Preconceptos erróneos en multiplicación y división entre futuros profesores

CARLOS MAZA
Universidad de Sevilla

Resumen

A partir de la teoría de modelos intuitivos de Fischbein aplicada a la resolución de problemas de multiplicación y división, se estudian en esta investigación las relaciones entre dicha resolución y la presencia de preconceptos erróneos, así como el reciente criterio de preferencias numéricas, entre futuros profesores. De la misma se llega a la conclusión de que el conocimiento explícito de las relaciones entre elementos de una operación se desarrolla independientemente de la capacidad de interpretación y resolución de los problemas.

Palabras clave: *Modelos intuitivos, Preconceptos erróneos, Preferencias numéricas.*

Pre-service teacher's misconceptions on multiplication and division

Abstract

On the basis of Fischbein's Theory of Intuitive Models applied to multiplication and division problem-solving, the relations between the latter type of problem-solving and the presence of mispreconceptions are analyzed in this study, together with the recent criterion of Numerical Preferences held by pre-service teachers. This study led us to the conclusion that an explicit knowledge of the relations between the elements of an operation develops independently from the ability to interpret and solve problems.

Keywords: *Intuitive models, Mispreconceptions, Numerical preferences.*

Dirección del autor: Escuela de Formación de profesorado de EGB. Departamento de Didáctica de las Ciencias. Avda. Ciudad Jardín, 22. 41005 Sevilla. Universidad de Sevilla.

Original recibido: Junio 1990. *Revisión recibida:* Enero 1991. *Aceptado:* Enero 1991.

INTRODUCCION

Desde el año 1981, uno de los puntos de interés abordados por los investigadores, en el campo de los problemas aritméticos, es el de la influencia ejercida por los distintos tipos de números en la realización de problemas de multiplicación y división. Las primeras aportaciones al respecto (Bell, Swan y Taylor, 1981; Hart, 1981) se centraron en la reconocida disminución de aciertos en dichos problemas cuando se empleaban números decimales en vez de naturales. Se llegó a la conclusión de la existencia de tres preconceptos erróneos entre los estudiantes de Secundaria (de 12 a 15 años, aproximadamente) en torno a estas operaciones:

(1) En la multiplicación, se consideraba que el resultado debía ser mayor que cualquiera de los dos factores de partida. Este hecho, cierto entre los números naturales, es falso entre los decimales al considerar uno menor que la unidad.
(2) El cociente de la división debía ser menor que el dividendo, cuestión que nuevamente se incumple al considerar por divisor un decimal entre cero y uno.
(3) Una división sólo sería posible cuando el dividendo fuera mayor que el divisor.

El estudio de estos tres preconceptos dio lugar a la formulación de la teoría de los «modelos intuitivos», pocos años después (Bell, Fischbein y Greer, 1984; Fischbein y otros, 1985). Según ella, los estudiantes habrían adquirido unos modelos intuitivos o implícitos de cada operación en el comienzo de su aprendizaje. Estos modelos presentarían una serie de restricciones por las cuales no se podrían aplicar a otro conjunto numérico que no fuera el de los naturales. Los preconceptos anteriores no serían sino las manifestaciones conductuales de dichos modelos.

Se defendía entonces la existencia de tres modelos intuitivos diferentes, uno para la multiplicación y dos para la división:

1. El de la multiplicación sería la suma reiterada. A partir de él se puede comprender que el estudiante adjudique, inicialmente, un distinto papel a cada uno de los factores en juego, resultando que uno se repite y el otro marca el número de veces que el anterior se repite (multiplicando y multiplicador, respectivamente). Esto implica que la multiplicación signifique un aumento del multiplicando.
2. El modelo intuitivo inicial de la división es el de «partición»: Se trata en él de repartir una cantidad en un número dado de partes iguales, siendo la incógnita el tamaño de cada parte. Por este motivo, el dividendo tendría que ser mayor que el divisor (no se podría repartir 10 caramelos en 24 partes) y el cociente sería menor que el dividendo (ya que la parte deberá ser menor que el todo que se reparte).
3. El modelo más elaborado de división se denomina de «agrupamiento» (o cuotición): En este modelo se conoce la cantidad a repartir y el tamaño de cada parte, pero se ignora el número de partes o grupos que se pueden formar. Los preconceptos que se originan son análogos a los del modelo anterior.

