

## CONTROL ADAPTATIVO UN PASO ADELANTE, POR MODELO DE REFERENCIA Y PLANOS DESLIZANTES

### RESUMEN

Se presentan los algoritmos de control adaptativo un paso adelante, modelo de referencia y planos deslizantes y se aplican en el control de un sistema de tercer orden sometido a variaciones paramétricas.

**PALABRAS CLAVES:** Control adaptativo, paso adelante, modelo de referencia, planos deslizantes.

### ABSTRACT

*One step ahead, reference model, and sliding modes control algorithms are presented and applied to control a third order system whose parameters can vary.*

**KEYWORDS:** Adaptive control, one step ahead, reference model, sliding mode.

### DIDIER GIRALDO BUITRAGO

Ingeniero Electricista, MEE  
Profesor Titular  
Universidad Tecnológica de Pereira  
dgiraldo@utp.edu.co

### ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA

Ingeniero Electricista  
Estudiante Maestría en Ing. Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
andreses1@utp.edu.co

### EDUARDO GIRALDO SUÁREZ

Ingeniero Electricista  
Estudiante Maestría en Ing. Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
egiraldos@ohm.utp.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Las técnicas de control adaptativo permiten no sólo controlar un sistema fijo, sino ajustarse de acuerdo a las perturbaciones que este tenga y a variaciones en el comportamiento del sistema físico a controlar [1].

Entre las técnicas de control más reconocidas, se tienen un paso adelante, modelo de referencia, reubicación de polos, dead beat, planos deslizantes, PID, entre otras. Estas técnicas de control son dependientes en alto grado del identificador de parámetros que se utilice.

En este artículo, se presentan las técnicas de control un paso adelante, modelo de referencia, y planos deslizantes [2], con algunas consideraciones de implementación para los identificadores paramétricos (proyección, proyección ortogonal, mínimos cuadrados). Se muestra el modelamiento matemático, y los resultados obtenidos sobre dos sistemas determinísticos de tercer orden, implementados con amplificadores operacionales [3].

## 2. MODELO DARMA

El modelo DARMA puede ser expresado como [1]:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (1)$$

donde

$$B(q^{-1}) = q^{-1}B'(q^{-1}) \quad (2)$$

y  $q^{-1}$  el operador de retardo. Con  $A_0 = 1$  el modelo DARMA puede ser expresado como

$$y(t) = \theta_0^T \phi(t-1); \quad t \geq 0 \quad (3)$$

donde  $\theta_0$  es un vector con los parámetros de  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ , y  $\phi(t)$  es un vector que contiene los valores de salida y entrada pasados.

## 3. CONTROL UN PASO ADELANTE

Aquí se considera el control un paso adelante [1], el cual lleva la salida  $y(t)$  a un valor deseado  $y^*(t+1)$  en un paso.

Considere el sistema descrito por el modelo DARMA en la ecuación 1.

Entonces, la ley de control que lleva la salida  $y(t+1)$ , en el tiempo  $t+1$ , a una salida deseada  $y^*(t+1)$  tiene la forma

$$\beta(q^{-1})u(t) = y^*(t+1) - \alpha(q^{-1})y(t); \quad t \geq 0 \quad (4)$$

donde  $\alpha(q^{-1})$  y  $\beta(q^{-1})$  son los parámetros del sistema que se encuentran relacionados con  $A(q^{-1})$  y  $B'(q^{-1})$  respectivamente.

Se puede notar que este sistema en lazo cerrado tiene como función de transferencia  $\frac{1}{z}$ . Y debido a esto, también se puede encontrar la ley de control diseñando

un controlador en serie con la planta, como se observa en la figura 1, tal que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado sea  $\frac{1}{z}$ , es decir

$$T(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = z^{-1} \quad (5)$$

donde  $T(z)$  es la función de transferencia del sistema en lazo cerrado,  $C(z)$  es el controlador, y  $P(z)$  es la función de transferencia de la planta.

