bienestar de G –medido como la utilidad media de la función elegida $v(s) = e^s$–. Estamos preparados ya para presentar una formulación general de estas ideas.

Definamos un orden $\vec{\Omega}_1$, en el conjunto Ω_1 de la siguiente manera:

$F\ \vec{\Omega}_1\ G$ sii $U(F) > U(G)$ para *cualquier* función de bienestar U de Ω_1. (4)

Y un teorema debido a Bawa[8] nos permite inferir la equivalencia entre el orden $\vec{P}_1$ –definido a partir del índice P_1– y el orden $\vec{\Omega}_1$ –en el conjunto de las funciones de bienestar de Ω_1–.

Teorema 1

Para cualquier F, G de Γ. $F\,\vec{P}_1\,G$ sii (si y sólo si) $F\,\vec{\Omega}_1\,G$.

Utilizando (2) y (4) el teorema se puede escribir también:

$$F(s) \leqslant G(s) \ (\forall s \in \mathbf{R}_{++} \text{ y } < \text{ para algún } s) \ \text{ sii } \ U(F) > U(G) \ (\forall U \in \Omega_1) \tag{5}$$

$$F\,\vec{P}_1\,G \ \text{ sii } \ U(F) > U(G) \ \ \forall U \in \Omega_1 \tag{6}$$

Esta última equivalencia (6) se puede enunciar así: F es inequívocamente menos pobre que G para el índice P_1 si y sólo si el bienestar de F es mayor que el bienestar de G evaluados con *cualquier función de bienestar* asociada a *una función de utilidad creciente con el ingreso.*

El teorema 1 establece, pues, una correspondencia entre ordenaciones de pobreza basadas en el índice P_1 y ordenaciones de bienestar relacionadas con funciones de utilidad crecientes con el ingreso.

En el ejemplo 3 vimos que $F\,\vec{P}_1\,G$ era cierto y comprobamos para dos funciones de bienestar U y V –se tiene que cumplir para todas las que procedan de funciones de utilidad de primera derivada positiva– que $U(F) > U(G)$ y $V(F) > V(G)$.

B. Caso discreto

En el conjunto Ω_1 (3) figuran todas las funciones de distribución de Γ; vamos a restringirlo al subconjunto Ψ_1^* generando por aquellas funciones de Γ que son discretas.

Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector de ingresos –equivale a alguna distribución discreta–, u es una función de utilidad creciente con el ingreso y W la función de bienestar asociada; entonces, la utilidad media de $u(X)$ o, lo que es lo mismo, el bienestar de X por W es:

$W(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u(x_i)}{n}$, forma bien conocida de la media aritmética, en que se convierte la integral que aparece en (3) y

$$\Psi_1^* = \{W / W(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u(x_i)}{n} \text{ para } u: \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \text{ y } u'(s) > 0 \text{ para } s > 0\} \qquad (7)$$

será el conjunto de todas las funciones de bienestar de distribución de ingresos discreta. Naturalmente el teorema 1 se cumple para Ψ_1^* , que es subconjunto de Ω_1. Luego, si X, Y son vectores de ingresos

$$X\,\vec{P}_1\,Y \quad \text{sii} \quad X\,\vec{\Psi}_1^*\,Y \quad \text{para todo } W \in \Psi_1^* \qquad (8)$$

y se puede deducir, también, un corolario que facilita la comparación de X e Y cuando tienen el mismo número de elementos. Si X, Y tienen el mismo número de elementos n:

$X\,\vec{P}_1\,Y$ sii $x_i \geqslant y_i$ para todo i y $>$ para algún i. Siendo x_i, y_i los ingresos en orden no decreciente, del i-ésimo miembro de la comunidad. (9)

Ilustremos las ideas anteriores con un ejemplo.

Ejemplo 4. Ordenes de pobreza y de bienestar en el caso discreto

Sean X, Y dos vectores de ingresos para dos poblaciones que tienen respectivamente 4 y 5 personas.

$X = (23, 30, 42, 48)$

$Y = (19, 23, 28, 37, 45)$

Sean F y G las funciones de distribución de los ingresos; para que se cumpla $X \vec{P}_1 Y$ o, de manera equivalente, $F \vec{P}_1 G$, es necesario y suficiente que $F(s) \leqslant G(s)$ para todo s y $<$ para algún s, según la definición (2) de: "X es inequívocamente menos pobre que Y".

Escribamos, primero, la función F asociada al vector X.

X	$F(s)$
$0 \leqslant s < 23$	0
$23 \leqslant s < 30$	1/4
$30 \leqslant s < 42$	2/4
$42 \leqslant s < 48$	3/4
$48 \leqslant s$	4/4

Si tomamos un ingreso $s = 35$, entonces $F(35) = 2/4 = 0.5$ dice que el 50o/o de dicha población tiene ingresos menores o iguales a 35.

Comparemos, ahora, las dos funciones F y G para todos sus valores. Cuando el valor en el que se hace la comparación no está en el vector de ingresos de una de las poblaciones, lo colocaremos en negrilla para destacar esta situación.

X	$F(s)$	Y	$G(s)$
19	0	19	1/5 = 4/20
23	1/4 = 5/20	23	2/5 = 8/20
28	1/4 = 5/20	28	3/5 = 12/20
30	2/4 = 10/20	30	3/5 = 12/20
37	2/4 = 10/20	37	4/5 = 16/20
42	3/4 = 15/20	42	4/5 = 16/20
45	3/4 = 15/20	45	5/5 = 20/20
48	4/4 = 20/20	48	5/5 = 20/20

Para $s = 28, \quad F(28) = 5/20 < G(28) = 12/20$

se comprueba que el porcentaje de pobres en F (ó X) es menor que en G (ó Y). De la tabla anterior podemos concluir que X es inequívocamente menos pobre que Y ($X \vec{P}_1 Y$), bajo el índice P_1[9].

Pasemos, ahora, a comparar X e Y por órdenes medidos con funciones de bienestar derivadas de funciones utilitarias crecientes con el ingreso. Tomemos, dentro del ejemplo que venimos desarrollando, tres funciones de utilidad u, v, w y sus correspondientes funciones de bienestar W_1, W_2 y W_3.

a. $u(s) = s$ ya vimos que $u' > 0$

$$W_1(X) = \frac{u(23) + u(30) + u(42) + u(48)}{4} = \frac{(23 + 30 + 42 + 48)}{4} = 35.75$$