La aplicación de estos modelos explicaría que el problema «Encontrar el coste de 0,22 galones de petróleo si un galón cuesta 1,20 libras» (Bell, Swan y Taylor, 1981) se interpretara como resuelto por la división 1,20/0,22 por la mayoría de encuestados. En efecto, el estudiante razonaría del siguiente modo: El coste de 0,22 galones debe ser menor que el de un galón. Por tanto, hay que dividir. El mismo problema, planteado con números naturales, conducía mayoritariamente a una respuesta acertada.

Recientemente, se ha aducido que las preferencias numéricas predicen mejor los errores cometidos al elegir la operación adecuada para resolver un problema (Bell y otros, 1989). Estas preferencias serían psicológicamente más primitivas que los modelos intuitivos, afectando fundamentalmente a los problemas de división. Consistiría en el hecho de que ante un problema que requiriese la solución 5/36, el estudiante se inclinaría por la división 36/5 al preferir la división de un número entre otro numéricamente menor. Pese a que, en apariencia, este preconcepto parece similar al tercero enunciado anteriormente, la compleja investigación citada demostraba que el de las preferencias numéricas predecía mejor las respuestas que cualquiera de los preconceptos aducidos.

Fischbein y sus colegas (1985) defendían que estos modelos intuitivos estarían presentes a edades más avanzadas de las estudiadas, sobre todo por presentar una gran rigidez y estar enraizadas en el conocimiento del estudiante. En esta línea se ha realizado una investigación sobre adultos y, en concreto, en una muestra de 129 futuros profesores en formación (Graever, Tirosh y Glover, 1989; Tirosh y Graeber, 1989).

Esta investigación se centraba en la presencia explícita de los preconceptos y en su posible relación con los errores que se pudiesen detectar al resolver distintos problemas de multiplicación y división. Se realizaban entonces dos tipos de pruebas: En la primera, se formulaban los distintos preconceptos reclamando una respuesta de cierto o falso; en la segunda, se presentaba una batería de problemas para los que había que elegir la operación que los resolviese. Estos problemas eran los mismos que aquellos presentados por Fischbein (1985).

Los resultados más importantes serían los siguientes:

1. Respecto a los preconceptos, el (1) era detectado como error por el 85 % de los encuestados, si bien las justificaciones que daban a ello eran mayoritariamente a partir de ejemplos con números naturales (en concreto, el 0 y el 1). En el preconcepto (2), sin embargo, se encontraba una respuesta incorrecta en el 52 % de los casos respondiendo acertadamente sólo el 45 %.

2. En cuanto a los problemas de multiplicación, se llegaba a la conclusión de que si el multiplicador era un decimal, la proporción de aciertos descendía entre un 13 y un 27 % respecto a aquellos casos en que fuera un número natural. En concreto, cuando era un decimal menor que la unidad, la mitad de los encuestados interpretaba que la división era la operación adecuada para resolver el problema.

3. En los problemas de división confirmaban que, en general, los problemas de partición eran mejor resueltos que los de agrupamiento. Asimismo, la violación de alguna restricción del modelo intuitivo implicaba un éxito menor de modo que, por ejemplo, cuando el di-

videndo era menor que el divisor se tendía a invertir la división requerida. Observaban, no obstante, una discrepancia acusada entre el preconcepto que se defendía mayoritariamente y una consideración, también mayoritaria, de la posibilidad de un divisor decimal.

Todo ello les llevaba a dos conclusiones fundamentales: En primer lugar, que un «porcentaje sustancial» de los futuros profesores eran influidos por estos preconceptos al resolver problemas de multiplicación y división. En segundo lugar, destacaban la posible separación existente en ellos entre un conocimiento conceptual de la operación y un conocimiento de tipo procedimental.

Partiendo de todo lo anterior, ha parecido oportuno realizar una investigación entre futuros profesores españoles, con los siguientes objetivos:

1. Replicar los resultados comentados en último lugar.
2. Precisar la relación entre los preconceptos y la realización de problemas de multiplicación y división.
3. Considerar, en este estudio, una nueva categorización de problemas, más amplia y general, considerando la variable de la estructura semántica en la realización de los mismos.
4. Observar y contrastar la posible influencia de los preconceptos con el criterio de las preferencias numéricas.

