Darío Vélez Botero
Guillermo Pérez Puerta
Javier Ramírez Montoya

La medición de la pobreza: una discusión metodológica

Lecturas de Economía No. 22. Medellín, enero-abril de 1987. pp. 173-203

● **Resumen**. En este trabajo se presentan, inicialmente, tres índices de pobreza construídos ordenadamente bajo la perspectiva metodológica de que cada uno retiene las propiedades teóricas del anterior y supera alguna falla importante del mismo. El primer índice (P_1) tiene en cuenta el porcentaje de los pobres para una línea de pobreza elegida. El segundo, (P_2) es sensible, además, a las pequeñas mejoras que se produzcan en el ingreso de los pobres. El tercero, (P_3) detecta cuándo las transferencias del ingreso favorecen a los de más bajo nivel. Finalmente, se presenta otro índice equivalente en algunos aspectos al tercero (P_3), que tiene notable interés en esta teoría. La elección de una medida apropidada de la pobreza, si bien es cierto no es ni remotamente la solución del problema, si es un paso adelante: un reto para los gobernantes, una forma para dilucidar avances y retrocesos.

● **Abstract.** This article starts by presenting three related indices of poverty constructed under the condition that each retains the theoretical properties of those prior but introduces important new elements. The first index (P_1) accounts simply for the number of people below a given poverty line. The second (P_2) is not just sensitive to this but also to increases in the income of the poor which are not sufficient to remove them from poverty. The third (P_3) includes the additional property that improvements in the income of the poorest of the poor receive more weight than the same improvement in the better off of the poor. A variant of P_3 of considerable theoretical interest is also discussed. The choice of an appropriate measure of poverty is not a solution to the problem but an important step forward in that it serves as an indicator of advances.

Introducción

Ahora que se discute en el país el tema de la pobreza absoluta –dolorosa realidad que agobia a tantos de nuestros compatriotas– nos parece importante divulgar una investigación muy reciente[1] que, enriqueciendo los esfuerzos de muchos investigadores anteriores, presenta los principales índices de pobreza, sus ventajas y limitaciones y, además, la relación estrecha que guardan con la teoría económica del bienestar[2].

Creemos que este trabajo da unas bases para la búsqueda y elección de una medida apropiada de la pobreza, que si bien es cierto no es ni remotamente la solución del problema, sí es un paso adelante: un reto para los gobernantes, una forma para dilucidar avances y retrocesos. Desde luego, no se nos escapa, que las ideas muy generales que aquí presentamos no resuelven muchas de las dificultades prácticas que hay que afrontar en la construcción de uno de tales índices.

Es inevitable un tratamiento matemático en el manejo teórico de estos problemas, pero nos hemos esforzado, sin perder rigor lo esperamos, en simplificar el simbolismo y evitar la excesiva manipulación de fórmulas y conceptos de aquella disciplina; es más, nos hemos propuesto hacer accesibles a cualquier lector todos los resultados aquí presentados; para ello hemos ilustrado todas las propiedades a través de ejemplos sencillos que darán claridad a los enunciados abstractos. Así, pues, un lector sin formación matemática podrá sacar provecho si se despreocupa de los formulismos y sigue con atención los ejemplos numéricos.

I. Las funciones de distribución del ingreso

Todos los índices que estudiaremos aquí están asociados a una cierta clase de funciones estadísticas, llamadas funciones de distribución, definidas sobre los números reales no-negativos que representarán los ingresos. Al conjunto de dichas funciones lo denotaremos por: Γ.

Si $F \in \Gamma$, es decir, si F es una de tales funciones, F cumple las siguientes propiedades:

a. $F: R_+ \longrightarrow [0, 1]$. Es decir, si s es un número real positivo o cero (un ingreso) $0 \leqslant F(s) \leqslant 1$, siendo $F(s)$, la proporción (o porcentaje) de la población que tiene ingresos inferiores o iguales a s. Por ejemplo, si F (29.500) = 0.27 esto significa que el 27°/o de los miembros de esa comunidad tienen ingresos, digamos mensuales, inferiores o iguales a $29.500.

b. $F(0) = 0$

c. Para algún ingreso finito s_p, $F(s_p) = 1$ (todos están por debajo de dicho ingreso, aunque puede haber algunos que lo igualen).

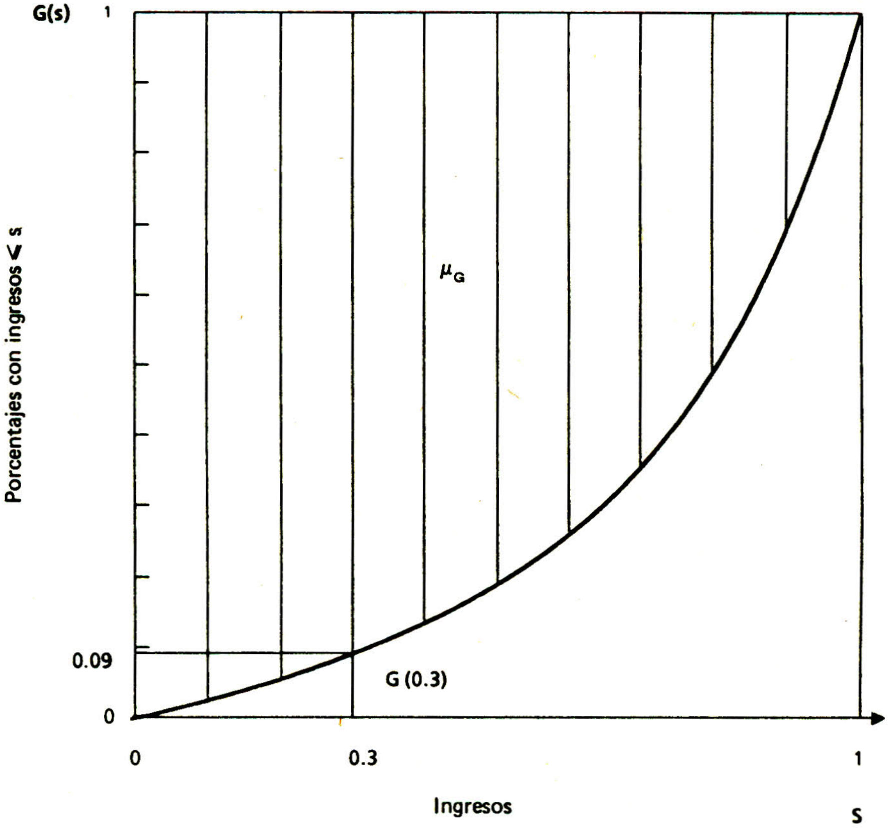
d. La función F es no-decreciente con el incremento de los ingresos y continua a la derecha.

En Γ existen tres clases de funciones: las absolutamente continuas, las discretas y aquellas que son una mezcla de las dos anteriores. Algunos ejemplos precisarán esta distinción.

Ejemplo 1. Una función absolutamente continua

Sea $G(s) = s^2$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ una función que relaciona ingresos entre \$0 y \$1.000; no es muy útil en la práctica, pero por su sencillez muy apropiada para comprender la teoría. Si, por ejemplo, $G(0.3) = (0.3)^2 = 0.09$; nos dice que el 9°/o de dicha población tiene ingresos inferiores a \$300. El Gráfico 1 nos muestra dicha distribución. El área rayada es la media aritmética de los ingresos de la misma.

