Economías singulares*

-Introduction. -I.El método de Negishi y la función exceso de utilidad. -II.Economías regulares y economías singulares. -III.Economías singulares y sus propiedades. -V.Catástrofes y economía. -Conclusión. Referencias.

Introducción

Consideramos en este trabajo economías con una cantidad finita de agentes y bienes, el método de trabajo elegido es el llamado método de Negishi, que permite extender las conclusiones sin mayores limitaciones a economías con infinitos bienes, no obstante a los efectos de no introducir complicaciones técnicas adicionales nos limitaremos al caso finito. A partir de definir el conjunto de los óptimos de Pareto racionales, buscamos aquellos que puedan ser considerados como equilibrios walrasianos para dotaciones iniciales determinadas. Para esto utilizaremos la llamada función exceso de utilidad, cuyos ceros estarían en correspondencia biunívoca con los equilibrios walrasianos. Economías singulares serían aquellas que permitan la existencia de equilibrios críticos entre los ceros de su función exceso de utilidad, es decir puntos en los que ese anula no solamente la función exceso de utilidad, sino también en los que la matriz jacobiana de dicha función es

* Este artículo fue escrito durante la estancia del autor como profesor visitante de la Universidad de Antioquia, durante los meses de julio y agosto de 2000.

singular. A diferencia de la función exceso de demanda cuya existencia en economías con infinitos bienes (bienes contingentes) está limitada a espacios de Hilbert, la unción exceso de utilidad permite mayor generalidad. No obstante el método de Negishi supone para su validez el cumplimiento del primer teorema del bienestar. En las condiciones en que trabajaremos en este artículo este se satisface trivialmente.

Por otra parte como las funciones de utilidad están explícitamente consideradas en la función exceso de utilidad, queda claro al utilizar esta función como herramienta analítica, que son las funciones de utilidad las responsables por los comportamientos anómalos de la economía, y que de ellas depende directamente el tipo de anomalía.

No existen muchos trabajos que se refieran a las singularidades (economías singulares), más bien parece ser el estudio de este tema, una deuda pendiente en la Teoría del Equilibrio General. Balasko es uno de los pioneros en el tema, [Balasko, I], también en [Mas-Colell, A.] hay consideraciones sobre el punto pero de hecho el trabajo está aun en sus inicios. Este artículo quiere ser un aporte en la dirección de este estudio pero, aunque el análisis de las singularidades sea su tema central, no retende ni muchos menos ser exhaustivo. Las consideraciones anteriores nos llevan a abordar el tema a partir del llamado enfoque de Negishi.

En la segunda parte mostraremos el método de Negishi, e introduciremos la función exceso de utilidad. Luego definiremos economías regulares y singulares y mostraremos que las primeras forman un conjunto residual, es decir intersección numerable de conjuntos abiertos y densos, mientras que las segundas componen un conjunto raro, es decir complementario de uno residual. En la cuarta parte mostraremos un ejemplo intentando aclarar el papel de las singularidades en el comportamiento de los sistemas económicos. En la quinta sección analizaremos algunos tipos de singularidades a y mostraremos el comportamiento de una economía en las proximidades de las mismas. Las modificaciones abruptas que pueden producirse en las proximidades de las singularidades corresponden a las llamadas catástrofes. Esta sección contiene el principal aporte del trabajo. Finalmente comentaremos sobre posibles líneas de trabajo en el tema.

I. El método de Negishi y la función exceso de utilidad

Consideraremos una economía de intercambio puro con finitos agentes, a los que indexaremos por i = 1,2,...,n y l bienes indexados por j = 1,2,...,l, las preferencias están representadas por funciones de utilidad $u_i : R_+^l \to R$, cóncavas estrictamente crecientes y derivables con continuidad hasta el segundo orden al menos. Las dotaciones iniciales de cada agente estarán representadas por un vector w_i en el conjunto de consumo $R_+^l - \{0\}$. En definitiva una economía será denotada por

$$\varepsilon = \{ u_i,\ w_i,\ R_+^l \}_{1 \leq i \leq n}$$

Para simplicidad del trabajo supondremos que las utilidades satisfacen las condiciones de Inada, esto es que la norma de su gradiente tiende a infinito cuando el consumo tiende a la frontera del R_+^l. Formalmente:

$$\lim_{x \to \partial R_+^l} \|\partial u_i(x)\| = \lim_{x \to \partial R_+^l} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right\| = \infty$$

donde $\partial R_{++}^l = \{ x \in R_+^l : x_j = 0, \text{ para al menos un } j = 1, 2, \ldots, l \}$. Considere ahora la siguiente función de bienestar social: $W_\lambda : R_+^{ln} \to R$

$$W_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i). \tag{1}$$

donde u_i son las funciones de utilidad de cada agente, mientras que

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_+ = \left\{ \lambda \in R_{++}^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

cada λ_i representa el peso del agente i en la economía.

Puede comprobarse que si $x^* \in R_+^{nl}$ resuelve el problema de maximización de W(x) restringido a ser x una asignación de recursos factible, es decir, tal que $x \in F = \{ x \in R_+^{nl} : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \}$ entonces x^* es un óptimo de Pareto. Para verificarlo basta ver que las condiciones de primer orden de este problema son las mismas que las habitualmente utilizadas para definir el concepto de óptimo paretiano ver por ejemplo [Mas-Colell, A. Whinston, M.]. Recíprocamente puede verse que una asignación de recursos factible x^* es óptimo de Pareto, entonces existe $\lambda' \in \Delta$, donde

$$\Delta = \left\{ \lambda \in R_+^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

tal que para λ', x^* maximiza la función $W_{\lambda'}(x)$ restringido a las asignaciones factibles. Obsérvese que si queremos considerar todos los óptimos de Pareto posibles, no podemos evitar el caso de algún λ_j nulo. El caso en que $\lambda_j = 0$ el agente j quedaría fuera de la economía, como nuestro interés se centrará en aquellas asignaciones de recursos que permitan la participación de todos los agentes de la economía nos restringiremos a elegir solamente entre aquellos óptimos de Pareto que suponen $\lambda \in \Delta_\varepsilon$, donde

$$\Delta_\varepsilon = \{\lambda \in \Delta : \lambda_i \geq \varepsilon > 0 \text{ para todo } i\}$$

Esto no supone pérdida de generalidad debido a que suponemos que cada agente tiene dotaciones iniciales en $R_+^l - \{0\}$ y sus utilidades son monótonas crecientes, por lo tanto en el momento de decidirse por una cesta de bienes no elegirán la cesta nula la cual representa una utilidad menor que la representada por sus dotaciones iniciales.