METODO

Sujetos

Los sujetos encuestados fueron 149 estudiantes de tercer curso en la diplomatura de Magisterio, seccion de Preescolar, de la Universidad de Sevilla. La gran mayoría (95 %) eran mujeres entre los 21 y 24 años. Su formación matemática es débil ya que la totalidad ha seguido un bachillerato de Letras. En el primer curso de la diplomatura han cursado una asignatura de Matemáticas generales en la que se construyen los distintos conjuntos numéricos con sus operaciones, profundizándose sobre todo en los aspectos estructurales de los mismos.

Instrumentos

En una sola sesión de 40 minutos como máximo, se les presentaba una encuesta (Anexo I) formada por dos partes: En la primera, se realizaban tres preguntas teóricas en torno a los preconceptos de multiplicación y división, requiriéndoles una respuesta de cierto o falso. Para el preconcepto referente a multiplicación se les pedía, asimismo, una breve justificación.

En la segunda parte, se les presentaba una relación de 20 problemas, 8 de multiplicación y 12 de división, dispuestos de forma aleatoria. Para cada uno se les pedía que marcaran con una cruz la operación que lo resolvía, disponiéndose siempre las posibles respuestas en el orden:

Primero x Segundo
Primero: Segundo
Segundo: Primero

donde por primero y segundo se entiende el orden en que eran dados los dos datos numéricos de cada problema.

Los tipos de problemas eran, con distintas denominaciones, los planteados recientemente por Puig y Cerdán (1988), es decir, los siguientes:

Problemas de Multiplicación

(MR)	Multiplicación-razón.
(MCu)	Multiplicación-cuantificador.
(MCb)	Multiplicación-combinación.
(MCv)	Multiplicación-conversión.

Problemas de División

(PR)	Partición-razón.
(AR)	Agrupamiento-razón.
(PC)	Partición-cuantificador.
(AC)	Agrupamiento-cuantificador.
(DCb)	División-combinación.
(DCv)	División-conversión.

Cada uno de estos tipos de problemas se presentaba en dos formas: Con un resultado en forma de número natural y con un resultado de número decimal, lo que implicaba, en la mayoría de los casos, el uso de decimales como datos numéricos.

Resultados

Presencia explícita de los preconceptos

El preconcepto (1), concerniente a la multiplicación, es rechazado por el 91,9 % de los encuestados. Es decir, la gran mayoría sostiene que el resultado de esta operación no es siempre mayor que los factores que lo originan. Sin embargo, en el momento de buscar la justificación a este rechazo, otra amplia mayoría se inclina por dar ejemplos de multiplicaciones por 0 y 1 (Anexo I), tal como sucede en Tirosh y Graeber (1989). Se podría entender que los que responden de esta manera se ven afectados, de manera implícita, por el propio preconcepto, al no estimar otros conjuntos numéricos. No obstante, lo único que realmente se puede afirmar a partir de estos datos, es que los números de excepcional comportamiento entre los naturales, el cero y el uno, son los ejemplos más prototípicos que niegan la validez de este preconcepto. Esto no quiere decir que se ignore su incumplimiento en otros conjuntos numéricos, como enteros o decimales.

Los preconceptos respecto de la división están, por el contrario, más presentes de manera explícita. Casi la cuarta parte de los encuestados (el 22,1 %) consideran que el dividendo debe ser mayor que el divisor, mientras que una amplia mayoría (el 83,2 %) sostienen que el resultado de la división (el cociente) debe ser menor que el dividendo. De manera que el modelo partitivo de la división se apunta como el modelo intuitivo más arraigado en sus creencias.

La relación de los preconceptos entre sí

El porcentaje de rechazo de los preconceptos, en sus distintas combinaciones, se presenta en el Anexo II. Se puede observar en él que el esquema de respuesta más frecuente (59,7 %) consiste en rechazar el (1) y el (2), aceptando el (3). El porcentaje, pues, de los que rechazan que la multiplicación «haga más grande» pero aceptan que la división «hace más pequeño» es más elevado que en el estudio de Tirosh y Graeber (75,8 % frente a 45 %).

Relación de los preconceptos con la resolución de problemas

Se realizó un contraste de hipótesis, a través del análisis de la varianza, comparando las medias de los dos grupos formados a partir del criterio de acierto y error de cada preconcepto con la realización de los distintos problemas. En otras palabras, se consideraba por separado la nota media alcanzada en la realización de un problema (considerando 0 el error y 1 el acierto) para los dos grupos de un preconcepto: Los que lo aceptaban y los que lo rechazaban. Si las medias eran significativamente diferentes (tomando $p < 0,05$), se podía sostener una posible influencia del preconcepto con la realización de dicho problema. Con este análisis surgían cuatro posibilidades:

Caso 1: La gran mayoría de los problemas no mostraban niveles significativamente diferentes para los dos grupos formados.