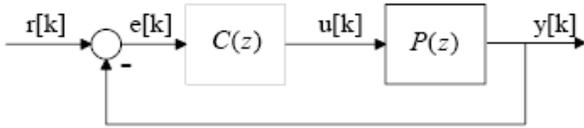


Figura 1. Esquema del controlador en serie con la planta para el control un paso adelante.

Por tanto, el controlador estaría dado por:

$$C(z) = \frac{1}{P(z)(z-1)} \quad (6)$$

o de la forma

$$C(z) = \frac{A(z)}{B(z)(z-1)} \quad (7)$$

y si se tiene en cuenta que

$$u(t) = C(q^{-1})e(t)$$

donde  $e(t)$  es el error, se obtiene la ley de control.

#### 4. CONTROL POR MODELO DE REFERENCIA

La salida deseada  $y^*(t)$  satisface el siguiente modelo de referencia [1, 4]:

$$E(q^{-1})y^*(t) = q^{-1}gH(q^{-1})r(t) \quad (8)$$

con la función de transferencia asociada  $G(z) = z^{-1}H(z^{-1})g / E(z^{-1})$ , donde  $g$  es una constante de ganancia.

Se tiene que la ley de control está dada por:

$$\alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) = gH(q^{-1})r(t) \quad (9)$$

donde  $g$  es una ganancia necesaria para alcanzar la referencia en estado estable, y

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= G(q^{-1}) \\ \beta(q^{-1}) &= F(q^{-1})B'(q^{-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $F(q^{-1})$  y  $G(q^{-1})$  son los polinomios únicos de orden 0, y  $n-1$ , respectivamente (con  $n$  el orden de la planta), que satisfacen

$$E(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-1}G(q^{-1}) \quad (11)$$

Para un sistema de tercer orden, y para un modelo de referencia de tercer orden se tiene:

$$\begin{aligned} 1 + e_1q^{-1} + e_2q^{-2} + e_3q^{-3} &= f_0 + f_0a_1q^{-1} + f_0a_2q^{-2} \\ &+ f_0a_3q^{-3} + g_0q^{-1} + g_1q^{-1} \\ &+ g_2q^{-2} \end{aligned} \quad (12)$$

Igualando coeficientes se tiene:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ g_0 &= e_1 - f_0a_1 \\ g_1 &= e_2 - f_0a_2 \\ g_2 &= e_3 - f_0a_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Y reemplazando en la ecuación 10 se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= g_0 + g_1q^{-1} + g_2q^{-2} \\ \beta(q^{-1}) &= f_0b_0 + f_0b_1q^{-1} + f_0b_2q^{-2} \end{aligned} \quad (14)$$

Por lo que reemplazando en la ecuación 9 se obtiene la ley de control.

#### 5. CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES

Una versión para modelos de una entrada y una salida que utiliza  $\phi(t)$ , está dada [2, 5]:

$$y(t+1) = \Phi(\phi(t)) + \Gamma(\phi(t))u(t) \quad (15)$$

donde  $\Phi(\bullet)$  y  $\Gamma(\bullet)$  son funciones no lineales suaves,  $y(t)$  es la salida de la planta,  $u(t)$  la señal de control.

Inicialmente, para el diseño de la ley de control, se supone  $\Phi(\bullet)$  y  $\Gamma(\bullet)$  conocidas y se define la superficie deslizante discreta como:

$$s(t+1) = C(q^{-1})e(t+1) \quad (16)$$

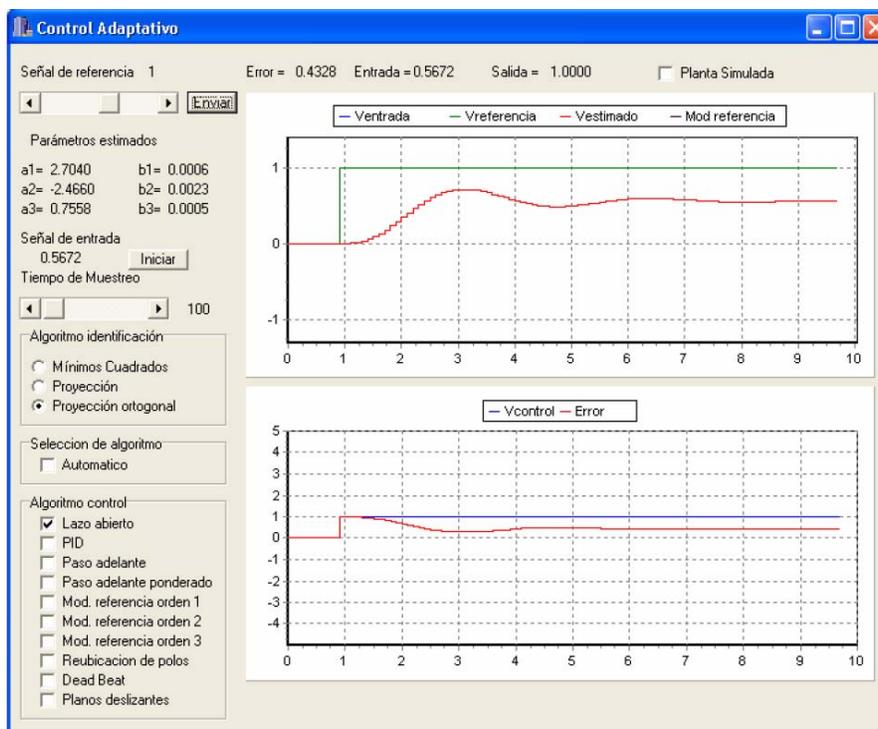


Figura 2. Programa principal y respuesta de la planta en lazo abierto. Se observa la señal de referencia, la señal de control y el error.

donde  $C(q^{-1}) = 1 + c_0q^{-1} + c_1q^{-2} + \dots$  es un polinomio de Jury y  $e(t+1) = y(t+1) - r(t+1)$  es el error de seguimiento con  $r(t+1)$  la señal de referencia.

El método de control equivalente puede ser aplicado para asegurar  $s(t+1) = 0$ , así:

$$\begin{aligned}
 s(t+1) &= C(q^{-1})y(t+1) - C(q^{-1})r(t+1) \\
 s(t+1) &= C(q^{-1})\Phi(\phi(t)) + C(q^{-1})\Gamma(\phi(t))u(t) \\
 &\quad - C(q^{-1})r(t+1) \\
 s(t+1) &= F(\phi(t)) + G(\phi(t))u(t) - C(q^{-1})r(t+1)
 \end{aligned} \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F(\phi(t)) &= C(q^{-1})\Phi(\phi(t)) \\
 G(\phi(t)) &= C(q^{-1})\Gamma(\phi(t))
 \end{aligned} \tag{18}$$

y despejando  $u(t)$  para  $s(t+1) = 0$ , se obtiene la ley de control:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -G(\phi(t))^{-1}(F(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t+1) \\
 &\quad + d_0 \text{sign}(s(t)))
 \end{aligned} \tag{19}$$

donde  $d_0$  es un término adicional para eliminar el error de estado estable propio de la técnica cuando se trabaja en tiempo discreto.

## 6. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los anteriores métodos se aplicaron al control de una planta de tercer orden y con modelo de espacio estado:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2.8 & -5.6 & -8.0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{20}$$

En la figura 2 se muestra la respuesta en lazo abierto de la planta.

La implementación de este modelo físicamente se hizo de acuerdo a [3], con amplificadores operacionales de propósito general.

La implementación de los algoritmos se realizó sobre C++ Builder 5. El programa principal se muestra en la figura 2. Se adicionó la opción para la selección automática del algoritmo de identificación, el cual lo

escoge de acuerdo al error. Es decir, si se tiene un error grande ( $e > 0.01$ ) se utilizan los algoritmos de proyección ortogonal o mínimos cuadrados, y si el error es pequeño ( $e \leq 0.01$ ) se utiliza el algoritmo de proyección.