$W_1(Y) = 30.4$

En virtud de que $X \vec{P}_1 Y$ es cierto, se cumple que $W_1(X) > W_1(Y)$

b. $v(s) = e^s$ también $v'(s) = e^s > 0$ para $s > 0$

$$W_2(X) = \frac{e^{23} + e^{30} + e^{42} + e^{48}}{4} = 1.7585 \times 10^{20}$$

$W_2(Y) = 6.9892 \times 10^{18}$

y, nuevamente, $W_2(X) > W_2(Y)$

c. $w(s) = \sqrt{s} \quad w'(s) = 1/(2\sqrt{s}) > 0$ para $s > 0$

$$W_3(X) = (\sqrt{23} + \sqrt{30} + \sqrt{42} + \sqrt{48})/4 = 5.9205 \text{ (utilidad media)}$$

$$W_3(Y) = 5.4474$$

$$W_3(X) > W_3(Y).$$

Los resultados anteriores se pueden extender a una clase más general de funciones de bienestar Ψ_1. Las funciones W de Ψ_1^* reciben sus propiedades básicas de las funciones de utilidad crecientes con el ingreso a las cuales están asociadas. La idea es construir el conjunto Ψ_1 dándole a las funciones de bienestar directamente esas propiedades, independientemente de que estén asociadas o no a funciones de utilidad. Naturalmente, $\Psi_1^* \subset \Psi_1$ y la propiedad característica de los elementos de Ψ_1[10], ya sin derivarla explícitamente de las funciones de utilidad, es la eficiencia, que se enuncia así:

Si $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es un vector de ingresos; decimos que $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es obtenido de Y por un simple incremento si $x_j > y_j$ y $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$. La propiedad de la eficiencia es, entonces, que $W(X) > W(Y)$, siendo $W \epsilon \Psi_1$. En lenguaje corriente, W es una función de bienestar eficiente si al aumentar los ingresos de un solo miembro de la comunidad aumenta el bienestar.

El teorema enunciado en (8) se puede extender al conjunto Ψ_1.

Teorema 2

$$X \vec{P}_1 Y \quad \text{sii} \quad X \vec{\Psi}_1 Y. \tag{10}$$

Para entender plenamente este teorema propongamos un ejemplo.

Ejemplo 5. El orden de bienestar $\vec{\Psi}_1$

Sean $X = (25, 32)$ y $Y = (18, 23, 30)$. Verifiquemos, primero, que X es inequívocamente menos pobre que Y, o simbólicamente, $X \vec{P}_1 Y$.

X	$F(s)$	Y	$G(s)$
18	0	18	1/3 = 2/6
23	0	23	2/3 = 4/6
25	1/2 = 3/6	25	2/3 = 4/6
30	3/6	30	3/3 = 6/6
32	2/2 = 6/6	32	6/6

Nótese que si $X \vec{P}_1 Y$, $\mu(X) = (25 + 32)/2 = 28.5$ (la media de X), $\mu(Y) = (18+23+30)/3 = 23.66$, $\mu(X) > \mu(Y)$. Cuando se cumple $X \vec{P}_1 Y$, también se cumple $\mu(X) > \mu(Y)$.

Ahora, comprobemos que $X \vec{\Psi}_1 Y$, lo que significa que para cualquier función de bienestar $W \epsilon \Psi_1$, $W(X) > W(Y)$.

$X = (25, 32)$

$Y = (18, 23, 30)$

Para poderlos comparar hagamos una 3-repetición de X y una 2-repetición de Y. (Véase *la supra* nota 10).

$X_1 = (25, 32, 25, 32, 25, 32)$

$Y_1 = (18, 23, 30, 18, 23, 30)$

$W(X) = W(X_1), \quad W(Y) = W(Y_1)$

Hagamos una permutación en X_1 y Y_1 que tampoco modifica el bienestar.

$X_2 = (25, 25, 25, 32, 32, 32)$

$Y_2 = (18, 18, 23, 23, 30, 30)$

y

$W(X) = W(X_1) = W(X_2)$

$W(Y) = W(Y_1) = W(Y_2)$

Ahora se trata de pasar por simples incrementos desde Y_2 hasta X_2

$Y_3 = (25, 18, 23, 23, 30, 30)$

Por ser W una función de Ψ_1 es eficiente.

$W(Y_3) > W(Y_2) = W(Y)$

$Y_4 = (25, 25, 23, 23, 30, 30)$

$W(Y_4) > W(Y_3) > W(Y)$

$Y_5 = (25, 25, 25, 23, 30, 30)$

$W(Y_5) > W(Y)$

Continuando este procedimiento se llega, finalmente, a $W(X) > W(Y)$ lo que comprueba que $X \vec{\Psi}_1 Y$. Vale la pena reiterar que nos hemos ocupado de una función de bienestar W sin referencia a ninguna función de utilidad.

El orden parcial $\vec{P}_1$ inducido por el índice P_1 se conoce con el nombre de primer orden de dominación estocástica; por analogía, el orden $\vec{\Psi}_1$ se denomina primer orden de dominio del bienestar. El Teorema 2 establece una equivalencia exacta entre ambas ordenaciones descubriendo la estructura económica que subyace en el índice P_1 de "la relación del número de pobres", que está asociado y determinado a la vez por funciones de bienestar que son eficientes con los ingresos, en el sentido de que son sensibles al incremento de aquellos aumentando el bienestar. El uso, pues, del índice P_1 en los análisis de pobreza está relacionado únicamente con aspectos de eficiencia de las diferentes distribuciones. Si miramos la equivalencia de $\vec{P}_1$ con $\vec{\Psi}_1^*$ concluimos que el índice P_1 está entrelazado, también, con aquellas y sólo aquellas funciones de utilidad que son crecientes con los ingresos.

III. EL ORDEN $\vec{P}_2$ BASADO EN EL INDICE: "BRECHA DEL INGRESO PER-CAPITA DE LOS POBRES"

A. Caso general

Recordemos que el índice P_2 puede ser expresado de la siguiente manera:

$$P_2\,(F, z) = (1/z)\int_0^z F(s)\,ds \tag{11}$$

que es el área bajo la función de distribución F, dividida por la línea de pobreza z (Gráfico 1).

De (1) y (11) se puede escribir:

$$F\,\vec{P}_2\,G \quad \text{sii} \quad \int_0^z F(s)\,ds \leqslant \int_0^z G(s)ds \quad \forall z \in \mathbf{R}_{++} \text{ y } < \text{ para algún } z. \tag{12}$$

La expresión (12) es conocida con el nombre del segundo orden de dominación estocástica.

Como en el caso de P_1 introduzcamos un conjunto de funciones de bienestar Ω_2 así:

$$\Omega_2 = \{U \epsilon\, \Omega_1 / u''(s) < 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}_{++}\} \tag{13}$$

Se observa que las funciones de bienestar de Ω_2 son elementos de Ω_1 que agregan la condición de que la segunda derivada de la función de utilidad sea negativa.

Se puede definir un orden en Ω_2.

$$F\,\vec{\Omega}_2\,G \quad \text{sii} \quad U(F) > U(G) \quad \forall U \epsilon\, \Omega_2 \tag{14}$$

y se puede extender el Teorema 1 de Bawa a los órdenes $\vec{P}_2$ y $\vec{\Omega}_2$

$$F\,\vec{P}_2\,G \quad \text{sii} \quad F\,\vec{\Omega}_2\,G \tag{15}$$

Ejemplo 6. Los órdenes $\vec{P}_2$, $\vec{\Omega}_2$, en el caso continuo

Sea $F(s) = s^3$ y $G(s) = s^2$ para $0 \leqslant s \leqslant 1$

$$P_2(F, z) = (1/z) \int_0^z s^3 \, ds = (z^3/4)$$

$$P_2(G, z) = (1/z) \int_0^z s^2 \, ds = (z^2/3)$$

y se verifica, fácilmente, que $(z^3/4) < (z^2/3)$ $(0 < z \leqslant 1)$ excepto cuando $z = 0$. Luego, $F \vec{P}_2 G$.

