DE LA CUADRATURA A LA TRASCENDENCIA DE π

FERNANDO VALDES MACIAS
Profesor Auxiliar Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira.
Ingeniero Electricista de la UTP.
fernandov@utp.edu.co

Con la colaboración de
ALBERTO CHAPARRO
Vendedor de Enciclopedias, autodidacta y estudioso de la Geometría Euclidiana.

RESUMEN
Se presenta un caso real en donde un genuino cuadrador de círculos envía su trabajo a la UTP para ser evaluado, y cómo se refutaron sus resultados. Utilizando un programa de dibujo por computador, planteando y resolviendo ecuaciones se analiza el problema de la cuadratura del círculo por regla y compás. Se concluye de esta refutación con una sencilla justificación matemática de la trascendencia de π .

PALABRAS CLAVES: Cuadratura, regla y compás, números trascendentes y algebraicos.

ABSTRACT
We present a real case where we found a true circle squarer, and how we cope with this situation. We used drawing software, and solving the equations we were at the position on convincing our friend of his mistakes but also about his achievements. We analyze the greek problem using simple math, a we make an approach to the transcendence of π .

KEYWORDS: *Quadrature, compass, transcendental numbers, math fields.*

Una de esas tardes del viernes, cuando la universidad empieza a estar casi sola (1995), visité a Víctor Barros en su oficina de la jefatura del Departamento de Matemáticas de la UTP. Estuvimos hablando sobre educación en el bachillerato y recordando el pasado; luego el tema viró un poco acerca de geometría y de la pobre presencia en la educación media; El profesor Víctor enfatizó el impacto, casi traumático, sobre el estudiante al empezar estudios básicos por la falta de buenas bases en geometría, situación conocida por los docentes que estaban bajo su cargo como Director. Ya para despedirme me mostró unas hojas, manuscritas, de un trabajo de geometría cuyo título me sorprendió: “La Cuadratura del Círculo”. Le pregunté por qué no lo había rechazado, y me dijo que le parecía algo interesante, y que la persona que lo desarrolló esperaba una respuesta más seria y por escrito, en fin, que valía la pena analizarlo pero que ningún colega le había prestado interés. Me solicitó el favor que las revisara cuando estuvieran en mi poder para luego emitir un comentario.
En la noche estuve pensando en los años de colegio cuando por primera vez escuché sobre el famoso problema de la antigüedad: casi dos semanas estuve trabajando con un compañero de colegio en cómo construir figuras con regla y compás al estilo griego, para luego empezar a cuadrar el círculo; el profesor de geometría sólo había hecho un rápido comentario sobre el problema helénico, pero nosotros decidimos tomarlo como un reto. Estaba en cuarto de Bachillerato y mi amigo Reynaldo en sexto; después de convertirnos en expertos en el uso de regla y compás pasamos un mes de trabajo infructuoso buscando una solución hasta que decidimos revisar el tema en la biblioteca para descubrir, entonces, que el problema era imposible de resolver con regla y compás. La respuesta del profesor de geometría, de aquel entonces, fue sorprendentemente igual a la que el profesor Víctor escuchó en los pasillos de la universidad: “No se puede, pero... tampoco sé la razón”.

El profesor Jairo Rodas, catedrático de la UTP, muy amablemente me consiguió una fotocopia del trabajo que el profesor Víctor Barros me había mostrado: el trabajo estaba firmado por Alberto Chaparro.

Mi interés creció más cuando supe que el autor del trabajo escasamente tenía pocos años de educación primaria, y además, que era una persona mayor.
Haré una descripción del trabajo del señor Chaparro, y desarrollaré las razones por las cuales no es posible lograr cuadratura por el método así sugerido.

El procedimiento del trabajo para realizar la cuadratura escrito por el Sr. Chaparro es el siguiente (favor seguir la figura 1):

1-Trace un círculo “A” de cualquier diámetro con el compás.

2- Sin modificar la amplitud del compás, encuentre la mitad del radio, ubicándolo en un extremo del perímetro del círculo “B”.

3- Con centro en la mitad del radio “C”, trace un arco “D” desde el extremo superior hasta el eje horizontal.

4- Desde el centro de círculo “E” trace una recta “F” hasta donde se encuentra el arco anterior con el eje horizontal “G”.

Fecha de Recepción: 31 Mayo de 2005
Fecha de Aceptación: 09 Septiembre de 2005

5- La longitud de esta recta “F” es el lado del decágono. Haga coincidir los extremos de esta línea con el arco izquierdo “H”, derecho “I”, superior “J” e inferior “K” del circulo “A”.