A partir del primer teorema del bienestar sabemos que todo equilibrio walrasiano es óptimo de Pareto. Nuestro siguiente paso será entonces elegir dentro del conjunto de óptimos de Pareto aquellos x^*, que puedan ser soportados por un sistema de precios p tales que para todo agente se cumple que $px^*_i = pw_i$, para todo i = 1,2,...,n. Dada la correspondencia biunívoca existente entre óptimos de Pareto y aquellos $\lambda \in \Delta_\varepsilon$ haremos la elección de nuestros óptimos indirectamente, es decir, elegiremos valores adecuados $\bar{\lambda} \in \Delta_\varepsilon$, de forma tal que aquellas asignaciones de recursos que maximicen $W_{\bar{\lambda}}(x)$ restringida a la región factible F, sean los que tengan la propiedad exigida sobre los precios soporte. Para esto definiremos, en la subsección siguiente la llamada función de exceso de utilidad.

El método que daremos a continuación para encontrar equilibrios walrasianos presenta ventajas y desventajas sobre el método que utiliza la función exceso de demanda. La ventaja más clara es cuando no es posible definir la función exceso de demanda, esto sucede generalmente cuando trabajamos con economías cuyos espacios de bienes están modelados en espacios de dimensión infinita. Por otra parte presenta ventajas cuando el número de agentes es apreciablemente menor que el número de bienes, obviamente en el caso de economías con infinitos bienes y un número finito de consumidores, en este caso la utilización de este método nos permite trabajar con un conjunto finito de ecuaciones a pesar de la infinitud del problema de la asignación óptima de bienes subyacente. Sus desventajas radican en su dependencia fuerte de las funciones de utilidad, lo que puede redundar en dificultades operatorias importantes en el momento de resolver problemas concretos, además su dependencia fuerte de la existencia de óptimo de Pareto y de la satisfacción del Primer Teorema del Bienestar.

El origen de la llamada función exceso de utilidad como instrumento para obtener equilibrios walrasianos se remonta a [Karatzas, I; Lakner, P; Lebocky, J.; Shreve, S.] aunque es Negishi quien presenta el método de manera natural en la Teoría Económica ver [Negishi, T.], la mayor difusión es debida a los trabajos de Mas-Colell. Particularmente en [Mas-Colell, A.], también puede verse un ejemplo de su utilización para extender a economías infinitas las técnicas del cálculo diferencial en [Accinelli, E (99)].

Definición 1. Sea $e_{wi}: \Delta_\varepsilon \rightarrow R$, i = 1,2,...,n la función

$$e_{wi}(\lambda) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}}(x_{ij}(\lambda) - w_{ij}) \tag{2}$$

donde w_{ij} representa la dotación inicial del agente i en el bien j, $w = (w_1, w_2, .., w_n) \in R_+^{nl}$ representa el vector de dotaciones iniciales de la economia y $x_i(\lambda)$ es la cesta proveniente de la asignación de recursos $x(\lambda)$ que maximiza $W_\lambda(x)$ en F, con i = 1,2, ..., n y j = 1, 2, ...,l.

Definición 2. Definida la economia $\varepsilon = \{u_i, w_i, R^l_+\}_{1 \leq i \leq n}$. Llamaremos función exceso de utilidad a la función $e_w : \Delta_\varepsilon \rightarrow R^n$ que define al vector de R^n: $e_w(\lambda) = (e_{w1}(\lambda), e_{w2}(\lambda), ..., e_{wn}(\lambda))$.

Bajo las hipótesis consideradas en este trabajo (condición de Inada) que hacen que las condiciones de primer orden que definen al óptimo de Pareto se cumplan en el interior de R^l_+ es posible sustituir $[\partial u_i(x_i(\lambda))] / \partial x_{ij}$ por el correspondiente multiplicador de Lagrange $\gamma_j(\lambda)$ dividido por el peso social λ_i del i-ésimo agente, de esta manera obtenemos:

$$e_{wi}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{l} \gamma_j(\lambda)(x_{ij}(\lambda) - w_{ij}). \tag{3}$$

Definición 3. Para funciones de utilidad dadas, definimos: el conjunto de **pesos sociales de equilibrio** a

$$\varepsilon q\ (w) = \{ \lambda \in \Delta_\varepsilon : e_w(\lambda) = 0 \}$$

En [Accinelli, E. (99)] se prueba que este conjunto es no vacío. Podemos enunciar el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [Accinelli, E. (99)].

Teorema 1. Sea $\lambda \in \varepsilon q(w)$, $x^*(\bar{\lambda})$ una solución del problema de maximizar W_λ restringido al conjunto de asignaciones factibles y sea $\gamma(\bar{\lambda})$ el correspondiente multiplicador de Lagrange. Entonces el par $(x^*(\bar{\lambda}), \gamma(\bar{\lambda}))$ conforma, para todo $\bar{\lambda} \in \varepsilon q$ un equilibrio walrasiano y recíprocamente, para todo par (p, x) que sea un equilibrio walrasiano existe $\lambda \in \varepsilon$ tal que x maximiza W_λ restringido a las asignaciones factibles, y $\gamma(\lambda) = p$. Siendo $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \ldots, \gamma_l(\lambda))$ donde $\gamma_j(\lambda)$ son los correspondientes multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones.

El jacobiano de la función exceso de utilidad, juega un papel determinante en el momento de separar economías regulares y economías singulares. Este presenta la siguiente forma:

$$J_\lambda e_w(\lambda) = \left[\frac{\partial e_{wi}(\lambda)}{\partial \lambda_k}\right]; i = \{1, 2, \ldots, n\}, k = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\frac{\partial e_{wi}(\lambda)}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}\{\partial^2 u_i(x_i(\lambda)), t)\,[x_i(\lambda) - w_i(t)]^{tr} + [\partial u_i(x_i(\lambda)), t)]^{tr}\}. \quad (4)$$

Donde por la trasposición del vector a está representada por a^{tr}. Indica la escritura del vector como un vector columna. Además $\partial x_i / \partial \lambda_k = (\partial x_{i1} / \partial \lambda_k, \ldots, \partial x_{il} / \partial \lambda_k)$, $\partial^2 u_i(x_i(\lambda), t)$ es la matriz de derivadas segundas de la función $u_i(x, t)$, donde sus entradas son $a_{jk} = \partial^2 u_i / \partial x_{ij} \partial x_{lk}$.

Una economía de intercambio queda caracterizada por las utilidades y dotaciones iniciales de los agentes. Supondremos en adelante que las funciones de utilidad están dadas, por lo que una economía quedará definida una vez que conozcamos las dotaciones iniciales de los agentes.

De esta forma podemos definir a la función exceso de utilidad como:

$$e : \Delta_+ \times \Omega \rightarrow R^n.$$

Siendo Ω el producto cartesiano formado por los n espacios de consumo de los agentes de la economía, cada uno de los cuales en nuestro caso es R^l_+.

Definición 4. Un par $(\lambda, w) \in \Delta_+ \times \Omega$ será llamado un **equilibrio social** si $e(\lambda, w) = 0$. Como puede verse fácilmente la función exceso de utilidad verifica:

- Es homogénea de grado cero: $e(a\lambda, w) = e(\lambda, w)$ para todo $a > 0$.
- Verifica la identidad $\lambda e(\lambda, w) = 0$ para todo λ.