Sea $u(s) = \sqrt{s}$ la función de utilidad, $u'(s) = (1/(2\sqrt{s})) > 0$ para $s > 0$, además $u''(s) = (-1/(4\, s^{3/2})) < 0$ para $s > 0$. La función de utilidad elegida cumple, pues, las dos condiciones requeridas: $u' > 0$ y $u'' < 0$

$$U(F) = \int_0^1 \sqrt{s}\,(3s^2)\, ds = (6/7) = 0.857$$

$$U(G) = \int_0^1 \sqrt{s}\,(2s)\, ds = (4/5) = 0.800$$

y $U(F) > U(G)$, lo que comprueba que $F \vec{\Omega}_2 G$. Vimos que cuando se cumple el orden $\vec{P}_2$ necesariamente se cumple el orden $\vec{\Omega}_2$. La afirmación en el otro sentido es más difícil de ejemplificar.

En el caso del orden $\vec{P}_2$ se puede establecer una equivalencia con un orden definido para la "curva generalizada de Lorenz"[11]. La curva de Lorenz se puede definir:

$$L(F, p) = (1/\mu_F) \int_0^p F^{-1}(q)\, dq$$

siendo μ_F la media de la distribución F y $0 \leqslant p \leqslant 1$.

La curva generalizada de Lorenz es $GL(F, p) = \mu_F\, L(F, p)$. Definamos, ahora, los dos órdenes correspondientes:

$F \vec{L}\, G$ sii $L(F, p) \geqslant L(G, p)$ para todo $0 \leqslant p \leqslant 1$ y $>$ para algún p. (16)

$F \vec{GL}\, G$ sii $GL(F, p) \geqslant GL(G, p)$ y $>$ para algún p. (17)

Para facilitar la comprensión de estas fórmulas recordemos que $L(F, 0.60) = 0.4$ significa que el 60º/o más pobre de la población posee en conjunto el 40º/o del ingreso. $GL(F, 0.60) = 35.000$ significa que si se repartieran los ingresos que posee el 60º/o más pobre entre toda la población, a cada persona le correspondería \$35.000.

Ahora podemos enunciar el teorema que establece una equivalencia entre estos órdenes.

Teorema 3

$F \vec{P}_2\, G$ sii $F \vec{\Omega}_2\, G$ sii $F \vec{GL}\, G$[12] (18)

F es inequívocamente menos pobre que G para el índice P_2 si y sólo si el bienestar de F es mayor que el bienestar de G medido como el promedio de utilidad de cualquier función de utilidad u que sea creciente con el ingreso $(u' > 0)$ y cóncava hacia abajo $(u'' < 0)$.

La otra equivalencia: F es inequívocamente menos pobre que G para P_2 si y sólo si cualquiera que sea el porcentaje p de los pobres (para una línea z arbitraria) se cumple que a cada persona de la población le correspondería un ingreso per-cápita mayor (en algunos casos igual) con F que con G, bajo el supuesto de que se repartieran los ingresos de los pobres entre toda la comunidad.

Ejemplo 7. El orden $\vec{P}_2$ versus el orden $\vec{GL}$

Ya vimos que para $F(s) = s^3$ y $G(s) = s^2$ siendo $0 \leqslant s \leqslant 1$ (miles de pesos), se tiene $P_2(F, z) = (z^3/4)$ y $P_2(G, z) = (z^2/3)$. Las medias son: $\mu_F = (3/4)(\$750)$ y $\mu_G = (2/3)$ y las inversas vienen dadas por:

$F^{-1}(q) = \sqrt[3]{q}$ y $G^{-1}(q) = \sqrt{q}$. Las curvas de Lorenz:

$$L(F, p) = (1/(3/4)) \int_0^p \sqrt[3]{q}\, dq = p^{4/3}$$

$$L(G, p) = p^{3/2}$$

y

$$GL(F, p) = (3/4)\, p^{4/3}, \quad GL(G, p) = (2/3)\, p^{3/2}$$

Como $F \overrightarrow{P_2} G$ se cumple, según vimos en el ejemplo 6, por el Teorema 3, $F \overrightarrow{GL} G$, es decir, $(3/4)\, p^{4/3} \geqslant (2/3)\, p^{3/2}$ y para algún valor de p la desigualdad debe ser estricta (>).

La siguiente tabla compara la función generalizada de Lorenz de F y G para diferentes valores de p.

p	$GL(F,p) = (3/4)\, p^{4/3}$	$GL(G, p) = (2/3)\, p^{3/2}$
0	0	0
0.2	0.088	0.060
0.4	0.221	0.169
0.6	0.380	0.310
0.8	0.557	0.477
1.0	$0.750 = \mu_F$	$\mu_F = 0.667$

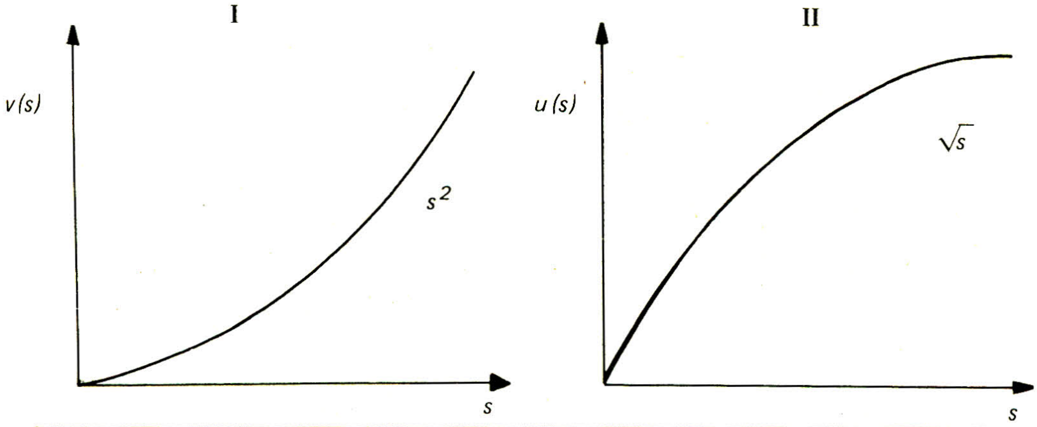
Si la línea de pobreza fuera tal que el 60°/o de la población es pobre, en la distribución de ingresos F a cada persona le correspondería \$380 –si los ingresos de los pobres se repartieran entre toda la comunidad– y en la distribución G les tocaría 310, por eso hemos dicho que F es menos pobre que G para el orden $\overrightarrow{GL}$[13].

En el conjunto $\Omega_2 \subset \Omega_1$ las funciones de bienestar tienen dos propiedades: eficiencia (por ser u creciente con el ingreso) y equidad (por ser u cóncava hacia abajo).