A. Control un paso adelante

Para el control un paso adelante se tiene que para un tiempo de muestreo de 1.5 segundos, la respuesta de la planta se muestra en la figura 3.

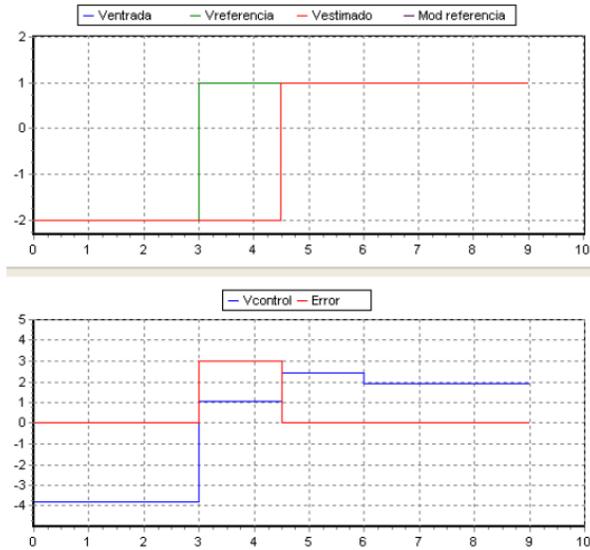


Figura 3. Respuesta de la planta al control un paso adelante.

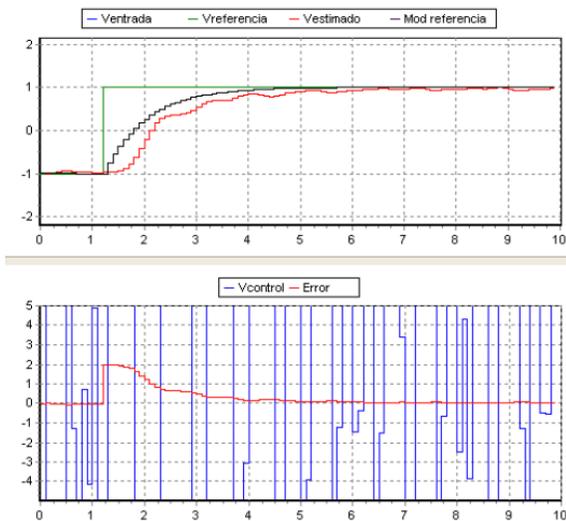


Figura 4. Respuesta de la planta al control por modelo de referencia de orden 1. Se observa la señal de referencia, la respuesta del modelo de referencia, la respuesta de la planta, la señal de control y el error.

En la figura 3 se observa que la planta alcanza la referencia efectivamente en un paso, esto en el mundo digital. Sin embargo, la respuesta real del sistema presenta oscilaciones y se estabiliza alrededor de 4 segundos después.

B. Control por modelo de referencia

Para el control por modelo de referencia, utilizando un modelo de referencia de orden 1, y con función de transferencia en  $s$  de la forma

$$M_{ref}(s) = \frac{1.25}{s + 1.25} \quad (21)$$

se tiene que, para un tiempo de muestreo de 100 milisegundos, la respuesta de la planta se muestra en la figura 4.

