APROXIMACIÓN DIFUSA DE FUNCIONES REALES

ALFONSO ALZATE
Profesor Titular
Facultad de Ingeniería Eléctrica
Universidad Tecnológica de Pereira
alalzate@utp.edu.co

JUÁN EDUARDO BRAVO
Profesor
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jubravo@utp.edu.co
jbravo@uniweb.net.co

RESUMEN
En este articulo, se presenta una metodología para aproximar una función, de variable real en $\Re^2$ usando lógica difusa. Además, se hacen dos aplicaciones que ilustran el método.

ABSTRACT
In this paper, a methodology is presented to approach a function, of real variable in $\Re^2$ using fuzzy logic. Also, two applications are made that illustrate the method.

PALABRAS CLAVES: Lógica difusa, conjunto difuso, if … then, Takagi-Sugeno, función de pertenencia.

KEYWORDS: Takagi-Sugeno

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la lógica difusa fué motivado por la necesidad de un marco conceptual que permitiera manejar la imprecisión del lenguaje corriente con el que se describen los fenómenos de la cotidianidad, permitiendo expresarlos en términos matemáticos capturando todas las incertidumbres asociadas con el razonamiento y el pensamiento humano.

Hoy existe un gran número de aplicaciones en la industria que le dan una importancia en el desarrollo tecnológico. Por lo tanto, es necesario darle la connotación que ella merece y difundir este conocimiento en la comunidad académica.

La literatura en lógica difusa es variada y abundante en diferentes aplicaciones, especialmente de ingeniería. En [1] se estudian los fundamentos y algunas aplicaciones desde el punto de vista académico, en [2,3] se realizan algunas aplicaciones en donde se da importancia a la aproximación de funciones no lineales con el modelo difuso Takagi-Sugeno. Un algoritmo muy detallado se ilustra en [2] para aproximar un modelo no lineal con el modelo difuso Takagi-Sugeno y se realizan algunos ejemplos ilustrativos que clarifican la metodología.

Este articulo pretende introducir el método de modelado Takagi-Sugeno. Además, se presenta en forma breve un concepto básico de la lógica difusa, ilustrando el modelo con una metodología para aproximar una función de variable real en $\Re^2$.

Fecha de recepción: 29 Marzo de2004
Fecha de aceptación: 16 Abril de 2004

2. LÓGICA DIFUSA

La lógica difusa es un proceso matemático que permite representar y manipular datos que no pueden definirse en forma precisa por la incertidumbre que poseen. Estos datos son el resultado del conocimiento de una situación (o fenómeno) que se desea describir, y a su vez estos se presentan en forma de implicaciones ($p \Rightarrow q$), que en un aspecto no tan formal es equivalente a:

$$\textbf{\textit{if}}\ \ p\ \ \textbf{\textit{then}}\ \ q \qquad (1)$$

y a esto se le denomina regla o ley.

La lógica difusa es un tema de actualidad gracias a las aplicaciones que se presentan a nivel industrial y la gran cantidad de problemas académicos que confrontan la soluciones clásicas con las que registra este modelo. Las aplicaciones se extienden a ramas diferentes de la ingeniería, lo que le da una gran relevancia.

Uno de las áreas de aplicación de la lógica difusa es el control, y en este la estabilidad juega un papel de gran importancia. La construcción del modelo matemático que describa la dinámica de un sistema a estudiar no es nada fácil, pues se deben incluir todas las características relevantes asociadas a la dinámica del sistema. Normalmente, el modelo matemático es complejo por las no linealidades que posee, y que hacen indispensable una buena aproximación. Para evitar estas dificultades, se propone un modelo que considere la dinámica de la planta en diferentes puntos de operación, con la implementación de varios modelos lineales. Cada modelo lineal corresponde a una regla del tipo IF .. THEN, donde en el antecedente está la condición y en el consecuente el modelo lineal que la cumple. Esta representación del sistema no lineal es llamada modelo difuso Takagi-Sugeno.

3. MODELO DIFUSO TAKAGI-SUGENO

Takagi y Sugeno, en 1985, definieron la función de pertenencia de un conjunto difuso A como $\mu_A(x)$, para todo $x \in \chi$. Algunos conjuntos difusos se asocian con funciones de pertenencia lineales. Así, una función de pertenencia esta caracterizada por dos parámetros: 1 es mayor grado de pertenencia, y 0 es el menor grado de pertenencia. Para dos conjuntos difusos dados A y B, el valor de verdad de la proposición *"x is A and y is B"* se expresa por

$$\| x \text{ is } A \textbf{ and } y \text{ is } B \| = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \tag{2}$$

La relación (2) es importante para el modelo difuso Takagi-Sugeno (TS), el cual consiste en un conjunto de reglas R_i con la siguiente estructura:

$$R_i\text{: } \textbf{if } x \text{ is } A_i \textbf{ then } y_i = a^T_i \cdot x + b_i \tag{3}$$

Donde $x \in \chi \subset \Re^n$ es el vector de entrada, A_i es un conjunto difuso (multidimensional) y $\mu_{Ai}: \chi \to [0,1]$, $y_i \in \Re$ es la salida de la i-ésima regla, $a_i \in \Re^n$ es un parámetro vectorial, $b_i \in \Re$ es un escalar, donde r es el número de reglas, y el índice $i \in [1,2,\ldots,r]$.