La primera propiedad nos permite restringirnos a trabajar en la esfera unitaria positiva de dimensión n - 1. $E^{n-1}_{++} = \{ x \in R^l_+ : \sum^n_{i=1} x_i^2 = 1; x_i > 0$ para todo i $\}$. Así la función exceso de utilidad tendrá por dominio el conjunto $X = E^{n-1}_{++} \times \Omega$ y recorrido en R^n. Aquí Ω representa el espacio productos formado por los espacios de consumo de cada agente, en nuestro caso R^l_+.

La segunda propiedad nos permite afirmar que si algún λ verifica las n - 1 ecuaciones $e_i(\lambda) = 0$ para i = 1,2,...,n-1 entonces se verificará automáticamente $e_n(\lambda) = 0$.

Como además puede comprobarse que $\lambda J_\lambda e(\lambda) = 0$ se tiene que $J_\lambda e(\lambda)$ es siempre una matriz singular, por lo tanto el rango de la matriz $J_\lambda e(\lambda)$ será a lo más igual a n - 1.

Una vez restringidos, a trabaja en la esfera unitaria positiva hacemos la siguiente definición de equilibrio:

Definición 5. Llamaremos conjunto de equilibrio a:

$$Eq'(w) = \{ \lambda \in E^{n-1}_{++} : e_w(\lambda) = 0 \}$$

II. Economías regulares y economías singulares

Comenzamos esta sección recordando algunas definiciones matemáticas:

Nota 1. Recordamos dada una función $f : X \to Y$ donde X e Y son variedades diferenciales, [Golubitsky, M. Guillemin, V.] un valor $q \in Y$ es llamado regular si y solamente si en la preimagen de q por f no existen puntos críticos, es decir no existe $x \in f^{-1}(q)$ tal que el corrango de la matriz jacobiana de la función f evaluada en x sea positivo. El corrango de la matriz jacobiana se define como:

$$\text{corank } Jf(x) = \min(\dim X, \dim Y) - \text{rank } Jf(x)$$

Definición 6. Decimos que un elemento $\lambda \in Eq'(w)$ es un punto regular si la matriz jacobiana de e_w, $J_\lambda e_w(\lambda)$ tiene rango n - 1. Una economía $E = \{u_i, w_i\}^n_{i=1}$, será llamada **regular** si todo $\lambda \in Eq'(w)$ es un punto regular.

Es sobre las economías regulares que podemos hacer estática comparativa, ellas presentan entre sus propiedades la de tener un número finito de equilibrios los que son localmente únicos, y más aun en cantidad impar. Pequeñas alteraciones en las proximidades de una economía regular no provocan grandes cambios. Mientras que como veremos es en las proximidades de las llamadas economías singulares donde se producen los cambios inesperados y bruscos.

Nota 2. Entenderemos el subíndice w en la función exceso de utilidad hace referencia a que la función exceso de utilidad está definida en una economía con dotaciones iniciales representadas por w. Las funciones de utilidad se consideran dadas.

Nota 3. Notación. A lo largo de esta sección diremos que una función ϕ es

- **suave o de clase,** C^∞ si para todo entero k es diferenciable k veces.
- $C^\infty(X, Y)$ si es diferenciable de cualquier orden de X en Y.

Teorema 2. Transversalidad. Sean X e Y variedades diferenciables, W una subvariedad cerrada de Y. Sea $T_W \{f \in C^\infty(X, Y)$: f transversal a W$\}$, entonces T_W es un conjunto abierto y denso de $C^\infty(X, Y)$.

El teorema de transversalidad aplicado a e: $\Delta_+ \times \Omega \rightarrow \Re^{n-1}$ muestra que casi toda economía es regular, pues siendo el rank $J_w e(\lambda, w) = n - 1$, (matriz de derivadas parciales con respecto a w) para $e(\lambda, w) = 0$. Se concluye a partir del teorema de transversalidad que para casi toda $w \in \Omega$ rank$J_\lambda e_w = n - 1$ cada vez que $e(\lambda, w) = 0$.

Es decir que para w en un conjunto abierto y denso de R^l_+ se verifica que para todo $\lambda \in Eq'(w)$, rank$J_\lambda e_w(\lambda) = n - 1$.

La importancia de las economías regulares radica en el hecho de que tales economías tienen un conjunto finito de equilibrios, y por lo tanto que sus equilibrios son localmente únicos o puntos aislados, lo que posibilita realizar ejercicios de estática comparativa. Más formalmente:

Teorema3. (Unicidad local). En una economía regular todo equilibrio es localmente único (o aislado). Esto es para todo $\lambda \in Eq'$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\lambda \neq \lambda'$ y tal que $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$, entonces $e(\lambda') \neq 0$. Más aún el conjunto de los equilibrios es finito. [Accinelli, E. (96)].

La demostración de este teorema es conclusión del teorema de la función inversa, [Lima, E.] y del hecho de que siendo w regular entonces $J_\lambda e_w(\lambda)$ es una transformación lineal de R^{n-1} en R^{n-1} sobreyectiva.

Siendo $e^{-1}_w(0)$ un conjunto compacto entonces, Eq'(w) es un conjunto formado por puntos aislados. La compacidad de dicho conjunto se desprende del hecho de ser e_w una función propia, es decir que si $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \partial E^{n-1}_{++}$ entonces $\|e_w(\lambda_n)\| \rightarrow \infty$ entonces $e^{-1}_w(0)$.

Siendo $e: E^{n-1}_{++} \times \Omega \rightarrow R^{n-1}$ y la aplicación consecuente del teorema de transversalidad permite afirmar que para casi todo w, $\operatorname{rank} J_\lambda e_w(\lambda) = n-1$ y por lo tanto genéricamente una economía $E = \{\succeq_i, w_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es regular.

A partir de aquí concluimos que el conjunto de **economías singulares**, es decir aquellas para las que al menos en un $\lambda \in Eq'$ la matriz $J_\lambda e(\lambda, w)$ es de rango menor que n - 1, forman un conjunto raro es decir, complementario de un residual. Es en las proximidades de una singularidad que aparece la posibilidad de cambios abruptos (catastróficos) en el comportamiento de las economías, de allí su importancia. Además si fijadas las utilidades de los agentes, no existe ningún vector w de dotaciones iniciales que permita construir una economía $E = \{\succeq_i, w_i\}_{1 \leq i \leq n}$ singular, entonces el equilibrio será único en un sentido global para todo w, pues el número de equilibrios se modifica solamente al atravesar por una singularidad. La unicidad del equilibrio en el caso de no existir singularidades, se desprende del hecho de que es siempre posible construir una economía con un único equilibrio, basta para ello considerar como dotaciones iniciales una asignación de recursos Pareto optimal. Esta propiedad de unicidad global depende exclusivamente de las preferencias o utilidades de los agentes representadas en E por $\succeq_i$.

Nota 4. (Sobre la unicidad global del Equilibrio Walrasiano). Una condición necesaria y suficiente para la existencia de unicidad global dei equilibrio walrasiano es que la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad, una vez definidas las preferencias se mantenga de rango constante igual a n - 1 para toda dotación inicial w de los agentes y λ: $e(\lambda, w) = 0$. Al análisis de las singularidades y sus propiedades dedicaremos la sección siguiente.