Ejemplo 8. La eficiencia y la equidad de las funciones de utilidad (y de bienestar)

Tomemos las funciones de utilidad $v(s) = s^2$ y $u(s) = \sqrt{s}$ que se representan en el Gráfico 2 (s en miles de pesos).

Gráfico 2 **Comparación de funciones de utilidad**



Ambas funciones de utilidad son eficientes; propiedad deseable: puesto que las funciones de utilidad reaccionan ante los incrementos de ingreso mejorando la utilidad.

Pero la función $u(s) = s^2$ es cóncava hacia arriba lo que privilegia los ingresos altos haciéndola regresiva desde el punto de vista social. Supongamos dos personas con ingresos respectivamente de 20 y 100 (miles de pesos) y admitamos que se produce una transferencia neta de 5 desde el más alto ingreso hacia el más pobre. Examinemos el efecto de dicha transferencia con ambas funciones de utilidad.

Función $v(s) = s^2$

	Persona 1		*Persona 2*	
Inicial	20	$v(20) = 400$	100	$v(100) = 10.000$
Final	25	$v(25) = 625$	95	$v(95) = 9.025$
Diferencia	+5	+ 225	– 5	– 975

La transferencia neta con $v(s) = s^2$ es negativa: una disminución de la utilidad en la sociedad, lo que muestra el carácter regresivo de esta función: la mejora de los pobres disminuye la utilidad (la magnitud de la cifra en sí misma no tiene importancia, puesto que los valores de dos funciones distintas de utilidad no son comparables cuantitativamente).

Función $u(s) = \sqrt{s}$

	Persona 1		*Persona 2*	
Inicial	20	$u(20) = 4.47$	100	$u(100) = 10$
Final	25	$u(25) = 5.00$	95	$u(95) = 9.75$
Diferencia	+5	+ 0.53	−5	−0.25

Aquí la transferencia neta es positiva.

Examinemos, ahora, la propiedad de la equidad en las funciones de bienestar.

Si $X = (20, 35, 45, 70)$ y $u(s) = \sqrt{s}$ el bienestar será

$W(X) = (\sqrt{20} + \sqrt{35} + \sqrt{45} + \sqrt{70})/4 = 6.366$

Hagamos una transferencia de 10 pesos entre el primero y el cuarto. $X_1 = (30, 35, 45, 60)$ y $W(X_1) = 6.462$; luego, la equidad de las funciones de bienestar garantiza que cualquier transferencia, desde niveles de ingreso más altos a los más bajos, eleva el bienestar de la comunidad.

B. Caso discreto

De manera similar a como definimos Ψ_1^* (7) podemos definir a Ψ_2^*:

$$\Psi_2^* = \{W \in \Psi_1^* / u''(s) < 0 \quad \text{para} \quad s > 0\} \tag{19}$$

y como en (8) el orden correspondiente y su equivalencia con $\vec{P}_2$

$$X \vec{P}_2 Y \quad \text{sii} \quad X \vec{\Psi}_2^* Y \tag{20}$$

Ejemplo 9. Los órdenes $\vec{P}_2$ y $\vec{\Psi}^*_2$ en el caso discreto

Tomemos los vectores de ingreso

$X = (21, 24, 29, 32)$ y $Y = (19, 23, 30, 33)$. Veamos que en este caso $X \vec{P}_1 Y$ es falso, en cambio $X \vec{P}_2 Y$ es cierto.

Para ilustrar el cálculo de P_2 desarrollemos

$$P_2(X, 29) = (3 \times 29 - (21 + 24 + 29))/4 \times 29 = 0.112 = (qz - q\mu_q)/nz$$

Línea de pobreza	P_1		P_2	
z	$P_1(X, z)$	$P_1(Y, z)$	$P_2(X, z)$	$P_2(Y, z)$
19	0	0.25	0	0
21	0.25	0.25	0	0.024
23	0.25	0.50	0.022	0.043
24	0.50	0.50	0.031	0.063
29	0.75	0.50	0.112	0.138
30	0.75	0.75	0.133	0.150
32	1.00	0.75	0.172	0.188
33	1.00	1.00	0.197	0.205

Del cuadro anterior, $P_1(X, 23) < P_1(Y, 23)$ y $P_1(X, 29) > P_1(Y, 29)$. No se puede afirmar que X es inequívocamente menos pobre que Y para P_1, ni la inversa. En cambio, $P_2(X, z) \leqslant P_2(Y, z)$ –no es difícil extender este resultado para todo $z > 0$– y $P_2(X, z) < P_2(Y, z)$ para algún z. O sea, $X \vec{P}_2 Y$ es cierto. Como se cumple el orden $\vec{P}_2$ debe verificarse el orden Ψ^*_2. Además, no puede cumplirse Ψ^*_1.

Para cualquier función de utilidad u con $u' > 0$ y $u'' < 0$ la función de bienestar correspondiente W debe verificar que $W(X) > W(Y)$. (Bienestar de X mayor que el bienestar de Y).

Si $u(s) = \sqrt{s}$

$W(X) = (\sqrt{21} + \sqrt{24} + \sqrt{29} + \sqrt{32})/4 = 5.13$

$W(Y) = 5.09$

$W(X) > W(Y)$

¿Qué significa que $\vec{\Psi}_1^*$ no es cierto? Que existen dos funciones de bienestar W_1, W_2 asociadas a u_1 y u_2 (crecientes con el ingreso pero no cóncavas hacia abajo) tales que:

$W_1(X) > W_1(Y)$ y $W_2(X) < W_2(Y)$

Sea $u_1(s) = s \quad (u_1' > 0, \quad u_1'' = 0)$

$W_1(X) = (21 + 24 + 29 + 32)/4 = 26.5$

$W_1(Y) = 26.25$

y $u_2(s) = s^3 \quad (u_2' > 0, \quad u_2'' > 0$ para $s > 0)$

$W_2(X) = (21^3 + 24^3 + 29^3 + 32^3)/4 = 20060.5$

$W_2(Y) = 20490.8$

Comprobemos, finalmente, que se cumple $\vec{GL}$[14].

p	$GL(X, p)$	$GL(Y, p)$
1/4	21/4 = 5.25	19/4 = 4.75
2/4	(21+24)/4 = 11.25	(19+23)/4 = 10.50
3/4	= 18.50	= 18.00
1	= 26.50	= 26.25

$GL(X, p) \geqslant GL(Y, p)$ ($y >$ para algún p), luego X es inequívocamente menos pobre que Y para el orden $\vec{GL}$.

Nos queda, ahora, la tarea de extender el conjunto Ψ_2^* a un conjunto más general Ψ_2 de funciones de bienestar, cuyas propiedades sean independientes de que tales funciones estén asociadas o no a funciones de utilidad.

Ya hemos visto que la "equidad" de las funciones de bienestar en Ψ_2^* deriva del hecho de que la función de utilidad es cóncava hacia abajo. Esta propiedad se puede atribuir directamente a las funciones $W \epsilon \Psi_2$ mediante la condición de Pigou-Dalton de que una transferencia progresiva del ingreso eleva el bienestar.