Gráfico 1 **La distribución** $G(s) = s^2$



Ahora, si tenemos:

$$\mu_G = \int_0^1 (1 - G(s))\,ds = 2/3 = 0.667$$

Para esa población hipotética en la que los ingresos fluctúan entre \$0 y \$1.000, el promedio es \$667. La forma de la curva elegida tiende a exagerar la media, lo que no es muy realista, pero una función apropiada en la práctica (por ejemplo, la logarítmico-normal) exige un manejo matemático mucho más complicado.

Ejemplo 2. Una función discreta

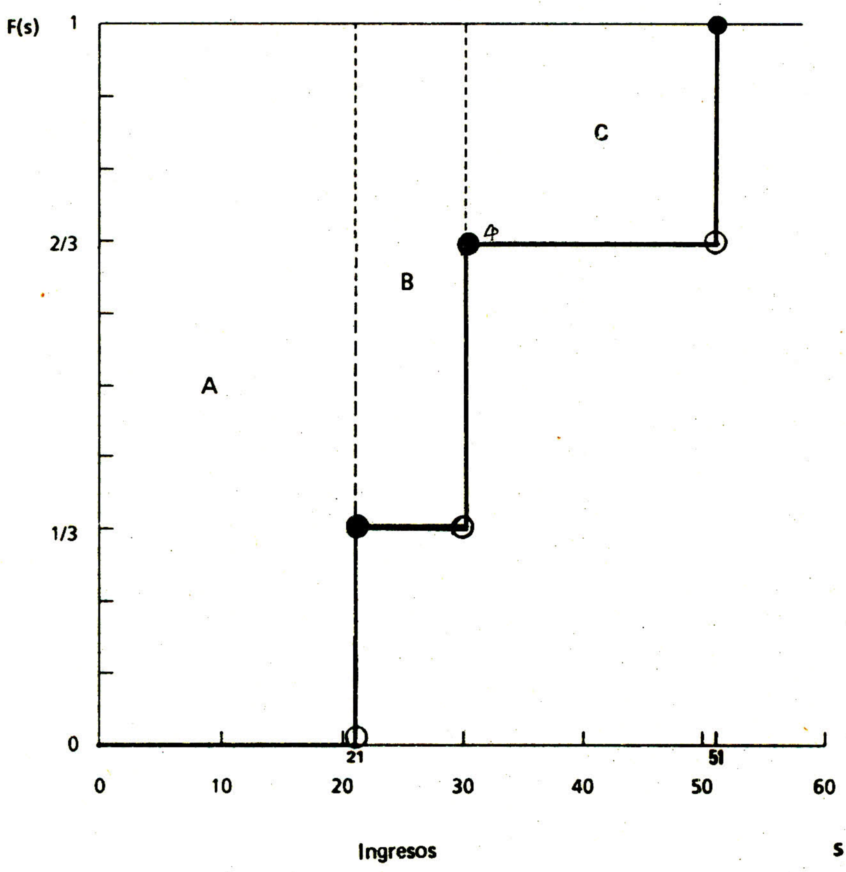
Otro tipo de funciones de distribución es aquel que está relacionado con las funciones de probabilidad discretas.

Supongamos el siguiente vector de ingresos $X = (21, 30, 51)$, una población de $n = 3$ personas, la primera de las cuales tiene ingresos mensuales de \$21.000. La función de distribución F correspondiente a X sería:

Ingresos s	Porcentajes con ingresos menores o iguales a s $F(s)$
$0 \leqslant s < 21$	0
$21 \leqslant s < 30$	1/3
$30 \leqslant s < 51$	2/3
$51 \leqslant s$	1

La representación gráfica de F sería la que indica el Gráfico 2.

Gráfico 2 **La función de distribución de X = (21, 30, 51)**



Se cumple también que la media $\mu(X)$ es el área $A + B + C$. Para nuestro ejemplo:

$$\mu(X) = \int_0^{51} (1 - F(s))\, ds = A + B + C = (21 + 30 + 51)/3 = 34$$

En el caso discreto nos referiremos indistintamente al vector de ingresos X o a su función de distribución F.

II. Definición de índice de pobreza

Un índice de pobreza P es una función que hace corresponder a una función de distribución F y a una línea de pobreza z un número $P(F, z)$ entre cero y uno. En la notación usual matemática:

$$\begin{aligned} P: \Gamma \times \mathbf{R}_{++} &\longrightarrow [0, 1] \\ (F, z) &\longrightarrow P(F, z), \quad 0 \leqslant P(F, z) \leqslant 1 \end{aligned}$$

Siendo $\mathbf{R}_{++}$, los reales positivos sin el cero.

El valor $P(F, z) = 0$ indica que para la línea z elegida (un ingreso que define a los pobres) no hay pobres y $P(F, z) = 1$ implica que todos, sin excepción, son pobres. Ambas situaciones extremas son ilusorias: el criterio general realista es que mientras más próximo sea P a cero menor es la medida de pobreza de la población cuya distribución de ingresos viene dada por F.

En los análisis de la pobreza la determinación de una línea apropiada de pobreza –"problemas de identificación"– que permita identificar a aquellos que son pobres ha sido uno de los objetivos metodológicos más importantes; sin embargo, forzoso es admitir que aquella elección encierra un grado de arbitrariedad considerable. En años recientes la investigación se ha dirigido a la construcción de índices adecuados para cualquier línea de pobreza –"problemas de agregación"–. A continuación estudiaremos los más importantes.

III. Algunos índices de pobreza

1. El índice de la "relación del número de pobres"

Este es uno de los índices más usados; mide la proporción (o porcentaje) del total de la población que cae por debajo de la línea de pobreza adoptada. Su definición general es la siguiente:

$P_1\ (F, z) = F(z)$

Cuando la distribución es discreta la definición general adopta la siguiente forma:

$P_1\ (X, z) = q/n$

Siendo q el número de pobres (personas con ingresos inferiores o iguales a z) y n el número de personas de la comunidad.

Ejemplo 3. Una función absolutamente continua. El índice P_1

En el caso de la función $G(s) = s^2$ que analizamos, en el ejemplo 1 de la sección I, si la línea de pobreza elegida fuera $z = 0.3$ *($300)*

$P_1\ (G, 0.3) = G(0.3) = 0.09$

El porcentaje de los pobres sería, como ya se ha dicho, 9%. Si $z = 0.5$, entonces:

$P_1\ (G, 0.5) = G(0.5) = 0.25$

Ejemplo 4. Una función discreta. El índice P_1

Sea $X_1 = (14, 17, 20, 23, 28, 31, \mid 45, 59, 83, 95)$[3].

Si la línea de pobreza es $z = 40$ (simbolizada con la línea divisoria en el vector), el número de pobres es $q = 6$ y $n = 10$, entonces:

$P_1\ (X_1, 40) = 6/10 = 0.6$

siendo los pobres el 60% de la población.

Se ha criticado este índice por ser insensible a aquellas mejoras que ocurren por debajo de la línea de pobreza. Por ejemplo, si el vector X_1 por cualquier afortunada circunstancia se convirtiera en:

$$X_2 = (\overbrace{18, 20, 24, 28, 34, 36,}^{-\text{mejora}-} \mid 45, 59, 83, 95),$$

que denota un importante avance en la disminución de la pobreza, el índice P_1 $(X_2, 40)$ seguirá siendo igual a 0.6, como si nada hubiera pasado.