III. Economías singulares y sus propiedades

Describiremos a las economías por sus funciones exceso de utilidad, $e:E^{n-1}_{++} \times \Omega \rightarrow R^{n-1}$, donde Ω es el espacio producto formado por los espacios de consumo de cada agente, en nuestro caso estos serán R^l_+. Llamaremos a las variables $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ variables de estado, mientras que $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ serán llamadas variables de control o exógenas. En estado de equilibrio, establecidos los parámetros w los posibles valores de λ para los que $e(\lambda, w) = 0$ determinan el estado del sistema (el equilibrio en el que se encuentra la economía). Perturbaciones externas sobre los parámetros pueden hacer cambiar el equilibrio del sistema, pero generalmente pequeñas modificaciones en estos parámetros no alterarán demasiado al equilibrio, y mantendrán constante la cantidad de elementos en Eq esto es lo que sucede típicamente, pues típicamente las economías son regulares. No obstante en ciertos casos pequeñas modificaciones en los valores de w pueden producir grandes cambios, esto sucede en las proximidades de una singularidad. Llamaremos **catástrofe** a una transición brusca de un estado a otro de equilibrio producido por modificaciones pequeñas de los parámetros.

Llamamos equilibrios singulares de una economía al conjunto de elementos en Eq'(w) para los que el corrango de la matriz jacobiana es no nulo. El corrango de la matriz $J_\lambda e_w(\bar{\lambda})$ queda definido por la siguiente igualdad:

$$\text{corank } J_\lambda e_w(\bar{\lambda}) = (n - 1) - \text{rank} J_\lambda e_w(\bar{\lambda})$$

Clasificaremos a las economías singulares en una primera aproximación en dos grandes clases, las que contienen unicamente equilibrios singulares (o críticos) no degenerados, y aquellas que tienen equilibrios singulares (o críticos) degenerados. Esta distinción queda básicamente definida por el corrango de la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad. Mientras que los primeros son de corrango 1, los restantes son de corrango mayor que 1. En general el corrango es una medida de cuan degenerado es un valor crítico. Llamaremos **economías singulares no degeneradas** a aquellas que no presentas equilibrios críticos degenerados, economía que presenten l menos un equilibrio crítico degenerado, serán llamadas **economías singulares degeneradas**.

A los efectos de introducir la Teoría de Catástrofes en economía permítasenos considerar el siguiente ejemplo, de gran generalidad como luego veremos.

Ejemplo 1. Consideremos una economía de dos agentes con dos bienes, con dotaciones iniciales $w_i = (w_{i1}, w_{12})$; $i = 1, 2$. Supondremos que la dotación inicial agregada (oferta agregada) está fija, sea esta $W = (W_1, W_2)$. Será entonces

$$W_j = w_{1j} + w_{2j}, j = 1, 2 \ (*)$$

siendo w_{ij} la dotación inicial en el bien j del agente i. Las dotaciones iniciales pueden sufrir redistribuciones pero supongamos momentáneamente que el total no puede ser modificado, es decir W es un vector cuyas coordenadas son constantes. El conjunto de equilibrios quedará representada aquí por :

$$\mathcal{V}_W = \{(\lambda, w) \in E^{n-1}_{++} \times \Omega,: e(\lambda, w) = 0, w_{1j} + w_{2j} = W_j; j = 1, 2\}$$

El equilibrio quedará caracterizado por los $(\lambda, w_{i1}, w_{i2})$ para los que $e_i(\lambda, w_{i1}, w_{i2}) = 0$, siendo suficiente considerar, por la ley de Walras, solamente la función exceso de utilidad de uno de los agentes. Además por ser λ un elemento de E^1_{++}, conocida una de sus coordenadas conoceremos la otra por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos considerar a la función exceso de utilidad del agente i como función solamente del correspondiente valor de λ. Conocidas las dotaciones iniciales de uno de los dos agentes la condición (*) permite determinar automáticamente, las correspondientes dotaciones del otro agente. Supongamos que la función exceso de utilidad del agente 1 es:

$$e_1(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) = 3W_1\lambda_1 - 3w_{11}(\lambda_1)^{1/3} + w_{22} \tag{5}$$

En términos de la teoría de catástrofes λ_1 es la variable de estado mientras que w_{11} y w_{22} serán en este caso los parámetros.

Los equilibrios de esta economía serán entonces los valores de $(\lambda_1, w_{11}, w_{22})$ que anulen 5 y los correspondientes $(\lambda_2, w_{21}, w_{12})$ obtenidos a partir de ellos. Llamaremos **superficie de catástrofe** a

$$C_F = \{(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) \in \mathcal{V}_W: \det J_{\lambda 1} e_1(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) = 0\}.$$

Las economías cuyas dotaciones iniciales pertenezcan a este conjunto serán llamadas singulares. En este caso la superficie de catástrofes queda definida por:

$$C_F = \left\{(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) \in \nu_W : \frac{\partial e}{\partial \lambda_1} = 3W_1 - w_{11}\lambda^{-2/3} = 0\right\}.$$

Explicitamente:

$$C_F = \left\{\left(\frac{w_{11}}{3W_1}\right)^{3/2},\ w_{11}, \frac{2w_{11}^{3/2}}{(3W_1)^{1/2}}\right\}$$

Proyectando en el espacio de parámetros obtendremos el llamado **conjunto de bifurcación**:

$$B_F = \left\{w_{11}, \frac{2w_{11}^{3/2}}{(3W_1)^{1/2}}\right\}$$

Este conjunto queda representado en el espacio de parámetros w_{11}, w_{22} por una parábola, al atravesar la cual el número de equilibrios de la economía cambia. Las economías cuyas dotaciones iniciales pertenecen a este conjunto son la economías singulares. Al atravesar esta curva la cantidad de equilibrios se modifica de 1 a 3 ó recíprocamente. El número de equilibrios queda determinado por el discriminante

$$\delta = 27\left(\frac{w_{11}}{W_1}\right)^2 - 4\left(\frac{w_{22}}{W_1}\right)^3$$

de esta manera obtenemos que si:

- $\delta < 0$ existen tres equilibrios regulares.
- $\delta > 0$ existe un equilibrio regular.
- $\delta = 0$, $w_{11}w_{22} \neq 0$ un equilibrio crítico (o singular) y uno regular.

La matriz Hessiana de la función considerada es singular, como veremos más adelante esto prueba que el equilibrio crítico es degenerado. La Teoría de Catástrofes, nos muestra que es posible reducir el análisis de las llamadas catástrofes (momentos de grandes cambios producidos por modificaciones pequeñas de las variables de control) a unos pocos casos típicos. La presencia posible de un tipo u otro de catástrofes en cada economía depende en última instancia, de las funciones de utilidad de los agentes, y divide al espacio de economías en clases de equivalencia.