Decimos que el vector de ingresos X es obtenido de Y por una transferencia progresiva si existen i, j tales que $x_i - y_i = y_j - x_j > 0$, $x_j > y_i$ y $x_k = y_k$ para todo $k \neq i, j$. Entonces, W posee la propiedad de la equidad, o satisface la condición de Pigou-Dalton, si $W(X) > W(Y)$, para X obtenido de Y de la manera indicada.

El conjunto Ψ_2 sería:

$$\Psi_2 = \{ W \epsilon \Psi_1 / W \text{ tiene la propiedad de la equidad} \} \tag{21}$$

y se observa que las funciones de Ψ_2 heredan la propiedad de la eficiencia de Ψ_1.

Teorema 4

$$X \vec{P}_2 Y \quad \text{sii} \quad X \vec{\Psi}_2 Y \tag{22}$$

Ejemplo 10. Una transferencia progresiva

Sea $Y = (20, 27, 32, 45, 60)$. Vamos a hacer una transferencia de 3 pesos entre $y_4 = 45$ y $y_2 = 27$. Naturalmente, $x_2 = 30$ y $x_4 = 42$. Luego, $x_2 - y_2 = y_4 - x_4 = 3 > 0$ y $x_4 = 42 > y_2 = 27$ propiedad que asegura que, después de la transferencia, el que cede debe quedar en mejor condición que la del receptor en el estado inicial. El vector resultante será $X = (20, 30, 32, 42, 60)$ y postulamos que $W(X) > W(Y)$, o sea, que las transferencias desde los ingresos más altos hacia los más bajos deben mejorar el bienestar.

Ejemplo 11. El orden $\vec{P}_2$ y el orden $\vec{\Psi}_2$

Retomemos los vectores $X = (21, 24, 29, 32)$ y $Y = (19, 23, 30, 33)$. Ya vimos que $X \vec{P}_2 Y$ es cierto, comprobemos que $X \vec{\Psi}_2 Y$ también es cierto. Los ingresos totales en X son 106 y en Y son 105. Nos proponemos llegar desde Y hasta X mediante simples incrementos (eficiencia) y transferencias progresivas (equidad).

Sea $W \epsilon \Psi_2$.

$Y = (19, 23, 30, 33)$, completemos el peso de diferencia para acercarnos a X.

$Y_1 = (19, 23, 30, 34)$ se obtiene de Y por un simple incremento. Luego, $W(Y_1) > W(Y)$ por la eficiencia de W.

$Y_2 = (21, 23, 30, 32)$ se obtiene de Y_1 por una transferencia progresiva entre el primero y el cuarto miembro de esa comunidad. Luego:

$W(Y_2) > W(Y_1) > W(Y)$ por la propiedad de la equidad de W.

$Y_3 = X = (21, 24, 29, 32)$ se obtiene de Y_2 por una transferencia progresiva de un peso entre el segundo y el tercero.

Se concluye que

$W(X) > W(Y_2) > W(Y)$ y $W(X) > W(Y)$ que es la comprobación de que $X \vec{\Psi}_2 Y$.

Recalcamos que en la comprobación anterior no intervienen para nada las funciones de utilidad y confesamos que la comprobación en sentido inverso es más compleja.

Hemos visto, pues, que existe una equivalencia entre el segundo orden de dominación estocástica $(\vec{P}_2)$ y el segundo orden de dominio de bienestar $(\vec{\Psi}_2)$. Así el índice P_2 de la brecha del ingreso per-cápita está estrechamente relacionado con funciones de bienestar que poseen las propiedades de eficiencia y equidad. Si la equivalencia se mira con relación a Ψ_2^*, el índice

P_2 está asociado, en última instancia, con funciones de utilidad crecientes con el ingreso y cóncavas hacia abajo.

IV. EL ORDEN $\vec{P}_3$

En el caso del orden $\vec{P}_3$, basado en el índice de Foster, aunque la formulación matemática y las demostraciones revisten una complejidad mayor que en los índices anteriores, las ideas generales son una extensión bastante natural de los resultados precedentes. Brevemente presentaremos esas directrices.

$$\Omega_3 = \{U \epsilon\, \Omega_2 / u'''(s) > 0 \quad \text{para } s > 0\} \tag{23}$$

$$F\, \vec{\Omega}_3\, G \quad \text{sii} \quad U(F) > U(G) \quad \text{para todo} \quad U \epsilon\, \Omega_3 \tag{24}$$

y el teorema de Bawa se puede generalizar así:

$$F\, \vec{P}_3\, G \quad \text{sii} \quad F\, \vec{\Omega}_3\, G. \tag{25}$$

Las funciones de bienestar de Ω_3 poseen la propiedad de la eficiencia $(u' > 0)$, de la equidad $(u'' < 0)$ y añaden la característica de la sensitividad a las transferencias ($u''' > 0$, tercera derivada positiva).

Ejemplo 12. Sensitividad a las transferencias

En el ejemplo 6 propusimos como función de utilidad $u(s) = \sqrt{s}$ que tiene primera derivada positiva (eficiencia); segunda derivada negativa (equidad). Encontremos la tercera derivada

$$u''(s) = -\frac{1}{4\, s^{3/2}} \qquad u'''(s) = \frac{3}{8\, s^{5/2}} > 0 \quad \text{para } s > 0$$

En el ejemplo 8 vimos que la segunda derivada determina que cualquier transferencia de ingresos desde los niveles más altos a los más bajos, produce una transferencia neta positiva de la utilidad. Si T_o es esa transferencia (ver ejemplo), tenemos:

$$T_o = 0.53 - 0.25 = 0.28$$

Una transferencia de cinco pesos (o cinco mil) de una persona cuyos ingresos son 100 a una cuyos ingresos son 20, produce un aumento de la utilidad neta en 0.28.

Hagamos la transferencia de 5 pesos en un nivel de ingresos más alto, conservando la distancia de $80 entre los dos implicados.

Función $u(s) = \sqrt{s}\ (T_1)$

	Persona 1		Persona 2	
Inicial	70	$u(70) = 8.37$	150	$u(150) = 12.25$
Final	75	$u(75) = 8.66$	145	$u(145) = 12.04$
Diferencia		$+0.29$		-0.21

La transferencia neta, ahora, es $T_1 = 0.29 - 0.21 = 0.08$, sigue siendo positiva por ser cóncava hacia abajo la función de utilidad $(u'' < 0)$ pero, además, $T_o > T_1$ o sea que las transferencias son decrecientes con el aumento del nivel de ingresos inicial del beneficiado. Esta propiedad la impone la tercera derivada positiva y se denomina sensitividad a las transferencias, en el sentido de que los impactos sobre la utilidad o el bienestar (que es la utilidad media) son más fuertes cuando las transferencias de ingreso benefician a los más pobres de la población.

Examinemos la propiedad de la sensitividad en las funciones de bienestar. Sea $X = (20, 50, 70, 100, 160)$ y $u(s) = \sqrt{s}$. $W(X) = 8.512$. Hagamos una transferencia de 10 pesos entre el primero y el tercero. $X_1 = (30, 50, 60, 100, 160)$ y comparémosla con una transferencia entre el segundo y el cuarto. $X_2 = (20, 60, 70, 90, 160)$. Calculemos el bienestar, $W(X_1) = 8.589$ y $W(X_2) = 8.544$. En ambos casos, como era de esperar, aumenta el bienestar, pero el impacto más fuerte es en X_1 porque la transferencia va dirigida a los niveles más bajos del ingreso.