2. El índice de la "brecha del ingreso per-cápita de los pobres"

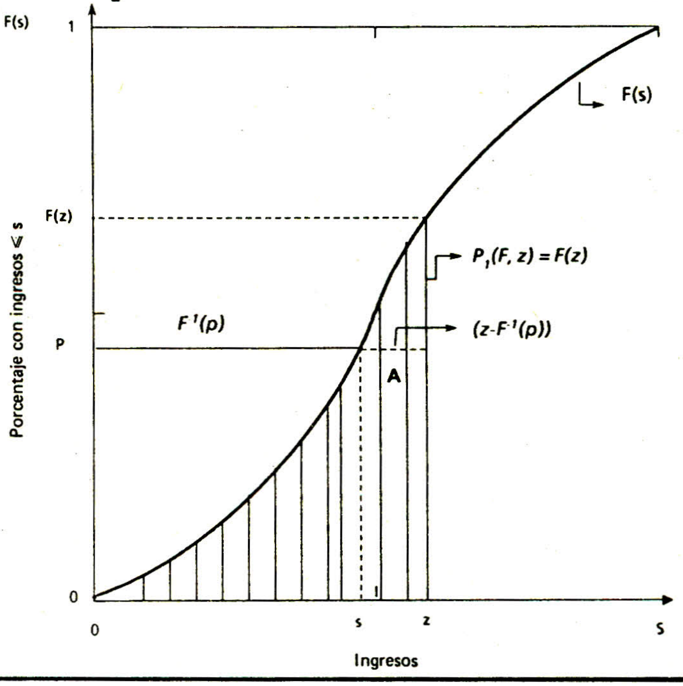
Para superar las deficiencias anotadas al índice P_1 se ha introducido y utilizado un índice P_2, denominado "brecha del ingreso per-cápita":

$$P_2\ (F, z) = (1/z) \int_0^{F(z)} (z - F^{-1}\ (p))\, dp = (1/z) \int_0^{z} F(s)\, ds$$

siendo F^{-1} la inversa generalizada de F (mide para cada porcentaje p de la población el menor ingreso tal que mínimo un p^o/o de la misma lo posee).

Gráficamente podemos representar este índice, en el caso de una función absolutamente continua, como aparece en el Gráfico 3.

Gráfico 3 **El índice P_2 en el caso continuo**



El índice de pobreza $P_1\ (F, z)$ es la ordenada $F(z)$. El índice $P_2\ (F, z)$, recordando que la integral se puede interpretar como un área, es A/z. Los ejemplos numéricos aclararán aún más este índice.

En el caso particular de una distribución discreta, correspondiente al vector de ingresos X, el índice P_2 adopta la forma más sencilla

$$P_2\ (X, z) = (1/nz) \sum_{i=1}^{q} (z - x_i) = P_1\ (X, z)\ (1 - \mu_q(X)/z)$$

siendo n el total de elementos de la población, q el número de los pobres, x_i el ingreso del i-ésimo pobre y $\mu_q(X)$ la media aritmética de los pobres en el vector X de ingresos.

Ejemplo 5. Una función absolutamente continua. El índice P_2

Tomando nuevamente la función $G\,(s) = s^2$, obviamente la operación inversa es la raíz cuadrada, $G^{-1}\ (p) = \sqrt{p}$.

$$s = 0.5 \qquad \Longleftrightarrow \quad G\,(0.5) = (0.5)^2 = 0.25$$

$$G^{-1}\,(0.25) = \sqrt{0.25} = 0.5 \quad \Longleftrightarrow \quad 0.25$$

$$P_2\,(G, z) = (1/z) \int_0^{z^2} (z - \sqrt{p})\ dp = (1/z) \int_0^{z} s^2\ ds = z^2/3$$

Línea pobreza z	$P_2\ (G, z) = z^2/3$
$z = 0.2$	$P_2\ (G, 0.2) = 0.013$
$z = 0.3$	$P_2\ (G, 0.3) = 0.030$
$z = 0.4$	$P_2\ (G, 0.4) = 0.053$
$z = 0.5$	$P_2\ (G, 0.5) = 0.083$

Ejemplo 6. Una función discreta. El índice P_2

Utilicemos el vector de ingresos del ejemplo 4

$$X_1 = (14, 17, 20, 23, 28, 31, \mid 45, 59, 83, 95)$$

El índice P_2 para una línea de pobreza $z = 40$ sería:

$$P_2\ (X_1, 40) = [(40 - 14) + \ldots + (40 - 31)]/(10 \times 40) = 0.27$$

El índice se puede calcular también utilizando

$$\mu_6\ (X_1) = (14 + 17 + 20 + 23 + 28 + 31)/6 = 22.17$$

(la media aritmética de los pobres)

$$\begin{aligned} P_2\ (X_1, 40) &= P_1\ (X_1, 40)\ (1 - \mu_6\ (X_1)/40) \\ &= 0.6\ (1 - 22.17/40) \\ &= 0.27 \end{aligned}$$

Esta última fórmula permite una interesante explicación del índice. Llamemos $I\ (X) = (1 - \mu_q\ (X)/z)$ la brecha porcentual media de los ingresos de los pobres con relación a la línea de pobreza. Si $\mu_q\ (X) = z$, todos los pobres estarán en la línea de pobreza y la brecha sería $0 = I(X)$.

Si $\mu_q\ (X) = 0$ la brecha sería máxima $I(X) = 1$.

En la práctica se da una situación intermedia, como en el ejemplo 5,

$$I(X_1) = 1 - 22.17/40 = 1 - 0.55 = 0.45$$

lo que nos dice que en la actualidad los pobres, en promedio, tienen ingresos que representan aproximadamente el 55% de la línea de pobreza, luego su brecha porcentual promedio es del 45%. (Si la línea divisoria de los ingresos entre los pobres y los no-pobres, por así decirlo, fuera \$100, a los pobres les faltaría en promedio \$45 para abandonar tal condición).

El índice P_2 combina, pues, dos factores: el porcentaje de los pobres y el porcentaje de la brecha promedio de los ingresos de aquellos con relación a la línea de pobreza, $P_2 = P_1 I$.

Esta forma de concebir el índice le permite registrar las mejoras de cualquiera de sus componentes.

Caso	P_1	I	P_2
1	0.60	0.45	0.27 = 0.60 x 0.45
2	0.60	0.35	0.21 = 0.60 x 0.35
3	0.50	0.45	0.23 = 0.50 x 0.45

En los casos 1 y 2 permanece constante P_1 pero se reduce la brecha y el índice P_2 registra la mejora acercándose más a cero. En 1 y 3 lo que se reduce es el porcentaje de los pobres y también P_2 disminuye. Para ver esto con nitidez, retomemos el ejemplo 4, en el cual propusimos una transformación del vector X_1 en X_2 mejorando los ingresos de los pobres pero conservando su porcentaje (60o/o).

$$\mu_6 (X_2) = (18 + 20 + 24 + 28 + 34 + 36)/6 = 26.67$$

Al aumentar la media de los pobres disminuye la brecha y $P_2\ (X_2, 40) = 0.60\ (1 - 26.67/40) = 0.20$, en contraste con $P_2\ (X_1, 40) = 0.27$, lo que muestra el avance que P_1 por sí sólo no era capaz de registrar.