6- Con base en estos puntos de intersección “L”, trace un cuadrado perfecto “M”. El área de este cuadrado es igual al área del círculo trazado inicialmente.

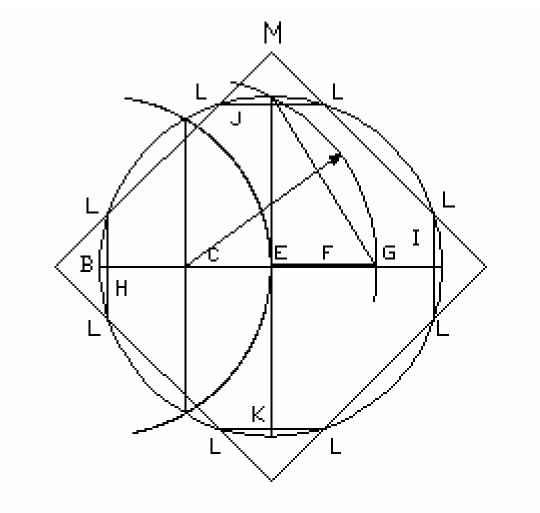

Figura 1. Gráfico de cuadratura original.

Ese fue el método que realizó el Señor Luis Alberto Chaparro R. cuya trascripción anterior es copia fiel del original remitido por él al profesor Rodas [3].

Al tratar de seguir las instrucciones del señor Chaparro noté que no se seguían las convenciones estándares para segmentos, que confundía el concepto de círculo con el de circunferencia (no encontraba el circulo A), y tuve dificultad para hacer el dibujo en forma inmediata, por fortuna un diagrama acompañaba el trabajo. Procedí a realizar la figura utilizando un programa para dibujar (Auto_Cad) por computador, y pude reconstruir la figura, luego, usando las propiedades del software, determiné las áreas del círculo y del cuadrado; para ésto tomé un radio de 10.000,00 unidades lineales; los resultados fueron así: Área Circulo igual a 314´159.265,3590 unidades cuadradas (observen implícitamente el valor de π en este número). Para el cuadrado, dibujado por el método Chaparro, fue de 317´557.050,4585 unidades cuadradas. El error, o diferencia entre el área del círculo y el cuadrado así obtenido fue de 1.08154 %: un error apreciable.

Vamos a verificar las notas del procedimiento anterior; si “F” es el lado de un decágono, empecemos por verificar tal afirmación: Si sobre la figura 2. aplicamos trigonometría para determinar el valor de “F” se encontraría lo siguiente:

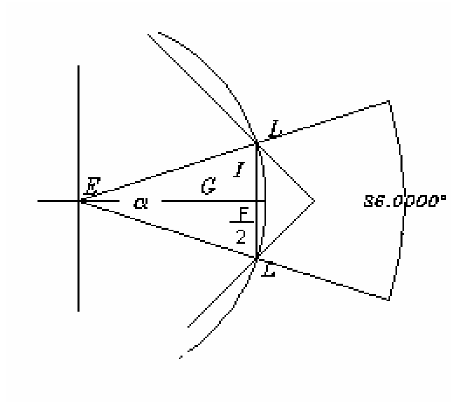

Figura 2. Verificación del ángulo.

$$\alpha = 2arcsen\left(\frac{F/2}{R}\right) \qquad (1)$$

en donde R es el radio del círculo cualquiera que se haya escogido, y trabajando en la figura 1. se calcula el ángulo α así:

$$\alpha = 2arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \qquad (2)$$

cuyo valor es 36° (grados) exactamente, por lo tanto (F) es el lado de un decágono.

En el anterior procedimiento de cuadratura, en el numeral 6, se hace una afirmación pero no hay pruebas o algo que la sustente (es la parte mágica): no hay demostración, y el área hallada por este procedimiento resultó mayor que el área real del círculo.

Veamos ahora la figura 3. y analicemos lo siguiente: si queremos aproximarnos a un área más real el ángulo α debe ser más pequeño que 36º.

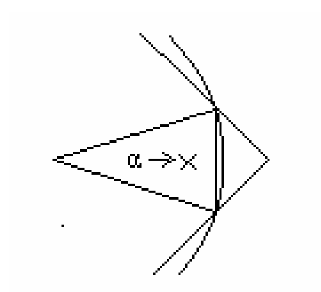

Figura 3. Búsqueda de ángulo más real.