Dadas las salidas de los consecuentes individuales y_i, la salida total y del modelo difuso Takagi-Sugeno (defuzificación o concresión) es calculada usando

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(x) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x)} \tag{4}$$

en donde w_i es el grado de compromiso del antecedente de la i-ésima regla, calculado como el grado de pertenencia de x en el (interior) conjunto difuso A_i:

$$w_i(x) = \mu_{Ai}(x) \tag{5}$$

La forma conjunta del antecedente, p en (1), también puede ser formulada como sigue:

$$x_1 \text{ is } A_{i1} \textbf{ and } \ldots \textbf{ and } x_n \text{ is } A_{in} \tag{6}$$

Con el grado de compromiso

$$w_i(x) = \mu_{A1}(x_1) \wedge \mu_{A2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{An}(x_n) \tag{7}$$

usando el grado de compromiso normalizado,

$$h_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum_{j=1}^{r} w_j(x)} \tag{8}$$

entonces se puede interpretar el modelo Takagi-Sugeno como un modelo cuasilineal con dependencia en el parámetro de entrada x.

$$y = \sum_{i=1}^{r} h_i(x) \cdot \left(a_i^T \cdot x + b_i \right) \tag{9}$$

4. APROXIMACION DIFUSA EN $\Re^2$

Sea f una función de variable real, continua y diferenciable en todo su dominio.

Primer Ejemplo:

$$f(x) = ½ \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 \tag{10}$$

Paso 1
Determinación de la(s) variable(s) $S(x)$ de la función.
La función se debe escribir en la forma

$$f(x) = A(S(x)) \cdot x \tag{11}$$

por lo tanto, esta queda

$$f(x) = (½ \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot x \tag{12}$$

de aquí, se puede definir

$$S(x) = ½ \cdot x^2 - 2 \cdot x \tag{13}$$

Paso 2
Determinación de los valores extremos de $S(x)$.
Para este caso se debe determinar un intervalo (región de trabajo del parámetro definido S) para el parámetro definido. Para este caso, se usaran elementos del cálculo para localizar el mínimo de S.

$$S'(x) = x - 2 \tag{13}$$

Es fácil ver que en $x=2$ existe un mínimo relativo ($S''(x)=1>0$) de S. Por comodidad, se escogerá un intervalo, en este caso [2,10], donde S sea creciente.

$$\begin{aligned} S_{min} &= S(2) = -2 \\ S_{max} &= S(10) = 30 \end{aligned} \tag{14}$$

Con esto queda claro que $S_{min} \leq S(x) \leq S_{max}$ para todo x en [2,10].

Paso 3
Obtención de los modelos lineales.

Con cada uno de los valores extremos encontrados en el numeral anterior se define una función lineal, así:

$$f_1(x)=-2x$$
$$f_2(x)=30x \qquad (15)$$

Paso 4

Desarrollo de las funciones de pertenencia.
Con los valores extremos de S, se definen los conjuntos difusos con las etiquetas $\mathbf{P}_{\mathbf{menor}}$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{mayor}}$.

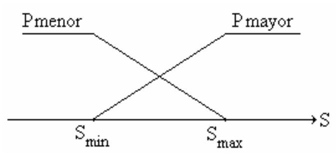

Figura 1. Conjuntos difusos

$$w_1(s)=\begin{cases} 1, \ \text{si} \ s < S_{\min} \\ \dfrac{s - S_{\max}}{S_{\min} - S_{\max}}, \ \text{si} \ S_{\min} \le s \le S_{\max} \\ 0, \ \text{si} \ S_{\max} < s \end{cases} \qquad (16)$$

$$w_2(s)=\begin{cases} 0, \ \text{si} \ s < S_{min} \\ \dfrac{s - S_{\min}}{S_{\max} - S_{min}}, \ \text{si} \ S_{\min} \le s \le S_{max} \\ 1, \ \text{si} \ S_{\max} < s \end{cases} \qquad (17)$$

Paso 5

Construcción de las reglas.