Una sencilla transformación algebraica permite presentar el índice P_2 de otra manera y derivar otra interpretación del mismo. Calculemos, nuevamente, $P_2\ (X_2, 40)$ pero antes coloquemos la fórmula general:

$$\begin{aligned} P_2\ (X, z) &= [(qz - q\mu_q\ (X))/n]/z \\ &= (qz - q\mu_q\ (X))/nz \end{aligned}$$

$$P_2\ (X_2, 40) = [(6 \times 40 - 6 \times 26.67)\ /\ 10]\ /\ 40 = (80/10)\ /\ 40 = 8/40 = 0.2$$

donde:

qz : El dinero necesario para que no haya pobres.

$q\mu_q (X)$: Los ingresos actuales de los pobres.

$qz - q\mu_q (X)$: La brecha que hay que superar para que no haya pobres.

$(qz - q\mu_q (X)/n$: La brecha per-cápita.

Volvamos al ejemplo que venimos desarrollando: se necesitan \$80 para eliminar la pobreza (entendida ésta en términos de la línea adoptada de $z = 40$). Como son diez personas, se requiere disponer de \$8 per-cápita para cumplir con dicho objetivo y esto significa un 20% (P_2) de la cifra que ha sido considerada como la meta para que las personas superen la condición de pobres $(z = 40)$.

El índice P_2 ha sido criticado por ser insensible a ciertas transferencias de los ingresos que favorecen a los más pobres. Retomemos el vector X_1 como punto de referencia e ilustremos el tipo de transferencia al que nos referimos.

Ejemplo 7. Transferencias hacia los más pobres

$$X_1 = (14, 17, 20, 23, 28, 31, \mid 45, 59, 83, 95)$$

$$P_1 (X_1, 40) = 0.6, \mu_6 (X_1) = 22.17, \ P_2 (X_1, 40) = 0.27$$

Supongamos una modificación de X_1 consistente en una transferencia de ingresos del menos pobre al más pobre:

$$X_3 = (17, 17, 20, 23, 28, 28, \mid 45, 59, 83, 95)$$

Hemos hecho una transferencia neta de \$3 (o de \$3.000 si trabajamos con estas unidades). Sin embargo, $\mu_6 (X_3) = \mu_6 (X_1) = 22.17$: la media aritmética de los pobres no se modifica.

$P_2 (X_1, 40) = P_2 (X_3, 40) = 0.6 (1 - 22.17/40) = 0.27$: el índice tampoco registra cambio, siendo insensible, como ya se dijo, a esas pequeñas mejoras de los más pobres.

Otro tipo de transferencias en X_1 pondrán en evidencia, de manera más contundente, las limitaciones del índice.

$$X_4 = (14, 17, 20, 23, \underline{28}, 39, \mid 45, 59, 83, 87)$$

$$X_5 = (18, 21, 20, 23, 28, 31, \mid 45, 59, 83, 87)$$

En ambos casos se produce una transferencia de \$8 en X_1 desde la persona de más altos ingresos hacia los más pobres; X_4 registra la transferencia que va a parar a manos del menos pobre entre los pobres y X_5 la que va, justamente, a mejorar las condiciones de los dos más pobres. En ambas situaciones, desde luego, se mejoran las condiciones de los pobres y ésto lo recoge la media de aquellos:

$$\mu_6 (X_4) = \mu_6 (X_5) = 23.5 > \mu_6 (X_1) = 22.17$$

Sin embargo, el índice P_2 en ambos casos mide lo mismo, recalcando así su poco interés por registrar el mejoramiento de los más pobres.

$$P_2 (X_4, 40) = P_2 (X_5, 40) = 0.6 (1 - 23.5/40) = 0.25$$

3. El índice de Foster y otros autores

La versión general de este índice es:

$$P_3 (F, z) = (1/z^2) \int_0^{F(z)} (z - F^{-1} (p))^2 \, dp$$

que en el caso discreto se convierte en

$$P_3 (X, z) = (1/n) \sum_{i=1}^{q} [(z - \underline{x_i})/z]^2 = P_1 (X, z) \; [I^2 (X) + (\sigma_q (X)/z)^2]$$

siendo $I(X)$ la brecha introducida en el índice P_2 y $\sigma_q(X)$ la desviación típica de los ingresos de los pobres en el vector X. Calculemos P_3 (X, z) para el vector X_1 y veamos por qué este índice supera las limitaciones de P_2.

Ejemplo 8. Sensibilidad de P_3 a las transferencias hacia los más pobres

Calculemos P_3 $(X_1, 40)$

$$\begin{aligned} P_3\,(X_1, 40) &= (1/10)\,\{[(40-14)/40]^2 + [(40-17)/40]^2 \\ &+ [(40-20)/40]^2 + [(40-23)/40]^2 + [(40-28)/40]^2 \\ &+ [(40-31)/40]^2\} \\ &= (1/10)\,(0.65^2 + 0.58^2 + 0.50^2 + 0.43^2 + 0.3^2 + 0.23^2) \\ &= 0.134 \end{aligned}$$

Examinemos cuidadosamente este desarrollo. $(40-14)/40 = 0.65$ nos mide la brecha porcentual del más pobre, ésto es, el más pobre está a un 65°/o de la línea de pobreza. El índice P_3 es, pues, el valor per-cápita de todos los cuadrados de los porcentajes de las brechas de los pobres con relación a la línea de pobreza.

En cambio,

$$P_2\,(X, z) = (1/n) \sum_{i=1}^{q} (z - x_i)/z$$

toma esos porcentajes directamente sin elevarlos al cuadrado ¿Qué importancia tiene tomarlos al cuadrado? Tomemos el vector X_3, del ejemplo 7, que con relación a X_1 era el resultado de una transferencia de $3 del menos pobre al más pobre y que, según vimos, no modificaba al índice P_2

$$\begin{aligned} P_3\,(X_3, 40) &= (1/10)\,(0.58^2 + 0.58^2 + 0.50^2 + 0.43^2 + 0.30^2 + 0.30^2) \\ &= 0.129 \end{aligned}$$

Comparemos P_3 $(X_1, 40)$ con P_3 $(X_3, 40)$: todos los cuatro sumandos intermedios son iguales, sólo hay modificaciones en el primero y el sexto entre los cuales se produjo la transferencia de tres pesos.

Vectores	Más pobre	Menos pobre
X_1	0.65	0.23
X_3	0.58	0.30
	– 0.07	0.07

Cuando prescindimos de los cuadrados, el más pobre disminuyó su brecha en 7% y el menos pobre la aumentó en la misma cantidad manteniéndose inalterado el índice P_2. Ahora comparemos los cuadrados:

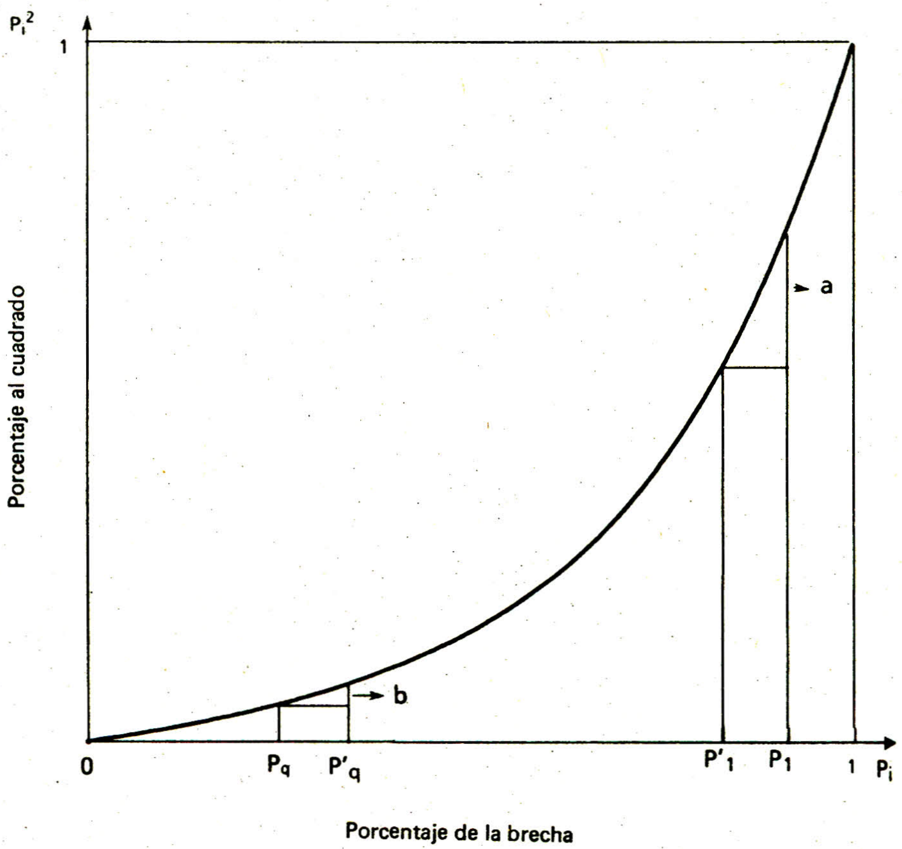
Vectores	Más pobre		Menos pobre	
X_1	0.65^2 =	0.42	0.23^2 =	0.05
X_3	0.58^2 =	0.34	0.30^2 =	0.09
		= – 0.08		= + 0.04

En este caso la transferencia es en favor del más pobre y el índice P_3 disminuye registrando el cambio favorablemente. Desde luego, mientras mayor sea la transferencia mayor será también la reducción del índice.

Esta propiedad de los cuadrados se ilustra en el Gráfico 4.

Donde p_1, p_q son los porcentajes de brecha del más pobre y del menos pobre y p'_1, p'_q son los porcentajes respectivos después de la transferencia; la fuerte reducción **a** en la posición p_1 no alcanza a ser compensada por el incremento **b** en p_q, lo que ociona una disminución del índice P_3.

Gráfico 4 **La sensibilidad de la parábola a las transferencias**
(p_i^2)



Ejemplo 9. La sensibilidad de P_3 cuando la transferencia proviene de los ingresos altos a los más bajos

Veamos cómo se comporta P_3 en el caso de los vectores X_4, X_5; en X_4 se ha producido una transferencia desde los ingresos altos en favor del que hemos venido identificando como el menos pobre de los pobres. En X_5 la transferencia se hace en beneficio de los más pobres. Ya vimos en el ejemplo 7 que, en ambos casos, el índice P_2 se comportaba igual. Veamos qué pasa ahora:

$$P_3\ (X_4, 40) = 0.127$$

$$P_3\ (X_5, 40) = 0.110$$

En ambos casos el índice disminuye desde su valor inicial $P_3\ (X_1, 40) = 0.134$ pero es más fuerte la reducción en X_5, lo que muestra la sensibilidad del índice para las transferencias que van hacia los ingresos más bajos.

Además de la propiedad de los cuadrados ya analizada, el índice P_3 combina tres factores que se reconocen al examinar su otra formulación:

$$P_3 = P_1\ (I^2 + (\sigma_q / z)^2)$$

Dichos factores son el porcentaje de los pobres (P_1), el porcentaje de la brecha media de los ingresos de los pobres con relación a la línea de pobreza (I) y una medida de desigualdad entre los ingresos de los pobres (σ_q), midiendo si sus ingresos son muy distantes o no del ingreso medio de los pobres. Una disminución en cualquiera de estos tres factores reduce el índice.

4. El índice de Sen

a. *La curva de Lorenz*

Los tres índices anteriores están reseñados y analizados en el documento que comentamos[4]. Otro índice importante que cumple las propiedades de P_3 y que viene formulado en términos del coeficiente de Gini fue propuesto por Amartya Sen[5]. Antes de presentarlo formalmente, repasemos los conceptos básicos de la curva de Lorenz y del coeficiente de Gini.

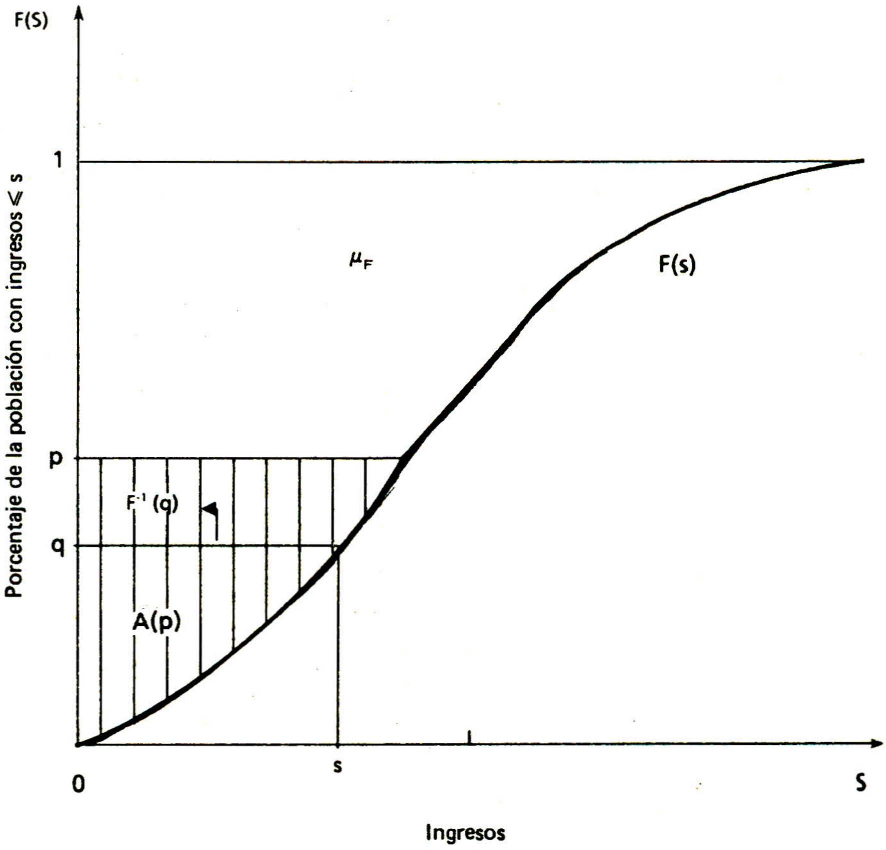
La curva de Lorenz es una función

$$L: \Gamma \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}\ (reales)$$
$$(F, p) \longrightarrow L\ (F, p)$$

Siendo $L(F, p) = (1/\mu_F) \int_0^p F^{-1}(q)\, dq.$

Desentrañemos todos estos símbolos hasta comprender plenamente su significado (véase Gráfico 5).