Entendemos que conocer las características de los posibles conjuntos de catástrofe que pueden aparecer en una economía en particular, ayudaría a predecir las posibles modificaciones abruptas y las consecuencias futuras para el desarrollo económico. Dedicaremos la siguiente sección a analizar algunos aspectos de dicha teoría y sus aplicaciones a la Economía.

IV. Catástrofes y economía

La Teoría de catástrofes muestra que es posible reducir a unos pocos casos paradigmáticos el comportamiento de sistemas *cuasiestáticos* (es decir sistemas cuyos estados son perturbados únicamente por la acción de fuerzas exógenas) en las proximidades de sus singularidades. Comenzaremos analizando el caso más sencillo de funciones reales. En este caso las economías serán economías de dos agentes, que pueden ser caracterizadas plenamente por el comportamiento de una de las dos componentes de la función exceso de utilidad. Veremos que en este caso, el comportamiento de las economías en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado, queda totalmente determinado por el teorema de Morse, mientras que en el caso de equilibrios críticos o singulares degenerados, si los parámetros relevantes no son más de cuatro, una de las llamadas **7 catástrofes elementales** describen completamente dicho comportamiento, [Castrigiano, D.; Hayes, S.].

Luego analizaremos casos un poco más generales, especialmente las llamadas singularidades de tipo **con pliegues** y las de tipo **cúspide**. Entendemos que el estudio del comportamiento del desarrollo económico a partir de consideraciones provenientes de la teoría de catástrofes, puede ser de ayuda para comprender y prever posibles cambios bruscos futuros en el desarrollo de una economía. La descripción cuasiestática de los fenómenos propia de la Teoría de Catástrofes se adapta bien a las características similares de la Teoría Económica.

A. Economías con dos agentes

Consideraremos economías con dos agentes y l bienes, en este caso la economía queda caracterizada por las dotaciones iniciales de los agentes w y basta considerar (por la Ley de Walras) una de las dos componentes (e_i por ejemplo) de la función exceso de utilidad como función de las dotaciones iniciales y (por la homogeneidad de grado cero de la función exceso de utilidad) el valor de λ correspondiente a uno de los agentes (por ejemplo λ_i).

Sea entonces e_i. $(0, 1) \times \Omega \rightarrow R$ es decir e_i pone en correspondencia $(\lambda_i, w) \rightarrow e_i(\lambda_i, w)$.

Definición 7. Una **función** f se dice **de Morse** si el conjunto de singularidades (conjunto de puntos críticos), de f es no degenerado.

Teorema 4. Sea X una variedad diferenciable. Entonces el conjunto de funciones de Morse es un conjunto abierto y denso dentro del conjunto $C^\infty(X, R)$.

Prueba: Es resultado inmediato del teorema de transversalidad.

A continuación veremos que el comportamiento de las economías de dos agentes en las proximidades de equilibrios críticos no degenerados, está totalmente determinado por el teorema de Morse.

Teorema 5 (Teorema de Morse). Sea $f : X \rightarrow R$. Entonces p es un punto crítico no degenerado de f si y solamente si existe un difeomorfismo local (en un entorno U_p de p) tal que:

$$f(y) = f(p) - y^2_1 - \dots - y^2_s + y^2_{s+1} + \dots + y^2_n \tag{6}$$

se cumple para todo $y \in U_p$.

Nota 5. Por definición: s y n son el índice y el rango de f en p.

La demostración del teorema puede verse en [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

Aplicado a las economías que aquí estamos considerando, el teorema de Morse nos permite decir que en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado, el comportamiento de diferentes funciones exceso de utilidad será similar sin importar otras características de la economía. Mientras que el teorema anterior nos dice que casi toda economía singular será no degenerada. Obsérvese que cambios en los parámetros que impliquen difeomorfismos no modifican el carácter de la singularidad de un punto, de ahí que pueda decirse que economías que no presenten equilibrios singulares degenerados se comporten similarmente (a menos de difeomorfismos) en las proximidades de la singularidad. La existencia y características particulares de los equilibrios críticos degenerados propios de cada economía, diferencian los comportamientos de los sistemas económicos en las vecindades de los equilibrios críticos. Veremos que es posible diferenciar grados de degeneración de los equilibrios críticos y que es posible clasificar a las economías según tal característica que depende únicamente de sus fundamentos, en particular de las preferencias de los agentes, las que determinan el tipo de singularidades posibles, presentes en la economía.

El teorema de Morse, nos permite decir entonces, que en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado $(\bar{\lambda}, \bar{w})$ existe un difeomorfismo ϕ, tal que localmente la función exceso de utilidad tiene la forma dada por uno de los estereotipos:

$$e_i(\bar{\lambda}_1, \bar{w}) = \mp\lambda_i - \bar{w}_1^2 - \ldots - \bar{w}_s^2 + \bar{w}_{s+1}^2 + \ldots + \bar{w}_n^2.$$

Para las economías consideradas $n = 2l$, pues cada $\bar{w}_j$ representa a una de las coordenadas de las dotaciones iniciales de los agentes, por lo tanto habrá $2l + 2$ estereotipos diferentes según la distribución de signos.

Como puede verificarse ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.]. Un punto crítico p de f es no degenerado sí y solamente sí la matriz Hessiana es invertible. Por lo tanto esta caracterización da una forma sencilla de saber si un equilibrio crítico es o no degenerado. Recordemos que la matriz hessiana de f es la matriz

$$\partial^2 f = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}.$$

El siguiente teorema es un corolario del teorema de la función inversa.

Teorema 6. Los puntos críticos no degenerados son puntos aislados.

Prueba: Sea $p \in U$ un punto crítico no degenerado de f y sea $\phi = \partial f = (\partial f / \partial x_1, \ldots, \partial f / \partial x_n)$. Entonces $J\phi(p) = \partial^2 f(p)$ es invertible y por lo tanto ϕ es un difeomorfismo local en p. Luego por el teorema de la función inversa existen subconjuntos abiertos V de U que contiene a p y V de $\phi(p)$ donde *phi* es inyectiva. Esto implica que $\partial f(x) = \phi(x) \neq \phi(p) = \partial f(p) = 0$. En consecuencia, como los equilibrios regulares, los equilibrios críticos no degenerados serán localmente únicos, y en cantidad finita si las dotaciones iniciales están definidas en un subconjunto compacto del espacio de consumo.

Para funciones de Morse f vale que, el conjunto de ellas cuyos valores críticos son diferentes, esto es si p y q son distintos puntos críticos, entonces $f(p) \neq f(q)$ es residual, ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.]. De esta forma la probabilidad, en el caso en que tal concepto pueda definirse, de economías con múltiples equilibrios singulares es nula. Más formalmente, el conjunto de las economías de dos agentes con múltiples equilibrios singulares es *raro* es decir es complementario de un conjunto residual[1].

Nota 6 (Sobre el cambio en el número de equilibrios). Puede concluirse que, típicamente las economías transitarán de una situación con único estado posible de equilibrio a una situacioón en la que tres estados de equilibrio son posibles.