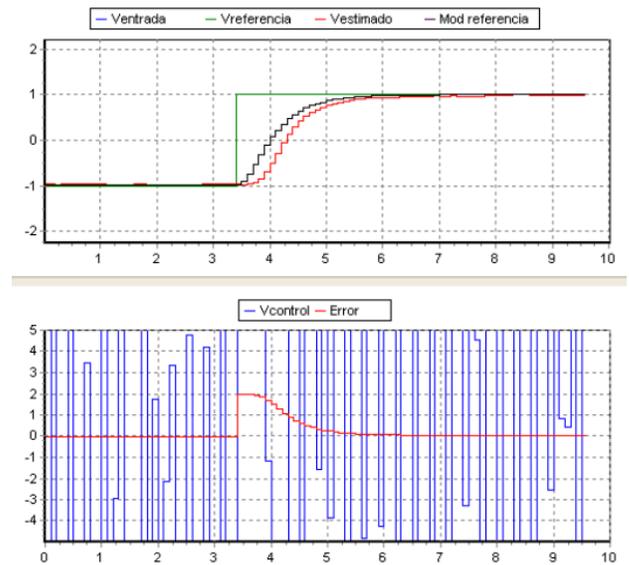


Figura 5. Respuesta de la planta al control por modelo de referencia de orden 2. Se observa la señal de referencia, la respuesta del modelo de referencia, la respuesta de la planta, la señal de control y el error.

Para el control por modelo de referencia, utilizando un modelo de referencia de orden 2, y con función de transferencia en  $s$  de la forma

$$M_{ref}(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 10} \quad (22)$$

se tiene que, para un tiempo de muestreo de 100 milisegundos, la respuesta de la planta se muestra en la figura 5.

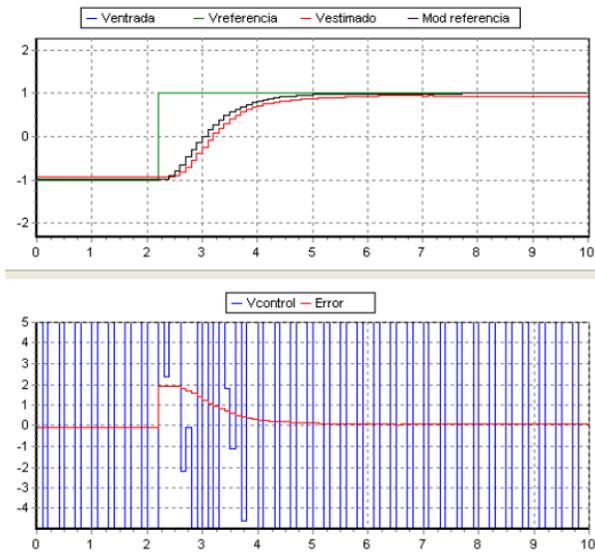


Figura 6. Respuesta de la planta al control por modelo de referencia de orden 3 con todos los polos reales. Se observa la señal de referencia, la respuesta del modelo de referencia, la respuesta de la planta, la señal de control y el error.

Para el control por modelo de referencia, utilizando un modelo de referencia de orden 3, con todos los polos reales, y con función de transferencia en  $s$  de la forma

$$M_{ref}(s) = \frac{60}{s^3 + 15s^2 + 56s + 60} \quad (23)$$

se tiene que, para un tiempo de muestreo de 100 milisegundos, la respuesta de la planta se muestra en la figura 6.

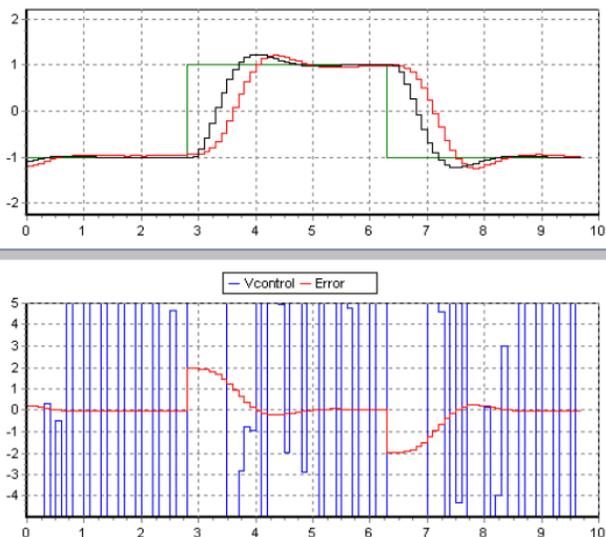


Figura 7. Respuesta de la planta al control por modelo de referencia de orden 3 con los polos en  $(-9, -2-3i, -2+3i)$ . Se observa la señal de referencia, la respuesta del modelo de referencia, la respuesta de la planta, la señal de control y el error.