Gráfico 5 **La curva de Lorenz vista en la distribución de ingresos *F***



El área rayada $A(p) = \int_0^p F^{-1}(q)\, dq$ es la integral que aparece en la definición de la curva de Lorenz y el área total por encima de F y por debajo de la recta que corresponde al 1 es μ_F : la media aritmética de la distribución

F (véase *supra* sección 1 de este artículo). Luego, $L(F, p) = A(p)/\mu_F$ es el cociente de dos áreas para cada valor de p en el intervalo $[0,1]$.

$A(p)$ se denomina la curva generalizada de Lorenz y como también depende de F se designa más exactamente por $A(p) = GL(F,p)$. Los ejemplos posteriores darán cabal cuenta de cualquier posible confusión.

Ejemplo 10. La curva de Lorenz para $G(s) = s^2$

Sea $G(s) = s^2$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, la función de distribución de los ingresos elegida. Ya vimos que $G^{-1}(q) = \sqrt{q}$ es la función inversa y que $\mu_G = 2/3 = 0.667$ (la media son $667). Calculemos la curva de Lorenz:

$$L(G, p) = (1/\mu_G)\int_0^p G^{-1}(q)\, dq = (1/(2/3))\int_0^p \sqrt{q}\; dq = p^{3/2}$$

Ahora la curva generalizada de Lorenz

$$GL(G, p) = \mu_G\; L(G, p) = \int_0^p G^{-1}(q)\, dq = (2/3)\; p^{3/2}$$

El cuadro 1 nos da, para algunos valores de p, los correspondientes valores de L y GL y, además, nos permitirá una primera interpretación

Cuadro 1 **Algunos valores de la curva de Lorenz para $G(s) = s^2$**

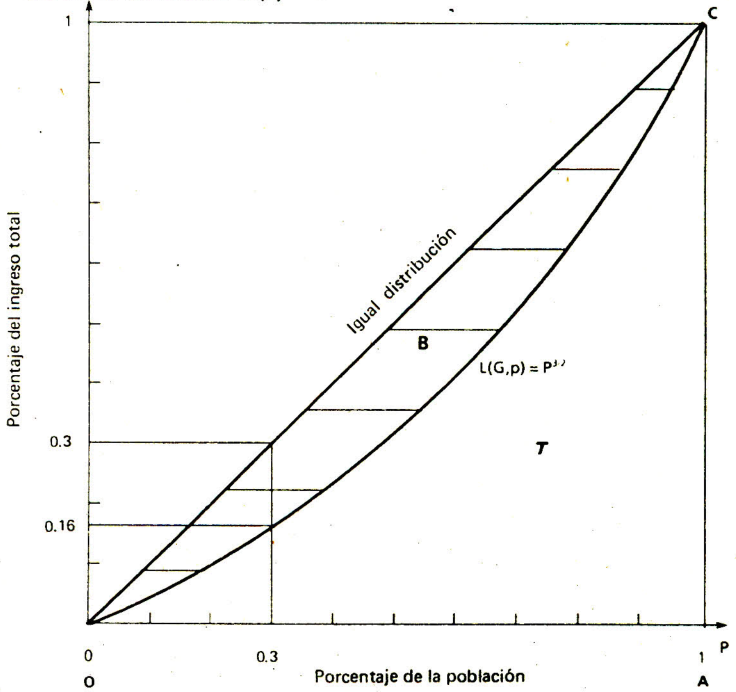
Porcentaje Población (p)	Porcentaje Ingreso $L(G,p) = p^{3/2}$	"Pobreza per-cápita" $GL(G,p)$ (miles de pesos)
0.00	0.00	0.00
0.10	0.03	0.02
0.20	0.09	0.06
0.30	**0.16**	**0.11**
0.40	0.25	0.17
0.50	0.35	0.24
0.60	0.47	0.31
0.70	0.59	0.39

Cuadro 1 (Continuación)

Porcentaje Población (p)	Porcentaje Ingreso $L(G,p) = p^{3/2}$	"Pobreza per-cápita" $GL\ (G,p)$ (miles de pesos)
0.80	0.72	0.48
0.90	0.85	0.57
1.00	1.00	$0.67 = \mu_G$

Expliquemos el significado de la fila en negrilla. El 30°/o de la población, de ingresos más bajos, posee en conjunto el 16°/o del ingreso total y si sus ingresos totales se repartieran entre toda la comunidad, a cada persona le correspondería 0.11 miles de pesos, es decir, $110 (recordemos que la escala de ingresos de $G(s) = s^2$ va entre 0 y 1 en miles de pesos). A todas las filas restantes se les aplica la misma interpretación. Representemos gráficamente la curva de Lorenz de la distribución $G(s) = s^2$.

Gráfico 6 **Curva de Lorenz de $G(s) = s^2$**



Es bien conocida la explicación del Gráfico 6. La recta de "igual distribución" sería la curva de Lorenz en el caso ideal de que para cualquier porcentaje de la población correspondiera el mismo porcentaje del ingreso total, esto es, si la distribución de éste fuera igualitaria (todos ganarían lo mismo). Así, el 30°/o de la comunidad, en condiciones de absoluta equidad, debería poseer el 30°/o del ingreso. El otro caso extremo, el de máxima desigualdad, es cuando una sola persona disfruta de todos los ingresos; en tal caso para cualquier $p < 1$ de la población corresponde 0°/o del ingreso y sólo cuando $p = 1$ (en la población) $p = 1$ también en el ingreso. Así, por ejemplo, el 80°/o de la población tendría 0°/o de ingreso y se necesita que entre el único potentado *(p = 100°/o)* para contabilizar todo el ingreso *(p = 100°/o)*. La curva de Lorenz seguiría, entonces, la caprichosa forma *OAC*. Entre estos dos extremos de igualdad total y máxima desigualdad se mueve en la realidad la curva de Lorenz y el área rayada *B* mediría la brecha de desigualdad real. El coeficiente de Gini mide qué porcentaje es *B* de la brecha máxima dada por el triángulo *OAC* y es una medida de la desigualdad para la distribución del ingreso en consideración.

Calculemos el coeficiente G de Gini para la distribución $G(s) = s^2$.

El área T bajo la curva sería:

$$T = \int_0^1 L(G,p)\, dp = \int_0^1 p^{3/2}\, dp = 2/5$$

El área del triángulo *OAC* es: $B + T = 1/2$. De donde: $B = (1/2) - T$

$$G = B/(B+T) = ((1/2) - T)/(1/2) = 1 - 2T = 1 - 2 \times 2/5 = 1/5$$

Obviamente, $0 \leqslant G \leqslant 1$ y mientras más próximo sea G a 0 menor es la desigualdad en la distribución de los ingresos considerada.

No hay que confundir una "medida de pobreza", como los índices que hemos estudiado, con una "medida de desigualdad"[6]. Una población puede ser muy pobre (medida de pobreza próxima a uno) y muy igualitaria (medida de desigualdad próxima cero), pero también se da el caso de una población muy rica y muy desigual. Sin embargo, ambas medidas están relacionadas. Ya vimos que en el índice P_3 aparecía una medida de desigualdad, pero únicamente entre los ingresos de los pobres: su desviación típica y más adelante veremos cómo en el índice de pobreza de Sen aparece el coeficiente de Gini de la distribución de los ingresos de los pobres que es también una medida de desigualdad.