B. Economías con pliegues

A continuación consideraremos economías con un número finito de bienes y agentes y estudiaremos las características y posibilidades de ocurrencia de un tipo de singularidad llamada pliegue. La caracterización de los equilibrios de una determinada economía depende del comportamiento de la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad en el punto en cuestión, en primer término, el hecho de que su rango sea menor que el esperado nos dice si el equilibrio es o no crítico. El grado en que disminuya el rango de dicha matriz, es una medida de la degeneración del equilibrio crítico.

Las similitudes en el comportamiento en un entorno de una punto, presentadas por funciones cuyos polinomios de Taylor coinciden en dicho punto, será la base para la clasificación de las singularidades.

1 Esta propiedad topológica no depende de la definición posible o no de una probabilidad o medida en el espacio de las economías, pero implica que si tal definición es posible, entonces un conjunto raro es de probabilidad cero.

Entramos aquí de lleno en un problema central de la Teoría de Catástrofes, a saber cuando una función C^∞ (X,Y) está **determinada** en el entorno de un punto, es decir, cuando funciones que tienen el mismo desarrollo de Taylor en un punto p coinciden, a menos de un cambio de coordenadas producido por un difeomorfismo en un entorno de un punto. En general esto no sucede, las condiciones necesarias y suficientes para que una función quede caracterizada por su k-ésimo polinomio de Taylor están dadas en [Mater, J.]. En este trabajo no alcanzaremos a tratar este punto, no obstante veremosque funciones que presenten polinomios de Taylor iguales hasta cierto grado (a menos de difeomorfismos en sus coordenadas) presentarán un comportamiento similar en las proximidades de suspuntos críticos degenerados.

Daremos a continuación algunas definiciones y notación básica de la Teoría de Catástrofe, imprescindibles para continuar con nuestro trabajo de clasificación de singularidades.

Definición 8 Germen. Sean X e Y variedades diferenciables F_1, F_2: $X \rightarrow Y$ funciones diferenciables, tales que $F_1(p) = F_2(p) = q$. Diremos que ambas funciones son equivalentes si coinciden en un entorno de p, el espacio de clases de equivalencia así definido, será llamado espacio de Gérmenes, siendo $[F]_p$ el **Germen** de F **en p** la clase de equivalencia correspondiente a F.

Notaremos como **E** al espacio de gérmenes. La determinación es local, el punto en el que está considerado el germen será explicitado cuando haya riesgo de confusión.

Definición 9.

- El símblolo $D^h f$ define las derivadas $(\partial^{|h|} f) / (\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n})$ donde $|h| = \sum_{j=1}^{n} h_j$ considerando todas las posibles formas de sumar $|h|$ con $h_i \geq 0$, i = 1, 2,...,n.

- Sea k un entero no negativo. Dos gérmenes [f] y [g] en **E** se dicen **k-equivalentes** en p $D^h f(p) = D^h g(p)$ para todo h tal que $|h| < k$.

- La clase de los gérmenes k-equivalentes con [f] es llamada el **k-jet de** [f] y es denotada por $j^k[f(p)]$.

• Notaremos por $J^k(X, Y)_{p,q}$ al espacio de clases de gérmenes k-equivalentes en p, esto es el espacio de k- jets con fuente p y objetivo q.

• Un elemento $\sigma \in J^k(XY) = U_{(p,q) \in X \times Y} J^k(X\ Y)_{p,q}$ es llamado **k-jet**.

Si X e Y son variedades diferenciables con n = dim X y m = dim Y entonces $J^K(X, Y)$ es una variedad diferencial cuya dimension es igual a n + m + **(la dimensión del espacio formado por la suma directa de todos los polinomios de grado menor o igual que k con no más de m variables).**

Obsérvese que cualquier función exceso de utilidad, puede presentar valores críticos que no sean el cero, es decir un determinado valor $z \in R^{n-1}$ puede ser crítico para la función e en el sentido de que existan puntos, preimágenes por e de z donde el rango de la matriz jacobiana es menor que n - 1. Nuestro interés está en los puntos singulares que corresponden al valor crítico cero, es decir los equilibrios críticos, puntos de la forma $(\lambda, w) \in E^{n+1}_{++} \times \Omega$ que anulen a la función e además de hacer de la matriz jacobiana una matriz singular. Solamente los k-jet σ con objetivo cero, $\sigma \in J(X, Y)_{p,0}$ donde $X = E^{n+1}_{++} \times \Omega$ e $Y = R^{n-1}$ son los que representan el comportamiento de la función exceso de utilidad en las proximidades de los equilibrios.

Nota 7. Notación.

• A los efectos de evitar confusiones con la notación representaremos de ahora en más a la matriz jacobiana de f evaluada en p por $(\partial f)_p$.

• Como $\mathrm{rank}(\partial f)_p$ notaremos el rango de la matriz jacobiana en p, es decir el número máximo de columnas o filas linealmente independientes que la matriz posee. Particularmente: $\mathrm{rank}(\partial e_w)_\lambda = n - 1$.

• Definimos el rango de σ como $\mathrm{rank}\ \sigma = \mathrm{rank}\ (\partial f)_p$ y $\mathrm{corank}\ \sigma = \mu - \mathrm{rank}\sigma$ donde $\mu = \min\ \{\dim X, \dim Y\}$. En nuestro caso siendo $X = E^{n-1}_{++} \times \Omega$ e $Y = \Re^{n-1}$, tendremos $\dim X = (n - 1) + nl$ y $\dim Y = n - 1$ por lo tanto $\mu q = n - 1$.

Sea $f: X \rightarrow Y$ un elemento representativo de σ, existe un mapa $j^kf: X \rightarrow J^k(X, Y)$ tal que a cada punto $p \in X$ lo pone en correspondencia con $j^kf(p)$ la clase de equivalencia de f en $J^k(X, Y)_{p,\ f(p)}$. En nuestro caso nos interesa la clase de equivalencia $J^ke(p)$, que el mapa J^ke, asigna a cada punto $p = (\lambda, w)$ de equilibrio.

Cada $\sigma \in J^1(X, Y)$ define un único mapa lineal de $T_pX \to T_qY$, el que queda determinada por la transformación lineal $(\partial f)_p$, definida por la matriz jacobiana de cualquier elemento $f \in C^\infty(X, Y)$, representativo de σ. Sea:

$$S_r = \{ \sigma \in J^1(X, Y): \text{corank } \sigma = r \},$$

el subconjunto de $J^1(X, Y)$ formado por las clases de equivalencia de todas las funciones $f: X \to Y$ suaves, tales que el corrango de su matriz jacobiana es r, es decir por los 1-jet de corrango r.

Puede probarse que este conjunto es una subvariedad de $J^1(X, Y)$, con codim $S_r = (n - \mu + r)(m - \mu + r)$, siendo $\mu = \min\{\dim X, \dim Y\}$ ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

La codimensión de las singularidades de tipo S_r descarta su ocurrencia en el caso de funciones entre variedades de rango menor que el corrango de la variedad. De esta forma economías de dos agentes con a lo sumo dos parámetros no presentarán singularidades diferentes de las que en S_1 pueden existir. Veremos que éstas sólo pueden ser o tipo pliegue o tipo cúspide.