Ejemplo 13. El orden $\vec{P}_3$

Sean $X = (22, 23, 29)$, $Y = (20, 26, 27)$ dos vectores de ingreso. Comparemos $P_3 (X, z)$ con $P_3 (Y, z)$.

z	$P_3 (X, z)$	$P_3 (Y, z)$
20	0	0
22	0	0.0028
23	0.0006	0.0057
26	0.0123	0.0178
27	0.0187	0.0229
29	0.0337	0.0373

$$P_3 (X, 26) = (1/3 \times 26^2) ((26-22)^2 + (26-23)^2) = 0.0123.$$

Observando la tabla[15] concluimos $X \vec{P}_3 Y$. Sin embargo, el orden $\vec{P}_2$[16] no se cumple: $P_2 (X, 23) = 0.0145 < P_2 (Y, 23) = 0.0435$ y $P_2(X, 26) = 0.0897 > P_2 (Y, 26) = 0.0769$.

Para la función de utilidad $u(s) = \sqrt{s}$

$$W(X) = (\sqrt{22} + \sqrt{23} + \sqrt{29})/3 = 4.9571$$

$$W(Y) = 4.9224$$

y se comprueba $X \vec{\Psi}_3^* Y$.

El conjunto Ψ_3 y su orden $\vec{\Psi}_3$ se introduce de manera análoga a Ψ_2 dotando así, directamente, a las funciones de bienestar de la propiedad de la sensitividad.

El orden $\vec{P}_3$ es equivalente al orden $\vec{\Psi}_3$. Queda, pues, establecida la estrecha relación que hay entre el tercer orden de dominación estocástica y el tercer orden de dominio del bienestar. La introducción del índice P_3 en los análisis de pobreza va a la par con la utilización de funciones de bienestar que tienen las propiedades de la eficiencia, la equidad y la sensitividad a las transferencias que van hacia los ingresos más bajos.

Se ve, fácilmente, que si se cumple el orden $\vec{P}_1$ se verifica, también, el $\vec{P}_2$ (ver Gráficos 1-I y 1-II) y, desde luego, el $\vec{P}_3$. La recíproca, en cambio, no es cierta; hemos dado ejemplos en que se cumple $\vec{P}_2$ y no $\vec{P}_1$ y, también, $\vec{P}_3$ y no $\vec{P}_2$. (Ejemplos 9 y 13).

V. RESTRICCIONES A LA LINEA DE POBREZA

Todo nuestro análisis anterior está basado en la definición (1) de orden de pobreza que puede ser muy estricta –como vimos en la sección I– al imponer la condición de que para *cualquier* valor de z, el índice para la función F debe ser menor o igual que para G, y estrictamente menor para algún z.

Parece más razonable un límite superior máximo z' para la línea de pobreza, que dé cabida a los diferentes juicios sobre lo que debe ser exactamente dicho valor. ¿Qué efecto tiene esta modificación sobre los resultados obtenidos? Veamos que, en términos generales, se conservan todas las equivalencias entre los órdenes de pobreza y los órdenes de bienestar.

Sea X un vector de ingresos, llamaremos $X(z')$ el vector que resulta de sustituir en X todo ingreso superior a z' por z'. Podemos, en este caso, modificar la definición (1) de la siguiente manera:

$$X \vec{P}' Y \quad \text{sii} \quad P(X, z) \leqslant P(Y, z) \text{ para todo } z \leqslant z' \text{ y } < \text{ para algún } z < z'. \tag{26}$$

Nótese que hemos denotado $\vec{P}'$ el orden que corresponde a $\vec{P}$ cuando se toma como límite superior de la línea de pobreza z'. Con estas ideas podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema 5

Si X, Y son vectores de ingreso

$$\begin{aligned} &X(z')\, \vec{\Psi}_1\, Y(z') \quad \text{sii} \quad X \vec{P}_1' Y \\ &X(z')\, \vec{\Psi}_2\, Y(z') \quad \text{sii} \quad X \vec{P}_2' Y \\ &X(z')\, \vec{\Psi}_3\, Y(z') \quad \text{sii} \quad X \vec{P}_3' Y \text{ y } P_2(X, z') \leqslant P_2(Y, z') \end{aligned} \tag{27}$$

Se observa, entonces, que las equivalencias entre órdenes de pobreza y dominios de bienestar se mantienen sin modificación en el caso de los índices P_1 y P_2 y en P_3 se necesita la condición adicional de que $P_2(X, z') \leqslant P_2(Y, z')$.

Ejemplo 14. El orden $\vec{P}'_2$

Sean $X = (21, 24, 29, 32, 38, 48)$ y $Y = (19, 23, 30, 33, 40, 53)$ dos vectores de ingresos. Hasta $z \leqslant 33$ se cumple que $P_2(X, z) \leqslant P_2(Y, z)$ $(y <)$ puesto que las cuatro componentes de ambos vectores son las mismas que las de los vectores del ejemplo 9 (desde luego, habría que dividir ahora por $6z$ en lugar de $4z$). Sin embargo, para $z = 40$, por ejemplo, se invierte el orden $P_2(X, 40) = 0.233 > P_2(Y, 40) = 0.229$. Concluimos que el orden $\vec{P}_2$ no se cumple.

Si se estima, por ejemplo, que más allá de 33 no es razonable proponer una línea de pobreza, el orden $\vec{P}_2$ fallaría, ciertamente, en un valor que sería muy inapropiado para demarcar a los pobres.

Para $z' = 33$ se puede afirmar que $X \vec{P}'_2 Y$ es cierto puesto que $P_2(X, z) \leqslant P_2(Y, z)$ $(y <)$ para $z \leqslant 33$.

$X(33) = (21, 24, 29, 32, 33, 33)$

$Y(33) = (19, 23, 30, 33, 33, 33)$

Si $u(s) = \sqrt{s}$

$W(X(33)) = (\sqrt{21} + \sqrt{24} + \sqrt{29} + \sqrt{32} + \sqrt{33} + \sqrt{33})/6 = 5.3354$

$W(Y(33)) = 5.3109$ y

$W(X(33)) > W(Y(33))$ lo que comprueba $X(33)\ \vec{\Psi}_2\ Y(33)$.

En cambio $W(X) = 5.6026 < W(Y) = 5.6635$

Un comentario final –quizá un poco al margen– queremos hacer sobre esta última parte. La idea de proponer un tope máximo z' para hacer comparaciones de pobreza, si bien es cierto es perfectamente válida desde el punto de vista matemático, plantea, desde un ángulo más general, una interesante paradoja que podríamos formular así: Si pudiéramos ponernos de acuerdo en una medida que trazara una distinción clara entre los que son pobres y los que no lo son, sólo podríamos utilizarla, si a todos los que se consideran ricos se les redujeran –teóricamente– sus ingresos hasta el umbral razonable en el que se inicia la pobreza. O, soltando más la imaginación, al trazar una medida de la pobreza se está definiendo también un límite para la riqueza. Tal vez resulte apropiado citar aquí a Séneca.