Ejemplo 11. La curva de Lorenz en el caso discreto

Sea $X = (21, 32, 45, 71, 96)$ un vector de ingresos asociado a una distribución discreta[7] ; los ingresos totales de dicha población son \$265 y la media $\mu(X) = 53 = \mu$. En el Cuadro 2 presentamos los resultados correspondientes a este ejemplo.

Cuadro 2 **Curva de Lorenz de X**
(porcentajes)

Porcentaje población (p)	Porcentaje ingreso $L(X,p)$	"Pobreza per-cápita" "Lorenz generalizada" $GL(X,p)$
0	0	0
1/5 = 0.20	21/265 = 0.08	21/5 = 4.20
2/5 = 0.40	53/265 = 0.20	53/5 = 10.60
3/5 = 0.60	**98/265 = 0.37**	**98/5 = 19.60**
4/5 = 0.80	169/265 = 0.64	169/5 = 33.80
5/5 = 1.00	265/265 = 1.00	265/5 = 53.00 (μ)

Si se considera una línea de pobreza tal que el 60% de la población es pobre, la curva de Lorenz afirma que a dicho porcentaje le corresponde el 37% de todo el ingreso. La curva generalizada de Lorenz, por su parte, asegura que si se repartieran los ingresos de los pobres entre toda la población a cada persona le tocaría \$19.60. Nótese que \$19.60/53 = 0.37. O sea que la curva se puede definir también así: Curva de Lorenz = "pobreza per-cápita"/ingresos medios de la población.

Para calcular el coeficiente de Gini tenemos que conocer el valor del área T bajo la curva $L(X, p)$:

$$T = \int_0^1 L(X,p)\, dp$$

y, como vimos antes: $G = 1 - 2T$; sin embargo, se puede demostrar que en el caso discreto el coeficiente de Gini viene dado por $G = B/n^2 \mu$, siendo B la brecha total entre los ingresos de la comunidad. Calculemos B[8] :

$$B = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | x_i - x_j |$$

Calculemos B para $X = (21, 32, 45, 71, 96)$. Estamos, por ahora, calculando una medida de desigualdad para toda la comunidad sin distinción entre ricos y pobres.

$$B = (96 - 71) + (96 - 45) + (96 - 32) + (96 - 21) + (71 - 45) + (71 - 32) + (71 - 21) + (45 - 32) + (45 - 21) + (32 - 21) = 378.$$

La brecha total entre todos los ingresos sería \$378 y el coeficiente de Gini sería:

$$G = 378/(5 \times 5 \times 53) = 378/(5 \times 265) = 0.29$$

El coeficiente Gini admite en esta formulación una interpretación interesante. Nótese que en el denominador aparecen dos factores $n = 5$ y 265 (el tamaño de la población y los ingresos totales de la misma). Supongamos, para decirlo de manera gráfica, que algún tipo "vivo" se roba todos los ingresos de la comunidad quedando él con 265 y los cinco miembros originales con cero. En ese momento la población con respecto al "vivo" alcanza la máxima desigualdad y la brecha también toma su valor máximo: $5 \times 265 = 1.325$. El coeficiente de Gini mide, pues, qué porcentaje es la brecha actual *(378)* de la brecha de máxima desigualdad (cuando una sola persona tuviera todos los ingresos de la colectividad).

Hemos dicho que el coeficiente Gini proporciona una medida de la desigualdad de los ingresos de una población; sin embargo, si calculáramos dicho coeficiente para los ingresos de los pobres exclusivamente, tendríamos una medida de la desigualdad entre los pobres que, sin duda alguna, debe ser considerada como uno de los factores en la construcción de una medida de la pobreza. Eso es lo que hace Amartya Sen como lo veremos a continuación al estudiar el índice construido por él.

b. El índice de Sen

Definimos el índice de Sen, P_s, de la siguiente manera:

$$P_s = P_1 \, [I + (1 - I) \, G]$$

Siendo P_1 el índice ya estudiado "relación del número de pobres", I la brecha porcentual media del ingreso de los pobres $1 - (\mu_q/z)$ y G el coeficiente de Gini de los ingresos de los pobres. P_s es la forma límite que adopta el índice cuando q (el número de pobres) es grande[9].

Para constatar que P_s cumple las propiedades de los índices introducidos antes calculemos P_s para los vectores de ingresos X_1 a X_5 que figuran en la primera parte de este artículo. Es conveniente aclarar que por ser q pequeño $(q = 6)$ los cálculos deberían hacerse con el P_s exacto (véase *la supra* nota 4); sin embargo, utilizaremos la forma límite que hemos presentado en la definición que, aunque da valores aproximados, ilustra también las propiedades del índice.

$$X_1 = (14, 17, 20, 23, 28, 31, \mid 45, 59, 83, 95)$$

$$z = 40, \quad P_1 = 0.6, \quad I = 0.45, \quad \mu_q = 22.17$$

$$B = (31 - 28) + (31 - 23) + \ldots (28 - 23) + \ldots (17 - 14) = 121.$$

El coeficiente de Gini en este caso es:

$$G = 121/(6^2 \times 22.17) = 0.15$$

$$P_s\,(X_1) = 0.6\,(0.45 + (1 - 0.45) \times 0.15) = 0.32$$

mejora

$$X_2 = (18, 20, 24, 28, 34, 36, \mid 45, 59, 83, 95)$$

$$P_s\,(X_2) = 0.6\,(0.33 + 0.67 \times 0.14) = 0.25$$

Como en el caso de P_2, una mejora de los ingresos de los pobres, sin variar su número, reduce el índice P_s mostrando así la disminución de la pobreza.

$$X_3 = (17, 17, 20, 23, 28, 28, \mid 45, 59, 83, 95)$$

$$P_s(X_3) = 0.6\ (0.45 + 0.55 \times 0.11) = 0.30$$

X_3 se obtiene de X_1 (no tiene nada que ver con X_2) por una transferencia de tres pesos entre los pobres; ya habíamos visto que P_2 no cambiaba ($P_1 = 0.6$ e $I = 0.45$); pero tanto P_s como P_3 registran la mejora reduciendo el índice por la disminución, en este caso, del coeficiente de Gini

$$X_4 = (14, 17, 20, 23, 28, 39, \mid 45, 59, 83, 87)$$

$$X_5 = (18, 21, 20, 23, 28, 31, \mid 45, 59, 83, 87)$$

$$P_s(X_4) = 0.6\ (0.41 + 0.59 \times 0.19) = 0.313$$

$$P_s(X_5) = 0.6\ (0.41 + 0.59 \times 0.11) = 0.284$$

En el caso X_4 cuando la transferencia $8 en X_1 va a los ingresos del menos pobres entre los pobres se opera, como en P_3, una pequeña reducción del índice, pero en X_5 la disminución de P_s es considerable por la reducción muy grande del coeficiente de Gini. ¿Qué es lo que hace sensible a P_s a transferencias que van hacia los ingresos más bajos? Vimos que en P_3 esta propiedad estaba explicada por tomar los porcentajes de las brechas al cuadrado. Calculemos el coeficiente de Gini por otro método.

Sean $x_1, x_2, \ldots x_q$ los ingresos, en orden no decreciente, de los pobres. Calculemos el área T bajo la curva de Lorenz como una suma de rectángulos. Tomamos la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini únicamente para los ingresos de los pobres.