Caso 2: En algunos casos, el error en el preconcepto parecía aumentar el acierto en los problemas, lo cual era rechazado por incoherente.

Caso 3: En otros casos, el error en un preconcepto disminuía el número de aciertos de un problema en el cual, sin embargo, no se aplicaba dicho preconcepto, por lo cual este caso no era tampoco considerado.

Caso 4: Tan sólo había una posible dependencia coherente entre el preconcepto (2) y el problema (AC '). Es decir, los que consideraban que el dividendo debía ser mayor que el divisor, fallaban al tratar de elegir la operación conveniente (que resultaba ser 10: 5.000.000) y los que consideraban lo contrario, acertaban en un nivel significativamente superior.

Sin embargo, esta posible influencia no se extendía a la estructura semántica del problema (así, no afectaba al problema AC), ni tampoco a los problemas resolubles por una división en la que el dividendo fuera menor que el divisor (los casos DCb ', PR ' no eran afectados). De este hecho se deduce que esta posible influencia no era estable para toda una categoría de problemas.

El criterio de las preferencias numéricas

Existen sólo tres problemas de división cuya solución consiste en dividir el número menor entre el mayor de los dados (PR ', AC ' y DCb '). Los tres mayores porcentajes de errores por elección de la división opuesta (invirtiendo los papeles de dividendo y divisor) corresponden, precisamente, a estos tres problemas. El porcentaje medio de estas inversiones en ambos papeles es del 39,6 % para estos problemas y sólo del 3,6 % para el resto de los problemas. Es decir, que cuando la solución pasa por dividir el menor entre el mayor los errores por inversión de papeles son mucho más frecuentes que si la solución es la contraria.

Para reafirmar, de manera complementaria, esta preferencia acusada por dividir el mayor entre el menor, se pueden observar los errores cometidos en los problemas MCb y MCu '. Estos son los dos problemas de multiplicación que presentan más errores al elegirse para ellos la división. Pues bien, en el MCb el 28,9 % elige como solución la división del mayor entre el menor y sólo el 2 % la contraria. En el problema MCu ' el 57,7 % elige la primera opción y el 10,1 % la segunda. Es decir, que cuando las características del problema les llevan a elegir la división como respuesta, siendo un problema de multiplicación, la inclinación mayoritaria es la de elegir la división del número mayor entre el menor.

CONCLUSIONES

Los datos examinados anteriormente parecen indicar que existe una falta de relación entre el conocimiento explícito sobre los preconceptos teóricos y el conocimiento implícito que pudiera estar presente en la resolución de problemas de multiplicación y división. La diferenciación entre conocimiento explícito e implícito de los preconceptos resulta más adecuada, para interpretar los resultados, que la distinción hecha por Tirosh y Graeber entre conocimiento conceptual y procedimental.

Según Hiebert y Lefevre (1986) el conocimento conceptual se refiere a aquel que es rico en relaciones entre las piezas de información de que se disponga. En cambio, el procedimental atiende más al conocimiento de algoritmos y reglas. Dado que los encuestados han respondido a preguntas en torno a las relaciones entre los elementos de cada operación y a la toma de decisiones respecto a la operación que resuelva un problema, se puede entender que esta investigación se ha desarrollado sobre el conocimiento conceptual que tuvieran.

En este sentido, destaca el hecho de la existencia de errores explícitos (sobre todo, en el preconcepto [3]), que no parecen tener repercusión en la resolución de un problema, bajo las condiciones metodológicas de esta investigación. Así pues, se puede concluir que los futuros profesores tienen una capacidad de elección de la operación adecuada que viene afectada por algunas variables, pero no por el conocimiento explícito que tienen de las relaciones entre los elementos de la operación.

Esto sugiere que el conocimiento explícito de estas relaciones se desarrolla más lentamente y de forma independiente de la representación mental que se tenga de estas relaciones, así como que no afecta a la decisión de elegir una operación entre varias disponibles.