Para el control por modelo de referencia, utilizando un modelo de referencia de orden 3 con un polo real y dos complejos  $(-9, -2-3i, -2+3i)$ , y con función de transferencia en  $s$  de la forma

$$M_{ref}(s) = \frac{117}{s^3 + 13s^2 + 49s + 117}$$

se tiene que, para un tiempo de muestreo de 100 milisegundos, la respuesta de la planta se muestra en la figura 7.

### C. Control por planos deslizantes

Para el control por planos deslizantes, para un tiempo de muestreo de 100 milisegundos, y con un polinomio de Jury de orden 1 se tiene la respuesta de la planta que se muestra en la figura 8.

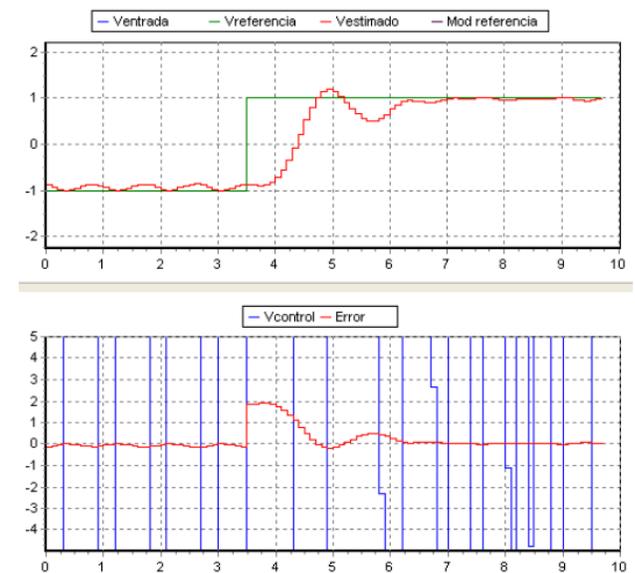


Figura 8. Respuesta de la planta al control por planos deslizantes.

### D. Control por modelo de referencia después de una variación paramétrica.

Se realizó una variación paramétrica de la planta, y se obtuvo la respuesta de la planta al escalón unitario que se muestra en la figura 9.

En la figura 9 se observa que el sistema identificó de nuevo los parámetros de la planta, y al aplicar el control por modelo de referencia de orden 2, se tiene la respuesta de la planta que se observa en la figura 10.

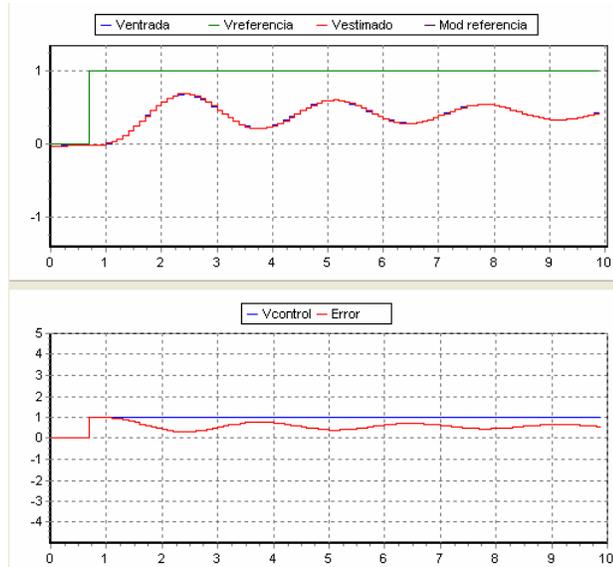


Figura 9. Respuesta de la planta después de una variación de parámetros.