Así que decidí calcular el valor exacto del ángulo α, y si este valor era un número racional o no. Entonces partí de la figura 4. en donde he superpuesto un círculo cualquiera y un cuadrado cuyas áreas serán iguales, por hipótesis.

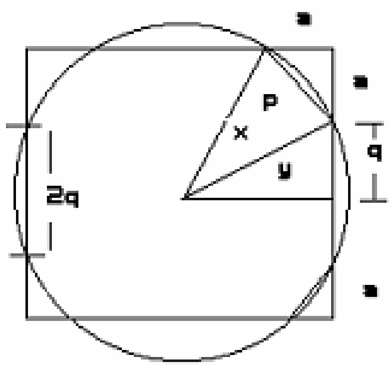

Figura 4. Caso general para el ángulo x.

Deseamos determinar el valor del ángulo x (que representa α, en este caso) que corresponda a un segmento "**P**" (equivalente al segmento "F") con el cual podremos construir el cuadrado pedido utilizando el procedimiento del Sr. Chaparro; si este ángulo diera un valor de 36 grados entonces el procedimiento es bueno y la cuadratura se ha logrado, en caso contrario nunca se logró. Se estudiará, de todas maneras, el nuevo valor del ángulo y se analizará su naturaleza numérica.

Tenemos las siguientes ecuaciones que se obtienen de la figura 4.

$$p = a\sqrt{2} \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{p/2}{r} \tag{4}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{2}} r \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{5}$$

$$q = r\operatorname{sen}(y) \tag{6}$$

El área del cuadrado es l^2 siendo $l = 2q + 2a$ y el área del círculo será $\pi r^2 = l^2$ por lo tanto tenemos la siguiente expresión:

$$l = 2r\operatorname{sen}(y) + \frac{4r}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = r\sqrt{\pi} \tag{7}$$

De la gráfica podemos concluir también que los ángulos tienen la siguiente relación:

$$2y + x = \frac{\pi}{2} \tag{7a}$$

Luego simplificando la expresión (7) así:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{8}$$

para luego reducir esta expresión y transformarla en la ecuación (9):

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi} \tag{9}$$

y si utilizamos el valor de

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

se puede llevar a la expresión (9) obteniéndose la (11): $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (10a), ecuación que se puede reducir a:

$$sen(x) = \frac{\pi}{2} - 1 \tag{11}$$

y si resolvemos esta ecuación para x hallamos que su valor es: 34.8057747… grados o .6074680291… radianes, luego el ángulo es diferente a 36 grados, esto nos lleva a la conclusión que <u>no se logró la cuadratura</u>.

Observemos que **P** < F lo que nos daría un cuadrado más pequeño que el anterior calculado por el método de L. A. Chaparro.

El valor de "F" para el caso particular que hemos tomado para comparar, usando Auto-Cad, con un radio de 10.000,00 unidades lineales, es de 6.180,33988...unidades; el valor de "**P"** es de 5.981,7775...unidades.

Un hecho muy importante en la ecuación (11) es la aparición de π; más adelante volveremos a esta ecuación que será fundamental para algunos de nuestros resultados.

Los problemas de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo han merecido una atención muy especial en el pasado, y lo sorprendente es que aún hoy día algunas personas le dedican tiempo a sus soluciones utilizando los métodos antiguos como la regla y el compás. Personalmente considero que la búsqueda de la solución a éstos problemas no son una pérdida de tiempo (¡si no pasa de algunos meses, claro está!) porque el imaginar soluciones nos da la oportunidad de encontrar otras ideas ricas en nuevas intuiciones de carácter matemático.

La historia de la matemática y la geometría es abundante en información sobre los diferentes métodos utilizados en la solución de los problemas cuyas condiciones sólo se circunscribían al uso de regla sin marcas, de un compás simple y de unas normas del uso de estos instrumentos (una cantidad finita de operaciones o trazos) [1], el término construcción significaba para los griegos el uso de esos dos instrumentos. Podríamos decir que desde los periodos pre-euclidiano, luego en los greco-romanos y periodos bizantinos, y aún en la edad media árabe los intentos para solucionar los tres famosos problemas helénicos fueron muchos y los artificios geométricos eran demasiado ingeniosos pero fracasaron.

En el papiro adquirido por Henry Rhind (1858) el escriba Ahmés da un procedimiento para la cuadratura del círculo en forma muy aproximada: se divide el diámetro en nueve partes y se construye un cuadrado con los 8/9 del diámetro; personalmente realicé este procedimiento y obtuve un ángulo de 35.4679 grados, y conseguí un área de 3.16049383 cm. cuadrados (más aproximada que la del Sr. Chaparro), Es importante notar que este papiro data de 3400 años antes de Cristo.