Cuadro 3 **Otro método para calcular Gini**

Rectángulo	Porcentaje de los pobres	Base rectangular	Porcentaje de los ingresos de los pobres	Altura del rectángulo
1	$1/q$	$1/q$	$x_1/q\mu_q$	$x_1/q\mu_q$
2	$2/q$	$1/q$	$(x_1+x_2)/q\mu_q$	$(x_1+x_2)/q\mu_q$
.				
.				
.				
q	q/q	$1/q$	$(x_1+\ldots+x_q)/q\mu_q$	$(x_1+\ldots+x_q)/q\mu_q$

Siendo $q\mu_q$ los ingresos totales de los pobres.

$$T = (1/q^2\mu_q)\ (qx_1 + (q-1)\ x_2 + \ldots + x_q)$$

$$= (1/q\mu_q) \sum_{i=1}^{q} x_i\ (q-i+1)/q$$

$$G = 1 - 2T$$

Se observa en T que los ingresos de los pobres van ponderados en orden jerárquico inverso.

Ingreso	Ponderación absoluta	Ponderación relativa
x_1	q	1
x_2	$q-1$	$(q-1)/q$
.		
.		
.		

Continuación

Ingreso	Ponderación absoluta	Ponderación relativa
x_i	$(q - i + 1)$	$(q - i + 1)/q$
.		
.		
.		
x_q	1	$1/q$

La segunda columna es la ponderación absoluta y la tercera la ponderación relativa y los ingresos van en orden no decreciente,

o sea: $x_1 \leqslant x_2 \ldots \leqslant x_i \ldots \leqslant x_q$

Si se produce una transferencia de \$5 de x_q a x_1. Esos \$5 adicionales que recibe x_1 –el más pobre– quedan multiplicados por q (número de pobres), en cambio, los \$5 que pierde x_q –el menos pobre– únicamente por 1. Así, el numerador de T registra un aumento neto de 5 $(q-1)$ y se opera una reducción del coeficiente de Gini –por el aumento de T– y de P_s por efecto de esa transferencia favorable a los ingresos más bajos.

Vale la pena anotar que este método de calcular el coeficiente de Gini determina que en esta última formulación el valor sea $1/q$ menor que en la primera. Para valores pequeños de q la diferencia es muy grande. Por ejemplo, si calculamos el coeficiente de Gini, por este método, en los vectores X_1 a X_5 nos da $1/6 = 0.17$ menos, que es desproporcionadamente grande. Pero para valores grandes de q, que es lo que sucede en la práctica, la diferencia es despreciable. Así para $q = 1000$ la diferencia es apenas de una milésima.

Para terminar, presentaremos el índice de Sen de manera que permita una interpretación. Haciendo una transformación algebraica tenemos:

$$P_s = [(qz - q\mu_q) + B/q]/nz$$

donde:

$qz - q\mu_q$: Brecha total, o sea el dinero necesario para eliminar la pobreza.

B/q: La brecha promedio entre los ingresos de los pobres (desigualdad media).

nz: El dinero total de la comunidad cuando no hay pobres, ni ricos. Todos ganan z.

Calculemos, otra vez, $P_s\ (X_1)$:

$$P_s(X_1) = [(6 \times 40 - 6 \times 22.17) + (121/6)]/(10 \times 40)$$
$$= (107 + 20.2)/400 = 0.32$$

Se necesitan \$107 para eliminar la pobreza, la brecha promedio entre los pobres es \$20.2 y ambas brechas son el 32°/o de los ingresos totales de una comunidad igualitaria y sin pobres.

Conclusiones

Hemos construido tres índices con propiedades teóricas bien determinadas; además con el criterio de que cada uno de ellos –presentados en estricto orden– retiene las propiedades del anterior y supera alguna falla reconocida del mismo.

El índice "relación del número de pobres" (P_1), es extensamente utilizado, mide para una línea de pobreza elegida –la decisión encierra inevitablemente un grado de arbitrariedad– el porcentaje de personas que caen por debajo de aquel valor z. Naturalmente, mientras menor sea P_1 menor es la medida de la pobreza de dicha población. En general, todos los índices se construyen con ese criterio de que mientras más próximos à cero estén, tanto menor es la medida de la pobreza. Pero los valores de dos índices distintos no son comparables entre sí.

El índice P_1, para un valor dado del porcentaje de los pobres, es indiferente a la magnitud de la pobreza. Poco importa que el promedio del ingreso de los pobres esté próximo o lejano a la línea de pobreza. El índice P_2 introduce esa brecha I que mide qué porcentaje les falta a los pobres, en promedio, para alcanzar el umbral que los liberaría, al menos por la definición de z, de su condición de pobres.

El índice P_2 no mide, sin embargo, las desigualdades entre los ingresos de los pobres. En el caso ideal en que todos los pobres, estando cerca de z, ganaran lo mismo, la brecha sería igual a la que se encontraría con un promedio idéntico pero con una gran dispersión de los ingresos. El índice P_3 introduce tres componentes: el porcentaje de los pobres (P_1), la brecha porcentual media del ingreso de los pobres (I) y una medida de la desigualdad dada por la desviación típica de los ingresos de los pobres. El índice P_3 adquiere una nueva propiedad bastante interesante en virtud de esa última componente y es la de registrar con mayor fuerza aquellas transferencias del ingreso destinadas a mejorar a los más pobres entre los pobres.

Finalmente, presentamos otro índice debido a Sen, que comparte las propiedades de P_3 ; tiene como él las tres componentes: porcentaje de los pobres, brecha y medida de desigualdad entre los pobres pero, en lugar de la desviación típica, introduce el coeficiente de Gini que presenta una ventaja adicional y es la de jerarquizar la ponderación de los ingresos. Así, si q es el número de los pobres, el ingreso más alto entre los pobres se ponderaría con 1; en cambio, el ingreso más bajo se multiplicaría por q. En la desviación típica todos se ponderarán con 1 en términos absolutos y con $1/n$ en términos relativos.

En un artículo posterior de esta revista presentaremos las relaciones de los índices P_1, P_2, y P_3 con la teoría económica del bienestar.

Notas

1 Foster, James E. y Shorrocks, Anthony F. "Poverty Orderings and Welfare Dominance". s.p.i. Mec.

2 La relación entre estos índices y la teoría económica del bienestar se publicará en el número 23 de *Lecturas de Economía.* Medellín, mayo-agosto de 1987.

3 La rayita (|) se utiliza con fines didácticos, para separar los que caen por debajo de la línea de pobreza.

4 *Loc. cit.*

5 Sen, Amartya. "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement". Econometrica. Vol. 44, No. 2. March 1976.

6 Atkinson, Anthony B. "On the Measurement of Inequality". Journal of Economic Theory. Vol. 2 (1970).

7 Omitimos aquí el cálculo más riguroso de la curva de Lorenz empleando la inversa generalizada.

8 La división por dos se explica porque cada diferencia se presenta dos veces en la suma.

9 Para cualquier valor de q, P_s sería exactamente igual a

$$P_s = P_1 \left[1 - (1 - I)\left(1 - G\left(q/(q+1)\right)\right)\right]$$

Bibliografía

Atkinson, Anthony B. "On the Measurement of Inequality". *Journal of Economic Theory.* Vol. 2 (1970).

Foster, James E. y Shorrocks, Anthony F. "Poverty Orderings and Welfare Dominance". s.p.i. Mec.

Sen, Amartya. "Poverty: An Approach to Measurement". *Econometrica.* Vol. 44, No. 2. March 1976.