El conjunto de singularidades de f en los que el jacobiano de f resulta de corrango r se representará por $S_r(f) = (j^1f)^{-1}(S_r)$. De esta manera $S_r(e)$ representará el conjunto de los puntos críticos de e nuestro interés radica en el estudio del comportamiento de la función exceso de utilidad en las proximidades de los equilibrios críticos, es decir de aquellos puntos de la variedad $X = E^{n+1}_{++} \times \Omega$ donde no solamente el jacobiano tiene determinante nulo, sino donde a la vez la función toma el valor cero.

Definición 10. Sea $f : X \to Y$ tal que (j^1f) es transvesal a S_1. Entonces x en $S_1(f)$ es un punto de pliegue si $T_xS_1(f) + \text{Ker}(\partial f)_x = T_xX$.

- Representamos por T_pY el espacio tangente a la variedad Y en el punto p.
- Como Ker $(\partial f)_x$ representamos al núcleo de la transformación lineal $(\partial f)_x$.

El estudio de los equilibrios críticos no degenerados supone el análisis de $S_1(e)$ es decir de la preimagen por j^1e del conjunto de jets de corrango 1 con objetivo 0. Sea $f : X \to Y$, con $\dim X \geq \dim Y$ y $\mu = \dim X - \dim Y$. En el caso de ser j^1f transversal a S_1 tendremos que $S_1(f)$ será una variedad cuya codimensión satisface:

$$\text{codim } S_1(f) = \text{codim } S_1 = \mu + 1,$$

ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.]. Note que la dimensión en un punto x de $S_1(f)$ del ker $(\partial f)_p$ es $\mu + 1$. Es decir el espacio tangente a $S_1(f)$ y el ker $(\partial f)_p$ tienen dimensiones complementarias.

Siendo e la función exceso de utilidad tendremos que $\mu = [nl + (n - 1)] - [n - 1]$, por lo tanto el conjunto de singularidades de la función exceso de utilidad es una variedad de $\text{codim} S_1(e) = nl + 1$ de la cual es subconjunto el conjunto de los equilibrios críticos no degenerados.

El comportamiento de las economías en las proximidades de los equilibrios de pliegue queda caracterizado por el siguiente teorema.

Teorema 7. Sea $f : X \to Y$ una submersión con pliegues y sea $p \in S_1(f)$. Entonces existe un sistema de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ centrado en p y otro sistema $y_1, y_2, \ldots y_n$ centrado en f (p) tales que en estos sistemas f tiene la forma:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x^2_m \pm \ldots \pm x^2_n),$$

la demostración puede verse en [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

La forma local que adquiere la función en un entorno de la singularidad p, justifica el nombre de pliegue. Obsérvese que en el caso de considerar solamente variedades de dimensión 2, la forma normal (local) de la función en el sistema de coordenadas señalado en el teorema, está dada por $(x_1, x_2) \to (x_1, x^2_2)$. Esta transformación se puede obtener haciendo las siguientes operaciones geométricas:

1. Primeramente se mapea el plano (x_1, x_2) en el cilindro parabólico $x_3 = x^2_2$ en en el espacio (x_1, x_2, x_3) por el mapa $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2, x^2_2)$, es decir se **pliega** el plano.

2. Y ahora proyectamos en el plano (x_1, x_3). Completando así el plegado.

Obsérvese que en este caso $S_1(f)$ será un variedad de dimensión 1 cuyo plano tangente se mantiene ortogonal al plano x_2, x_3 que coincide con el ker $(\partial f)_p$. Nótese también que en el caso de ser Y = R el conjunto de las submersiones con pliegues son precisamente las funciones de Morse.

En el caso de economías como las presentadas en el ejemplo de la sección III y en general para mapas entre variedades de dimensión 2, las únicas singularidades posibles son del tipo $S_1(e)$, pues $S_2(e)$ no puede ocurrir desde que su codimensión es 4. Es posible demostrar que sólo pueden existir dos tipos de comportamientos en las proximidades de singularidades, o de equilibrios críticos:

- $T_pS_1(e) \oplus \text{Ker}\,(\partial e)_p = T_pX$.
- $T_pS_1(e) = \text{Ker}\,(\partial e)_p$.

Luego de los cambios pertinentes en las coordenadas veremos que, la primera ocurrencia representará una singularidad de tipo pliegue y la segunda una de tipo cúspide. El ejemplo presentado en la sección III es representativo del comportamiento de las economías en las proximidades de sus equilibrios críticos degenerados.

Nota 8 (sobre la impridad en el número de equilibrios). La imparidad en el número de equilibrios de las economías impone que si existe una singularidad w, de tipo pliegue para la ecuación $e(\lambda, w) = 0$, entonces existe una solución $\bar{\lambda}$, $e(\bar{\lambda}, w) = 0$ tal que $(\partial e_w)_{\bar{\lambda}}$ tiene rango igual a n - 1.

C. Singularidades $S_{r,s}$

Sea $f : X \to Y$ un mapa tal que j^1f es transversal a S_r. Llamaremos a tales mapas *uno genérico*. Denotaremos por $S_{r,s}(f)$ al conjunto de puntos donde el corrango del mapa $f : S_r(f) \to Y$ es s.

En [Golubitsky, M. Guillemin, V.] se prueba que $S_r(f)$ es una variedad de dimensión igual a $r^2 + r\mu$ donde $\mu = |\dim X - \dim Y|$, en el caso de economías con n agentes y l bienes, siendo $X = E^{n+1}_{++} \times \Omega$ e $Y = R^{++}_{n-1}$ tendremos que $\mu = nl$. Se concluye que $\dim S_r(f) < \dim Y$ es decir que para economías como las consideradas, el conjunto de singularidades para e donde el rango del jacobiano de la función exceso de utilidad decae en r es de dimensión menor que n - 1, es decir: $\dim S_r(e) < n - 1$. De esta manera las singularidades para economías con dos agentes son, si existen, genéricamente siempre puntos aislados.

Obsérvese que $x \in S_{r,s}(f)$ sí y solamente sí $x \in S_r(f)$ y además el kernel de $(\partial f)_x$ intersecta el espacio tangente a $S_r(f)$ en un espacio de dimensión

s. Economía con dos agentes presentarán entonces únicamente singularidades de tipo $S_{1,0}$ o $S_{1,1}$ es decir pliegues o cúspides.

De forma análoga a como S_r fue descrita como subvariedad en $J^1(X, Y)$, $S_{r,s}$ puede considerarse como subvariedad en $J^2(X, Y)$, siendo que $x \in S_{r,s}(f)$ sí y solamente sí $j^2f(x) \in S_{r,s}$.

El teorema de transversalidad prueba que j^2f es transversal a $S_{r,s}$, para un conjunto residual en el conjunto de mapas $C^\infty(X, Y)$. Llamaremos 2-genérico a un mapa en estas condiciones.