El problema de la cuadratura del círculo se originó en las matemáticas de los griegos o, por lo menos, fue oficializado por ellos, planteado en los siguientes términos: dado un círculo, construir *geométricamente* un cuadrado igual en área a la del círculo dado. El primer matemático, de quien tenemos noticias, que le metió el diente a este problema fue Anaxágoras. También es sabido que una buena parte de los matemáticos griegos intuyeron la imposibilidad de solución.

Se cuenta que tanto La Academia de París como la Sociedad Real en Londres promulgaron un edicto prohibiendo la remisión de más trabajos que pretendían solucionar el problema de la cuadratura [2].
La solución del problema de si el círculo podía ser cuadrado usando regla y compás llega a su final con un trabajo presentado por el matemático Lindemann [4] quien demostró que π era trascendental; es decir, que no era la raíz de una ecuación polinómica con coeficientes racionales; de aquel trabajo se llegó al siguiente teorema: “No es posible cuadrar el círculo”.

Cuando me reuní con el señor Chaparro para explicarle el problema de su cuadratura, él se sintió muy triste porque fueron varios años de trabajo; entonces nos sentamos a revisar sus logros y le dedicamos tiempo a el concepto de lo que era un número constructible (construible) usando regla y compás, y que aún los números del tipo $a+b\sqrt{k}$, en donde $k \geq 0$ eran del tipo constructible que formaban un “campo” de extensión cuadrática, pero para construir a π se requerían infinitos trazos siendo imposible de construirlo con regla y compás. Luego que si nos deteníamos a analizar la ecuación (11) ésta nos llevaría a construir un segmento p en función del radio r, y si se puede construir un número como $\sqrt{1+2\sqrt{7}}$ usando regla y compás, tal vez nos sería posible construir el segmento F. El segmento F esta definido por las ecuaciones (4) y (11) que involucran al término π:

$$F = p(r) = 2r\left(\frac{1-(\pi-(\pi/2)^2)^{1/2}}{2}\right)^{1/2} \qquad (12)$$

Tanto π como $\sqrt{2}$ son irracionales pero solamente π es trascendental y la diferencia no son los decimales infinitos sino la forma como se pueden construir los números en una recta real; la irracionalidad de π fue demostrada por Lambert [5] en 1761 usando fracciones continuas; aunque una curva de longitud π se puede construir fácilmente, no es lo mismo cuando se trata de construir una línea recta de longitud π.
Para abordar el concepto de lo que significaba un número trascendental fue necesario realizar el siguiente ejercicio con mi nuevo amigo, le dije que tratara de resolver la siguiente ecuación:

$$a_2\pi^2 + a_1\pi + a_0 = 0 \qquad (13)$$

Con la condición que a_0, a_1, a_2 Sean racionales y que con ellos se pueda producir π; de inmediato la reacción de Alberto fue de que tal vez no se podía, en ese momento él intuyó el significado pero también la dificultad de lo que es un número trascendente. Para generalizar el concepto le pedí que observara la ecuación (11), y que el ángulo se puede escribir como múltiplo de π: $x = \beta\pi$ y si consideramos a β como un número real entonces podemos expandir a (11) en un polinomio infinito, o de infinitos términos, como el siguiente:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \frac{\pi}{2} - 1 \qquad (14)$$

en el cual reemplazamos a x para llegar a la ecuación:

$$\beta\pi - \frac{\beta^3}{3!}\pi^3 + \frac{\beta^5}{5!}\pi^5 - \frac{\beta^7}{7!}\pi^7 \cdots = \frac{\pi}{2} - 1 \qquad (15)$$

que trasponiendo y factorizando términos la convertimos en: $1 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\beta^3}{3!}\pi^3 + \frac{\beta^5}{5!}\pi^5 - \cdots = 0$ (16)

Nuestra siguiente pregunta fue ¿sería posible analizar los coeficientes de este polinomio si partimos de que la incógnita es π, o dados unos coeficientes racionales podemos obtener a π? Aunque el problema ya fue resulto por F. Lindemann, nosotros estábamos ante un polinomio que habíamos generado como consecuencia del replanteamiento de un problema dado en la figura 4. y que además contenía los ingredientes necesarios para hacernos buenas preguntas.