$\boldsymbol{R_1}$: **if** s es P_{min} **then** $f(x)=-2x$

$\boldsymbol{R_2}$: **if** s es P_{max} **then** $f(x)=30x$

La defusificación se obtiene expresando a f como una mezcla difusa de los modelos lineales.

$$f(x)=w_1(S(x))\cdot(-2x)+w_2(S(x))\cdot(30x) \qquad (18)$$

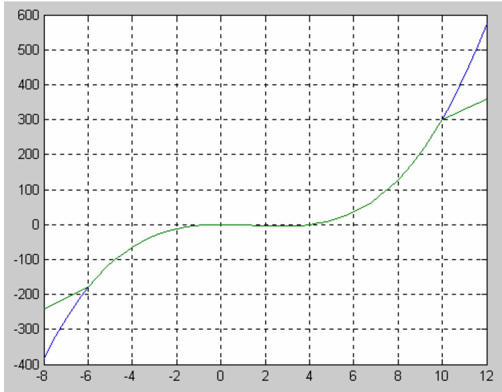

Figura 2. Gráfica de f y la aproximación difusa

La gráfica en la figura 2, muestra el resultado de la aproximación de la función sobre la función original. Se observa que en el intervalo [2,10], que corresponde al intervalo de interés la aproximación es casi coincidente con la función original. Además, la precisión de la aproximación se pierde por fuera del intervalo de interés debido a la forma de f.

Segundo Ejemplo:

$$f(x) = sen(x) \qquad (19)$$

Paso 1

Determinación de la(s) variable(s) $S(x)$ de la función.
Ahora, (19) puede ser escrita en la forma de (11).

$$f(x)=\frac{sen(x)}{x}\cdot x \qquad (20)$$

y,

$$S(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}, & si \quad x \neq 0 \\ 1, & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad (21)$$

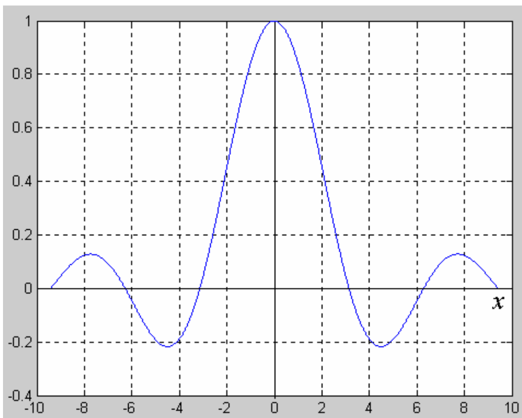

Figura 3.Gráfica de $S(x)$

Paso 2

Determinación de los valores extremos de *S(x)*.

La grafica de la figura 3, muestra el comportamiento de *S(x)*. Claramente se puede observar que es una función par, y para nuestro interés es monótona decreciente en el intervalo [0, 4.49341]. De aquí se deduce que

$$S_{min} = S(4.49341) = -0.21723$$
$$S_{max} = S(0) = 1.0 \tag{22}$$

Con lo que $S_{min} \leq S(x) \leq S_{max}$.

Paso 3

Obtención de los modelos lineales.

Con los resultados del paso anterior se obtiene

$$f_1(x) = -\,0.21723 \cdot x$$
$$f_2(x) = x \tag{23}$$

Paso 4

Desarrollo de las funciones de pertenencia.

Aquí se realiza el proceso en forma equivalente al primer ejemplo.

Paso 5

Construcción de las reglas.

$\boldsymbol{R_1}$: **if** s es P_{min} **then** $f(x) = -\,0.21723 \cdot x$

$\boldsymbol{R_2}$: **if** s es P_{max} **then** $f(x) = x$

La defusificación se obtiene como una mezcla difusa de los modelos lineales.

$$f(x) = w_1(S(x)) \cdot (-\,0.21723x) + w_2(S(x)) \cdot x \tag{24}$$

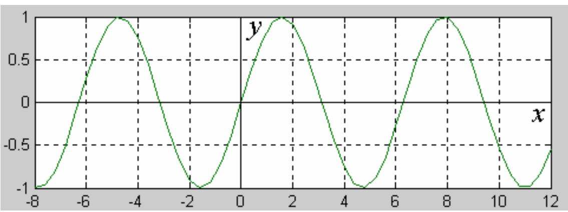

Figura 4. Gráfica de la aproximación difusa de *sen x*

La gráfica de la fig. 2, muestra el resultado de la aproximación difusa de la función *f(x) = sen(x)*. Es importante resaltar la precisión de esta, y además, el hecho de ser ***f*** una función par para lo cual este resultado extiende su precisión fuera del intervalo establecido para la aproximación.

5. CONCLUSIONES

La lógica difusa es una muy buena herramienta para aproximar funciones no lineales. En especial, el modelo difuso Takagi-Sugeno, aproxima a *f*, una función no lineal, como una mezcla difusa de modelos lineales.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Alzate G., Alfonso. "Control Difuso". Universidad Tecnológica de Pereira.

[2] Korba, Petr. "A Gain-Scheduling Approach to Model-Based Fuzzy Control". Reihe 8, Nro 837. VDI VERLAG.

[3] Kazuo Tanaka, Hua O. Wang. "Fuzzy Control Systems Design and Analysis". Wiley-Interscience Publication.