A partir de la observación anterior puede probarse que los conjuntos $S_{r,s}(f)$ son genéricamente subvariedades de X cuyas dimensiones están definidas por:

$$\dim S_{r,s}(f) = \dim X - r^2 - \mu r - (\operatorname{codim} S_{r,s}(f) \text{ en } S_r(f)), \tag{7}$$

donde

$$\operatorname{codim} S_{r,s} = \frac{m}{2}x(k+1) - \frac{m}{2}(k-s)(k-s+1) - s(k-s), \tag{8}$$

siendo

- $m = \dim Y - \dim X + k$
- $k = r + \max(\dim X - \dim Y,\ 0)$. [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

En el caso de economías con n agentes y l bienes, representadas por la función exceso de utilidad e, se tendrá que: $\dim X = nl + (n-1)$ mientras que $\dim Y = n-1$. Esto hace que las singularidades posibles para una economía estén relacionadas con el número de agentes y bienes, siendo imposible que aparezcan algunas singularidades a menos que la dimensión de X sea suficientemente grande. Veremos a continuación algunos ejemplos.

D. Singularidades posibles y dimensiones de la economía

En primer lugar notemos que en la ecuación (7) m y k serán respectivamente iguales a r y a r + nl. A partir de aquí sustituyendo en (8) obtenemos para e 2-genérico que:

$$\operatorname{codim} S_{r,s}(e) = (r+nl)[rs-s] - \frac{rs}{2} + \frac{rs}{2} - \frac{rs^2}{2} + s^2.$$

Sustituyendo k = nl + r en (8) obtenemos:

$$\operatorname{codim} S_{r,s}(e) = nl[rs-s] + r^2 s - \frac{rs^2}{2} + \frac{rs}{2} + s^2,$$

y para la dimensión de la subvariedad $S_{r,s}(e)$ obtenemos a partir de (7) la igualdad:

$$\dim S_{r,s}(e) = nl[1 - r - rs + s] + rs\left(-r + \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) - s^2 - r^2.$$

Para el caso particular de $S_{1,1}$ resulta codim $S_{11} = 2$ y dim $S_{11} = n - 2$. De esta forma economías con dos agentes presentarán genéricamente un conjunto de singularidades de tipo S_{11} formado por puntos $(\lambda, w) \in E^{n+1}_{++} \times \Omega$ aisladas. En general formarán variedades de tipo n - 2.

Puede probarse a partir de (7) y (8) que genéricamente no habrá singularidades del tipo $S_{1,2}(e)$ para $n < 4$. Pues para obtener dim $S_{1,2}(e) \geq 0$ es necesario la existencia de al menos 4 agentes.

Conclusión

El análisis de las singularidades es todavía una asignatura pendienteen la Teoría del Equilibrio General. En el tema, el presente trabajo no pretende ser más que una muestra de las posibilidades de obtener nuevos conocimientos sobre el comportamiento de las economías, particularmente en el momento y en los antecedentes o momentos inmediatamente posteriores a los cambios abruptos, catástrofes.

Ciertamente que a pesar de pequeño el conjunto de los equilibrios críticos juega un papel fundamental en la Teoría Económica. La no existencia de tales singularidades transformaría a la economía en la ciencia mejor previsora del futuro. La existencia de la multiplicidad de equilibrios, conclusión de la existencia de las singularidades hace no sólo que no pueda predecirse el comportamiento regular, pues en principio nada dice en que equilibrio de los múltiples posibles vivirá la sociedad, sino que además hace imprevisible el futuro. Un indicio de tal comportamiento puede intuirse a partir del conocimiento de las posibles singularidades futuras y sus formas.

La moderna teoría de catástrofes clasifica las singularidades hasta cierto grado y analiza la estabilidad de los mapas con tales singularidades. Mostrando hasta que punto perturbaciones pequeñas en las condiciones iniciales, producidas por ejemplo por deficiencias en las medidas de las situaciones iniciales, son intrascendentes en el momento e mostrar posibles comportamientos futuros de las economías. Si pequeñas modificaciones en las variables de control implican grandes cambios en el conjunto de equilibrios, la situación es altamente preocupante, pues toda medida implica error. Hasta que punto pueden ser los conjuntos de equilibrios independientes de pequeñas modificaciones en los parámetros o no, es tema de la Teoría de Catástrofes y del estudio de la estabilidad de los mapas y sus singularidades aplicados s a la Teoría Económica.

El objetivo del trabajo es el de mostrar las posibilidades del estudio de las singularidades en economía las que en definitiva en muchos casos la representan, haciendo abstracción de otros muchos factores, muy claramente. Mapas con iguales singularidades son equivalentes, en cierta forma esto es traducible a las economías, *economías con el mismo tipo de singularidades presentancomportamientos similares, y en este sentido se puede decir que son equivalentes*.

Por otra parte la función exceso de utilidad muestra claramente como cambios en las dotaciones iniciales implica cambios en la forma en que los agentes económicos gravitan en la sociedad pues precios y asignaciones de equilibrio están biyectivamente relacionados con pesos sociales. Esta relación es intuitivamente clara, pero es el análisis de la función exceso de utilidad quien lo establece formalmente, a la vez el análisis de las singularidades de esta función muestra los momentos de cambios y sus formas posibles.

Finalmente diremos que en condiciones muy generales sobre las funciones de utilidad y sus derivadas es posible extender el análisis acá realizado a economías con infinitos bienes, es decir con bienes contingentes al tiempo en que serán consumidos o los posibles estados de la naturaleza en el que el consumo será realizado.

Referencias

ACCINELLI, E. (1996) "Some Remarks on Uniqueness of Equilibrium in Economies with Infinitely Many Goods". *Estudios Económicos,* vol. 6, 1996.

ACCINELLI, E. (1999) "On Uniqueness of Equilibrium for Complete Markets with Infinitely Many Goods and in Finance Models". *Estudios de Economía*, vol. 26, No. 1, junio 1999.

ARAUJO, A. (1989) "The Non-Existence of Smooth Demand in General Banach Spaces". *Journal of Mathematical Economics*, No. 17, 1989, págs. 1 - 11.

BALASKO, I. *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. Academic Press, INC. 1988.

CASTRIGIANO, D., HAYES, S. *Catástrophe Theory*. Adisson-Wesley Publishing C. 1993.

GOLUBITSKY, M. GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. New York, Springer-Verlag, 1973.

GUILLEMIN, V. POLLAK, A. *Differential Topology*. New Jersey, Prentice Hall, 1974.

KARATZAS, I. LAKNER, P. LEBOCKY, J. SHREVE, S. *Equilibrium in a Simplified Dynamic, Stochastic Economy with Heterogeneous Agents*, Academic Press Inc. 1991.

LIMA, E. *Curso de Análisis*. Ed. IMPA, vol 2., 1981.

MAS-COLELL, A. *"General Equilibrium: A Differentiable Approach"*. Cambridge 1985.

MAS-COLELL, A. WHINSTON, M. *Microeconomic Theory*. Oxford, 1995.

MATER, J. "Stability of c^{∞} mappings: III". *IHES*, 35, 1968, 127- 156.

NEGISHI, T. "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy". *Metroeconomica*, 12, 1960.