Unas de las grandes virtudes que encontré en el señor Chaparro fue su paciencia para realizar muchos cálculos con su simple calculadora de vendedor, y utilizando la formula de Tartaglia y un poco de mi colaboración se halló un β para el caso cuando la ecuación (14) se expresaba con dos términos de la expansión así:

$$x - \frac{x^3}{3!} = \frac{\pi}{2} - 1 \qquad (17)$$

quedando como:

$$1+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\beta^3}{3!}\pi^3=0 \qquad (18)$$

cuyo valor fue de 0.19362, con este valor se llegaba a un valor de π cercano a 3.1415011; así mi amigo se dio cuenta, aunque de manera elemental, que no había forma de llegar a π con un β racional, que era necesario ir incrementando los decimales de β para mejorar el valor de π.

Como ya estábamos próximos al desenlace de todo este enredo, decidimos tratar de hacer una comprobación o demostración débil de la trascendencia de π de una manera sencilla; para esto se escribió la ecuación (16) como un polinomio de grado infinito:

$$1+a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots=0 \qquad (19)$$

ahora, los coeficientes a_1, a_3, etc. los consideraremos racionales; o sea que $a_1=\beta-\frac{1}{2}$ y que $a_3=-\frac{\beta^3}{3!}$ pertenecen a los racionales**,** entonces, $\frac{a_1}{a_3}=k$, siendo k también un racional. Tenemos ahora una situación de trascendencia que la reduciremos a un problema de búsqueda de irracionalidad o racionalidad (más fácil, según los expertos), para ésto llegamos a: $\beta-1/2=-k\,\beta^3/3!$ que es una ecuación de tercer grado reducida y que resolverla para demostrar que β es irracional si k lo es nos daría el argumento suficiente para hallar trascendencia. O sea que si tenemos a la ecuación:

$$\beta^3+6/k\,\beta-3/k=0 \qquad (20)$$

cuya solución se puede escribir así:

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}} \qquad (21)$$

Donde $q=6/k$, y $r=-3/k$, y si se demuestra que β es irracional usando la ecuación (21) partiendo de un k irracional entonces comprobaríamos la trascendencia del número π; podemos, además, agregar a nuestra argumentación también las siguientes ecuaciones, en donde relacionamos los coeficientes entre sí, y en especial con el primer elemento del polinomio, hallado como $a_0=1$; luego: $a_m/a_0=\pm k_m$ (22)

y siendo k_m un número racional o irracional (según nuestra hipótesis) entonces si despejamos a β llegamos a la ecuación siguiente: $\beta=\sqrt[m]{\pm k_m m!}=\sqrt[m]{\pm a_m m!}$ (23)

en donde m es un número de la secuencia 1, 3, 5, 7, que corresponde a los exponentes del polinomio tratado, pero recordemos que cuando realizamos cálculos con (18) obtuvimos un valor para β que se puede ubicar en un intervalo de

$$0.193<\left(\left|\frac{m_1!}{m_2!}k_m\right|\right)^{\frac{1}{m_1-m_2}}<0.194 \qquad (24)$$

en donde m_1 y m_2 son números de los términos cualesquiera de la expansión polinómica, se puede observar y de (24) concluir que si k_m es irracional entonces β es irracional.

Es bueno recordar, a estas alturas, que estamos analizando un polinomio muy particular que ha sido generado por un problema particular en donde el segmento P de la figura 4. y la ecuación (4) nos conducen a calcular si un ángulo x (α) es constructible o este segmento es trazable con regla y compás, sin embargo esa particularidad no le quita el carácter general del enfoque a la argumentación presentada.

Llegamos al epílogo de nuestra charla con el señor Chaparro y compartiendo un común entusiasmo concluimos, repitiendo el teorema egregio de M. C. Escher, que nos dice: "Todo dibujo engaña"; y además que son muchas las jugarretas que los griegos nos han legado pero que de éllas podemos sacar buenas lecciones en creatividad e ingenio.

No volví a saber del señor Chaparro sino años después; y me comentó que estaba trabajando en buscar una buena aproximación de la cuadratura; eso me tranquilizó un poco porque en la historia de la matemática sí hay muy buenas aproximaciones al problema, entre éstas tenemos la que se le debe al matemático indio Ramanujan. ¡Suerte al amigo Chaparro!

BIBLIOGRAFÍA.

[1] Kline, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Time.

[2] Newman, James. Sigma, El mundo de las Matemáticas.

[3] Chaparro, Alberto. Documentos personales, copias remitidas al Depto de Matemáticas (1995).

[4] F, Lindemann. Über die Zahl π, AMER. Math. Monthy, (46), 1939, 469-471.

[5] Hardy, G. H. A Course of Pure Mathematics, Cambridge Mathematical Library