La verdadera medida de la riqueza es no estar demasiado cerca ni demasiado lejos de la pobreza.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Dadas dos funciones F y G de distribución del ingreso y un índice P, se puede definir un orden parcial $(\vec{P})$ tal que $F \vec{P} G$ es cierto, si y sólo si, para cualquier valor z de la línea de pobreza, el índice de pobreza de F es menor o igual que el índice de G y para algún valor de z la desigualdad es estrictamente menor. Decimos, en este caso, que F es inequívocamente menos pobre que G para el índice P.

Si consideramos una función de utilidad u, definida en los reales positivos (o el cero), que representarán ingresos y una distribución de ingresos F; a la utilidad media de u para esa función F la llamaremos el bienestar de F $(U(F))$.

En el conjunto Ω_1 de todas las funciones de bienestar determinadas por funciones de utilidad crecientes con el ingreso $(u' > 0)$ se puede definir un orden $\vec{\Omega}_1$. La expresión $F \vec{\Omega}_1 G$ es equivalente a la afirmación de que el bienestar de F es mayor que el bienestar de G para cualquier función de bienestar procedente de una función de utilidad creciente con el ingreso (propiedad de la eficiencia). Un teorema de Bawa establece una equivalencia entre el orden $\vec{P}_1$ (asociado al índice P_1: "relación del número de pobres") y el orden $\vec{\Omega}_1$, que se podría formular así: si para cualquier valor de la línea de pobreza el porcentaje de pobres con F es menor o igual que con G (y estrictamente menor para algún z) se cumple, también, que para cualquier función de bienestar de Ω_1, el bienestar de F es mayor que el de G. La recíproca también es cierta. Y esta equivalencia revela la estructura económica del índice P_1.

Del conjunto Ω_1 y su orden $\vec{\Omega}_1$ se puede desprender un caso particular importante cuando nos referimos a funciones de distribución del tipo discreto (vectores de ingresos); en este caso, el conjunto se designa Ψ_1^* y el orden $\vec{\Psi}_1^*$ y las ideas son básicamente las mismas. Lo que resulta novedoso considerar es si es posible definir –en el caso discreto– un conjunto de funciones de bienestar que reciban directamente la propiedad de la eficiencia sin estar relacionadas necesariamente –aunque sin excluirlas– con las funciones de utilidad de primera derivada positiva. La respuesta es afirmativa definiendo la eficiencia así: una función de bienestar es eficiente si al aumentar el ingreso de un solo miembro de la comunidad se incrementa el bienestar. Al conjunto de dichas funciones lo llamamos Ψ_1 –tiene como subconjunto Ψ_1^*– y al orden $\vec{\Psi}_1$. Y se puede probar que los órdenes $\vec{P}_1$ y $\vec{\Psi}_1$ son equivalentes. La conclusión de todo ésto es que cuando se utiliza en análisis de pobreza el índice P_1, se hace referencia exclusivamente a los aspectos de la eficiencia de las diferentes distribuciones.

En el índice P_2 construimos un conjunto Ω_2 de funciones de bienestar relacionadas con funciones de utilidad que además de ser crecientes con el ingreso *($u' > 0$)* son cóncavas hacia abajo *($u'' < 0$)*. Esta propiedad adicional se denomina equidad y significa que cualquier transferencia de ingresos de los niveles más altos a los más bajos aumenta el bienestar de la comunidad. Un teorema de Bawa demuestra que los órdenes $\vec{P}_2$ y $\vec{\Omega}_2$ son equivalentes. Lo que conduce a la idea de que el índice P_2 exhibe, en los análisis de pobreza, las propiedades de eficiencia y equidad de las funciones de bienestar con las que está entrelazado. En el caso discreto se pueden construir los órdenes $\vec{\Psi}_2^*$ y $\vec{\Psi}_2$, equivalentes a $\vec{P}_2$, siguiendo las directrices generales del índice P_1.

Se puede demostrar, también, que el orden $\vec{P}_2$ equivale a un orden derivado de la curva generalizada de Lorenz *($\vec{GL}$)*. La curva generalizada de Lorenz mide los ingresos promedios que le corresponderían a cada persona de la comunidad si los ingresos totales de los pobres se repartieran entre todos sus miembros. F es inequívocamente menos pobre que G para P_2 si y sólo si ese promedio de ingresos generado por los pobres es mayor o igual (y la desigualdad estricta para algún valor) con F que con G. El orden $\vec{P}_2$ equivale, pues, al orden $\vec{GL}$.

El índice P_3 y el conjunto Ω_3 añade la condición de que la tercera derivada sea positiva *($u''' > 0$)*, que se conoce con el nombre de sensitividad y que significa que las funciones de bienestar son más sensibles a las transferencias que van hacia los más pobres de la población. Una transferencia que ocurra, por ejemplo, en los niveles medios de ingreso produce un aumento del bienestar mucho menor que si la misma transferencia va hacia los niveles más bajos del ingreso. También se pueden extender los resultados, en el caso discreto, de $\vec{\Psi}_3^*$ a $\vec{\Psi}_3$.

Finalmente, vimos que, si se impone un tope máximo a la línea de pobreza, para evitar comparaciones en puntos en que sería irrelevante hacerlo, las propiedades y teoremas demostrados se mantienen en el caso discreto con muy pocas restricciones.

NOTAS

1 Con mayor precisión: si la distribución de los ingresos representada por F es más pobre que la distribución de los ingresos representada por G.

2 Una relación de orden cumple tres propiedades. Si F, G y H son elementos de Γ, se tiene:

Reflexividad: $P(F, z_o) \leqslant P(F, z_o)$

Transitividad: Si $P(F, z_o) \leqslant P(G, z_o)$ y $P(G, z_o) \leqslant P(H, z_o)$

entonces $P(F, z_o) \leqslant P(H, z_o)$.

Antisimetría: Si $P(F, z_o) \leqslant P(G, z_o)$ y $P(G, z_o) \leqslant P(F, z_o)$

entonces $P(F, z_o) = P(G, z_o)$

El orden es completo, significa que para dos funciones cualesquiera F, G se cumple necesariamente una de las relaciones siguientes:

$P(F, z_o) \leqslant P(G, z_o)$ ó $P(G, z_o) \leqslant P(F, z_o)$.

3 Vélez Botero, Darío; Pérez Puerta, Guillermo y Ramírez Montoya, Javier. "La medición de la pobreza: una discusión metodológica". *Lecturas de Economía.* No. 22, enero-abril de 1987.

4 Cuando el área $E + H \leqslant A + C$

5 El orden $\vec{P}$ es parcial porque no todas las distribuciones son comparables por él. Existen, entonces, distribuciones F y G en Γ de las cuales no se puede afirmar que F

es inequívocamente menos pobre que G, ni tampoco que G es inequívocamente menos pobre que F. Ya vimos ejemplos de ésto en el Gráfico 1.