Entre las distintas variables que afectarían a dicha decisión destaca como la más estable la del criterio de preferencias numéricas, lógicamente más primitivo que el de los modelos intuitivos. En otras palabras, se tiene una tendencia uniforme, en los problemas de división, a dividir el número mayor entre el menor, sin que ello tenga una relación estrecha con el preconcepto (2), que afirma que el dividendo debe ser mayor que el divisor. En principio, ambos criterios, el de preferencias numéricas y el preconcepto (2), parecen ser idénticos, pero ello no es así, ya que el (2) no afecta a la realización de problemas y el de preferencias numéricas sí. Esta diferenciación, sin embargo, necesita ser clarificada tanto a nivel teórico como en su repercusión para la resolución de problemas en futuras investigaciones.

Referencias

BELL, A.; FISCHBEIN, E. y GREER, B. (1984). «Choise of operation in verbal arithmetic problem: The effects of number size, problem structure and context». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 15, pp. 129-147.

BELL, A.; SWAN, M. y TAYLOR, G. (1981). «Choice of operations in verbal problems with decimal numbers». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 339-420.

BELL, A.; GREER, B.; GRIMISON, L. y MANGAN, C. (1989). «Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 5, pp. 434-449.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M. S. y MARINO, M. S. (1985). «The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 16, núm. 1, pp. 3-17.

GRAEBER, A. O.; TIROSH, D. y GLOVER, R. (1989). «Preservice teacher's misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 95-102.

HART, K. M. (1981). *Children's understanding of Mathematics*. Ed. J. Murray. Londres.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. (1986). «Conceptual and procedural knowledge in Mathematics: An introductory analysis». En J. Hiebert, (ed.) *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics*. Lawrende Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

PUIG, L. y CERDAN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Ed. Síntesis: Madrid.

TIROSH, D. y GRAEBER, O. (1989). «Preservice elementary teacher's explicit beliefs about multiplication and division». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20, pp. 79-96.

Anexo I

RELACION DE CUESTIONES Y RESUMEN DE RESPUESTAS

Preconcepto	*Lo niegan*
(1) La multiplicación hace más grande	91,9
(2) El dividendo mayor que el divisor	77,9
(3) La división hace más pequeño	16,8

PORCENTAJE DE JUSTIFICACIONES AL PRECONCEPTO DE MULTIPLICACION

ACIERTOS

Justificación	*Porcentaje*
Ejemplo con 0 ó 1	67
Razonamiento general de fracciones/decimales	2
Ejemplo con números enteros negativos	4
Razonamiento general sobre fracciones y enteros	0,7
Razonamiento sobre 0,1 y enteros	0,7
Razonamiento ilógico	1,3
No contesta	16

ERRORES

Justificación	*Porcentaje*
Por ser suma reiterada	5
No contesta	3

PROBLEMAS DE MULTIPLICACION Y PORCENTAJE DE RESPUESTAS

Enunciado	*Ac*	*ErO1*	*ErOO*	*Nc*
(MR) Un lápiz vale 30 pesetas y compras 18 lápices. ¿Cuánto te has gastado?	98,7	1,3		
(MCu) Tienes 750 pesetas y un compañero tiene 6 veces más que tú. ¿Cuánto tiene tu compañero?	98,7	1,3		
(MCb) En un grupo hay 36 chicos y 43 chicas. ¿Cuántas parejas distintas de chico y chica se pueden formar?	61,7	30,9		7,4
(MCv) Un animal salta 3 m. cada segundo. Si hay 60 segundos en un minuto, ¿cuánto ha recorrido en un minuto?	91,9	6,1		2
(MR ') Si tienes 220 pesetas y cada peseta equivale a 0,05 francos, ¿cuántos francos tienes en total?	83,9	14,8		1,3
(MCu ') Se tienen 20 cl. de pintura roja y 0,35 de la cantidad anterior de pintura amarilla. ¿Cuántos cl. de pintura amarilla hay?	22,8	67,8		9,4
(MCb ') Una tira de papel tiene 3 m. de largo y 0,56 m. de ancho. ¿Cuál es su superficie?	98	1,3		0,7
(MCv ') Si una corona equivale a 16 pesetas y cada peseta a 0,05 francos, ¿cuántos francos equivalen a una corona?	75,8	18,8		5,4