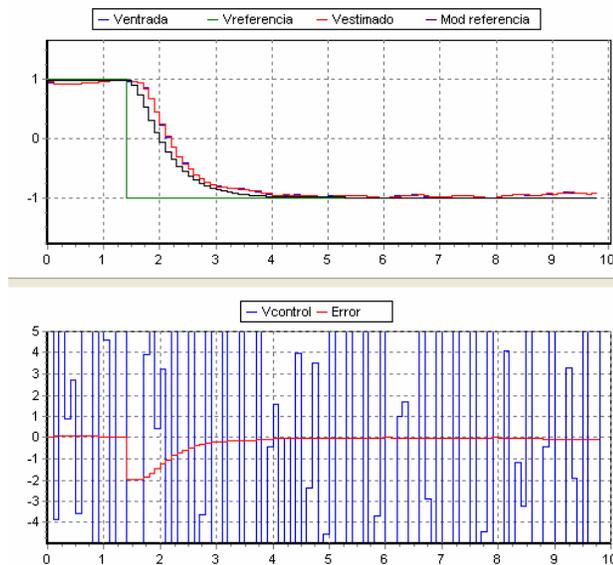


Figura 10. Respuesta de la planta al control por modelo de referencia de orden 2 después de una variación de parámetros.

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las técnicas de identificación y control adaptativo presentan una excelente herramienta para enfrentar problemas donde la planta o el sistema a controlar es cambiante con el tiempo y es sujeto a perturbaciones, pues el sistema identifica estos cambios y es capaz de llevar la salida de la planta a una salida deseada (referencia).

Cuando se realizaron las pruebas sobre la planta, al cambiar los parámetros e introducir perturbaciones por determinado tiempo, se observó que aunque el sistema oscilaba durante unos cuantos segundos, inmediatamente

re-identificaba el sistema y establecía la ley de control necesaria para llevar la salida de la planta a la referencia.

La escogencia del modelo de referencia es muy importante, puesto que si se escoge un modelo mucho más rápido que la planta el sistema en lazo cerrado puede volverse inestable. Además, es necesario establecer un valor de ganancia  $g$  adecuado, para los casos en donde la respuesta de la planta no alcanza la referencia en lazo cerrado. Además, a medida que se incrementaba el orden del modelo, no solo mejoraba la respuesta de la planta, sino que también se tenían más variables para la selección de la respuesta deseada del modelo (por ejemplo, con o sin sobrepaso). De esta observación se pudo notar que la mejor respuesta se obtiene con un modelo de orden 3.

El control un paso adelante permite obtener una señal de control muy suave y un costo computacional muy pequeño, lo cual es útil para sistemas lentos, y donde se requiera una señal de control con determinadas características. Para esto, es necesario establecer un compromiso entre el tiempo de muestreo y la saturación de la señal de control.

Para el control por planos deslizantes, fue necesario adicionarle la constante  $d_0$  para eliminar el error en estado estacionario, y se observó el efecto de *chattering*, y cómo esta oscilación se mantenía dentro de un rango de valores alrededor de la referencia.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] GOODWIN, G, SIN, K. Adaptive Filter, Prediction and Control, Prentice may, 2nd edition, 1989.
- [2] HOYOS, José Gabriel. Control adaptativo usando planos deslizantes y redes neuronales artificiales, Maestría en Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, 2004.
- [3] GIRALDO, Didier, TABARES, Iván. Teoría de Control, Universidad Tecnológica de Pereira, 1997.
- [4] GIRALDO, Didier, TABARES, Iván. Model Reference Adaptive Control, 11th ISPE/IEE/IFAC Internacional Conference on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future CARS & FOF'95, pp 1022-1027, 28-30 de Agosto de 1995, Pereira.
- [5] GIRALDO, Didier, TABARES, Iván. Control Design of a Multiple Input Multiple Output System Using Sliding Planes Approach, 15th ISPE/IEE Internacional Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CARS & FOF' 99, pp RW5-18-RW5-20, 18-20 de Agosto de 1999, Brasil.