6 Estrictamente hablando están definidas en **R**+ así:

$$G(s) = \begin{cases} s^2 & 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 1 & s > 1 \end{cases}$$

7 $U(F) = \int_0^{\infty} u(s)d\,F(s)$, esta definición es muy general porque las funciones de distribución de Γ pueden corresponder a funciones de probabilidad del tipo llamado discreto, continuo o mixto. En particular, en el caso continuo (o mejor, absolutamente continuo) la función de distribución F es diferenciable en todo punto y $dF(s) = f(s)\,ds$, siendo $f(s)$ la función de densidad o de probabilidad de dicha distribución. En tal caso:

$U(F) = \int_0^{\infty} u(s)f(s)ds = E[u(S)]$ que es la forma más conocida de la esperanza matemática de $u(S)$.

8 Bawa, V. "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects". *Journal of Financial Economics*. No. 2, 1975, pp. 95, 121.

9 No se puede olvidar que el orden $\vec{P}_1$ es parcial. Así, si $X = (20, 28, 40, 50)$ y $Y = (20, 22, 45, 60)$. Para $s = 22$, $F(22) = (1/4) < G(22) = (2/4)$ y para $s = 40$, $F(40) = (3/4) > G(40) = (2/4)$, luego, no se puede afirmar que $X \vec{P}_1 Y$, ni tampoco que $Y \vec{P}_1 X$.

10 Los elementos de Ψ_1 deben poseer otras dos propiedades, más de carácter matemático que económico, para que se puedan generalizar los resultados de Ψ_1^* a Ψ_1.

Simetría: Si el vector de ingresos X es obtenido de Y por una permutación de sus elementos, $W(X) = W(Y)$.

m-Repetición: Si el vector de ingresos X se forma a partir del Y, por una m-repetición: $X = (Y, Y, \ldots, Y)$, $W(X) = W(Y)$.

11 Vélez Botero, Darío; Pérez Puerta, Guillermo y Ramírez Montoya, Javier. *Op. cit.*

12 Omitimos las pruebas de todos los teoremas, no sólo por la complejidad de algunas de ellas, sino, también, para evitar un recargo excesivo del texto.

13 Cuando las medias de las dos distribuciones son iguales: $\mu_F = \mu_G$, resulta un caso particular importante: los juicios de pobreza se traducen en juicios de desigualdad del ingreso.

$GL(F, p) = \mu_F L(F, p)$, $\quad GL(G, p) = \mu_G L(G, p)$

$F \overrightarrow{GL} G$ sii $GL(F, p) \geqslant GL(G, p)$ $(y >)$ sii $L(F, p) \geqslant L(G, p)$ $(y >)$ sii $F \vec{L} G$.

Luego, los órdenes $\overrightarrow{GL}$ y $\overrightarrow{L}$ son equivalentes y la curva de Lorenz da una medida de la desigualdad del ingreso. Nótese, en este caso, que por ir la curva de Lorenz $L(F, p)$ por encima de $L(G, p)$, la brecha de desigualdad y el coeficiente de Gini de F es menor que el de G. En resumen, si las medias de F y G son iguales y F es menos pobre que G para el orden $\overrightarrow{GL}$ (o también $\overrightarrow{P}_2$), entonces, de manera equivalente, F es menos desigual para la distribución del ingreso que G, medida por la curva de Lorenz o el coeficiente de Gini.

14 El orden $\overrightarrow{P}_2$ no equivale al orden $\overrightarrow{L}$ (curva de Lorenz) como lo demuestra el siguiente contraejemplo:

Sea $X = (21, 24, 29, 33)$, $Y = (19, 23, 32, 32)$ los ingresos totales de X son \$107 y los de Y, \$106. Veamos que $X \overrightarrow{P}_2 Y$ es cierto, pero $X \overrightarrow{L} Y$ es falso.

z	$P_2(X, z)$	$P_2(Y, z)$
19	0	0
21	0	0.024
23	0.022	0.043
24	0.031	0.063
29	0.112	0.138
32	0.172	0.172
33	0.189	0.197

Luego, $X \overrightarrow{P}_2 Y$ cierto.

p	$L(X, p)$	$L(Y, p)$
1/4 = 0.25	21/107 = 0.196	0.179
2/4 = 0.50	**(21 + 24)/107 = 0.421**	**0.396**
3/4 = 0.75	= 0.692	0.698
4/4 = 1.00	= 1.000	1.000

$L(X, 0.5) > L(Y, 0.5)$ y $L(X, 0.75) < L(Y, 0.75)$.

15 La comparación entre $P_3(X, z)$ y $P_3(Y, z)$, estrictamente hablando, debe hacerse para todo $z > 0$.

Para $z < 20$, $P_3(X, z) = 0 \leq P_3(Y, z) = 0$

Analicemos, a manera de ilustración, un intervalo intermedio, digamos:

$23 \leq z < 26$.

$$P_3(X, z) = [(z-22)^2 + (z-23)^2]/(3z^2)$$

$$P_3(Y, z) = (z-20)^2/(3z^2)$$

Como los denominadores son iguales basta comparar los numeradores.

Hay que probar que:

$(z-22)^2+(z-23)^2 \leqslant (z-20)^2$

$z^2-2z(22+23-20)+22^2+23^2-20^2 \leqslant 0$

$f(z)=z^2-50z+613 \leqslant 0$

Como $23 \leqslant z < 26$

$f(23)=-8 \leqslant 0$ $f(26)=-11$. La función alcanza un mínimo en $z=25$, $f(25)=-12$ y se anula fuera del intervalo estudiado: en 28.5 y 21.5 (aproximados). Luego, $P_3(X,z) \leqslant P_3(Y,z)$ para $23 \leqslant z < 26$.

Para $z \geqslant 29$

$(z-22)^2+(z-23)^2+(z-29)^2 \leqslant (z-20)^2+(z-26)^2+(z-27)^2$ que se transforma en:

$24.5 \leqslant z$, luego se cumple por ser $z \geqslant 29$.

16 Por cumplirse el orden $\vec{P}_3$ y no verificarse el $\vec{P}_2$, se debe cumplir el $\vec{\Omega}_3$ y no el $\vec{\Omega}_2$. Decir que no se cumple el $\vec{\Omega}_2$ significa que existe una función de utilidad $u(s) > 0$ con $u' > 0$, $u'' < 0$ y u''' negativa para algún valor de $s > 0$. Dejamos al lector el examen del siguiente caso:

Tomemos dos funciones de distribución $F(s)=14.5s^2/1450$ y $G(s)=(s^3+45s^2)/1450$ definidas en el intervalo $0 \leqslant s \leqslant 10$ y como función de utilidad propongamos $u(s)=500s-s^3$ para $0 \leqslant s \leqslant 10$.

BIBLIOGRAFIA

Atkinson, Anthony B. "On the Measurement of Inequality". *Journal of Economic Theory*. Vol. 2 (1970).

Foster, James E. y Shorrocks, Anthony F. "Poverty Orderings and Welfare Dominance". s.p.i. Mec.

Sen, Amartya. "Poverty: An Approach to Measurement". *Econometrica*. Vol. 44, No. 2. March 1976.