PROBLEMAS DE DIVISION Y PORCENTAJE DE RESPUESTAS

Enunciado	*Ac*	*ErO1*	*ErOO*	*Nc*
(PR) Has comprado 8 paquetes de yogures, que hacen un total de 96 yogures. ¿Cuántos yogures hay en cada paquete?	97,3	1,3	0,7	0,7
(AR) Compras 336 bombones en paquetes de 24. ¿Cuántos paquetes compraste?	98	1,3		0,7
(PC) Un coche marcha a 80 km/h, cuatro veces más deprisa que una bicicleta. ¿Qué velocidad tiene la bicicleta?	96,6	0,7	2	0,7
(AC) Juan tiene 13 años y su abuelo 65 años. ¿Cuántas veces más tiene el abuelo que Juan?	96,6		0,7	2,7
(DCb) Siete productos de tipo A pueden combinarse con varios productos de tipo B hasta de 91 formas diferentes. ¿Cuántos productos de tipo B se han considerado?	83,2	2,7	4	10,1
(DCv) Cada km^2 equivale a 247 acres y una milla cuadrada a 640 acres. ¿Cuántos km^2 hay en cada milla cuadrada?	67,1	12,8	8,1	12,1
(PR ') Se llena un recipiente durante 72 segundos, hasta completar 33 l. ¿Cuántos l. se han introducido cada segundo?	53	4	43	
(AR ') Una empresa paga 2.717 pesetas por un lote de piezas, cada una de las cuales cuesta 0,65 pesetas. ¿Cuántas piezas ha comprado?	91,9	6,7		1,3
(PC ') 0,36 de un depósito de aceite equivale a 20 l. ¿Qué capacidad tiene el depósito?	20,8	50,3	3,4	25,5
(AC ') ¿Qué factor de reducción se aplica a una distancia de 5 millones de cm. para que, en un mapa, se representen por 10 cm.?	49,7	1,3	34,2	14,8

(DCb ') Un campo de 324 m^2 tiene 4.200 m. de largo. ¿Cuál es su anchura?	40,3	10,7	41,6	7,4
(DCv ') Una pulgada equivale a 2,54 cm. y una yarda a 91 cm. ¿Cuántas pulgadas tiene cada yarda?	74,5	6,7	14,1	4,7

Nota: Ac: Aciertos; ErO1: Errores en operación inversa (de multiplicación a división y vicevecersa); ErOO: Errores en operación opuesta (de una división a otra); Nc: No contesta.

Anexo II

PORCENTAJE DE RECHAZO DE LOS DISTINTOS PRECONCEPTOS

Preconcepto

(1)	X	X	X	X				
(2)	X	X			X	X		
(3)	X		X		X		X	
Porcentaje	15,4	59,7	0,7	16,1	0,7	2	0	5,4

Extended Summary

Several studies on the mistakes made by secondary school students on multiplication and division problem-solving when decimal numbers are included have been developed in the last decade. These studies have led to the formulation of the Theory of Intuition Models. That is, specific relations between the elements of an operation, which are valid for natural numbers, were applied to problem solving with decimals where these relations are no longer valid. For example, that multiplication «increases the result» or that division «reduces the result».

An investigation carried out in 1989 provides a new, more primary, criterion, which can influence the mistakes mentioned above. This is the Numercial Preferences criterion, where by in a division problem one tends to divide the highest by the lowest number.

These findings, applied to 12-15 yr old students, have been extended to pre-service teachers' misconceptions on these two mathematical operations. These research studies have come to the conclusion that there exists several mispreconceptions, and that a substantial percentage of future teachers is affected by these preconceptions when attempting to solve arithmetic problems.

The main aim of the research described here is to examine the relationships between mispreconceptions and multiplication and division problem-solving. For this, a different and fuller formulation of the problem is considered, where the Numerical Preference variable is also taken into account with the object of clarifying its possible influence.

The study findings show that there are several explicit errors concerning hnowledge of the relations between the elements of an operation. These appear in the form of mispreconceptions, primarily with respect to division. However, these preconceptions were not found to influence problem solving. This suggests that the explicit knowledge of the relations between the elements of the operation and the implicit knowledge that allows one to solve a problem follow independent routes. In the present examination, we discard the distinction between conceptual and procedural knowledge defended in earlier investigations. For having analyzed their original definitions, we can state that all the issues dealt with in this study referred to conceptual knowledge.

Hence, the main conclusions refer to the lack of a relation between the different types of conceptual knowledge: one, explicit, dealing with the general relations between the elements of an operation, and the other, implicit, refers to the representation of a specific problem and to the problem solver's decision making.

Finally, in the study's conclusions we underline the important role of Numerical Preference. This may lead to the design of future research clarifying to a greater extent the relations between the nature of preconcepts and of numerical preferences with the different types of multiplication and division problem-solving.