

## ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE EL MODELO PROMEDIADO Y EL MODELO EXACTO EN UN SISTEMA DE COMPENSACIÓN DINÁMICA DE POTENCIA REACTIVA UTILIZANDO UN INVERSOR

### RESUMEN

En este artículo se discuten dos técnicas de modelación para un sistema de compensación dinámica de potencia reactiva utilizando un inversor. En el documento se muestra que cualquiera de las dos técnicas representa adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema de compensación de corriente reactiva. A pesar de que la técnica del modelo exacto profundiza la comprensión del sistema, la complejidad matemática es bastante grande.

**PALABRAS CLAVES:** Compensación de potencia reactiva, modelo promediado, modelado promedio del espacio de estados

### ABSTRACT

*Two modelling techniques are discussed for an Inverter-based dynamic compensation system of reactive power. The paper shows that either technique accurately represent the dynamic behaviour of the reactive current compensation system. Although the exact model technique deepens the systems comprehension, its math is cumbersome.*

**KEYWORDS:** *Reactive power compensation, averaging model, State-Space Averaging.*

### MILTON CASTRO

Ingeniero Electricista, M.Sc.  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
mdcastron@utp.edu.co

### DEYSY LONDOÑO

Ingeniera Electrónica,  
Especialista en Informática Industrial.  
Profesor Auxiliar  
Universidad del Cauca  
ddlondono@ucauca.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

En las aplicaciones donde se requiere compensar las componentes no activas de la corriente es posible utilizar un convertidor DC/AC [1]. Ahora bien, el modelado de estos sistemas se puede hacer de diferentes formas, mediante el modelado AC de pequeña señal o “*Basic AC modelling approach*”, modelado promedio del espacio de estados o “*State-Space Averaging*”, modelo promedio del circuito “*Circuit Averaging*” y modelado promedio de los interruptores “*averaged switch modeling*” entre otros. En este trabajo se ha realizado el modelamiento de un compensador dinámico de potencia reactiva soportado por un inversor, utilizando dos técnicas de modelamiento.

En primera instancia se utiliza el modelo promedio del circuito o “*Circuit Averaging*”, en el cual se considera solamente la componente fundamental de la onda resultante de la operación del circuito y luego se utiliza el modelo de espacio de estados sin realizar ningún tipo de aproximación. En ambos casos se observa una representación adecuada del modelo. Sin embargo, la complejidad matemática generada por el modelo exacto hace impensable modelar siempre los sistemas electrónicos de potencia con esta técnica, aunque con ella se logra observar y conocer más detalladamente el sistema, especialmente en lo concerniente a la generación de armónicos, aspecto invisible mediante otras técnicas de modelamiento.

## 2. ECUACIONES DEL SISTEMA

La operación de estado estable del sistema involucra un proceso cíclico determinado por el esquema de conmutación descrito en la Figura 1. Los estados cíclicos de la secuencia de conmutación hacen posible resumir las ecuaciones del circuito de la siguiente forma.

$$L_s \frac{di_s}{dt} = -R_s i_s - u_s + u_m \quad i_o = C_o \frac{du_o}{dt} \quad (2.1)$$

En este caso, el esquema de conmutación en conjunto con  $U_0$  e  $i_s$  determinan los valores de  $U_s$  e  $i_o$ . Existen dos métodos para analizar este sistema. Uno es mediante el muestreo de las variables del circuito y el otro es promediando las operaciones de los interruptores de potencia. En este artículo se considerarán ambos métodos.

### 2.1 ECUACIONES DEL MODELO PROMEDIADO

El primer paso para desarrollar un modelo promediado es encontrar la componente fundamental de la onda alterna cuadrada formada por los dispositivos de conmutación descritos en la Figura 1. Si se denota a la componente de frecuencia fundamental de  $U_s$  e  $i_s$  como  $\langle U_s \rangle$  e  $\langle i_s \rangle$  respectivamente, se obtiene:

$$\langle i_s(t) \rangle_1 = I_{\parallel} \sin(\omega t) + I_{\perp} \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

$$\langle U_s(t) \rangle_1 = \frac{4U_o}{\pi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin(\omega t - \delta) \quad (2.3)$$

Donde  $U_0$  denota la componente DC de  $u_o$ ,  $\delta$  el ángulo de corrimiento del convertidor AC/DC con respecto a la

tensión de referencia de la red  $u_n = U_n \sin \omega t$ ,  $I_{\parallel}$  la componente en paralelo con la tensión de la red (corriente activa) e  $I_{\perp}$  la componente perpendicular con la tensión de la red (corriente reactiva). Tomando la derivada de la Ecuación (2.2), igualando este resultado con la Ecuación (2.1) y reuniendo los términos comunes a  $\sin(\omega t)$  y  $\cos(\omega t)$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial no lineal.

$$\frac{dI_{\parallel}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} I_{\parallel} + \omega I_{\perp} - \frac{4U_o}{\pi L_s} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos(\delta) + \frac{u_n}{L_s} \quad (2.6)$$

$$\frac{dI_{\perp}}{dt} = -\omega I_{\parallel} - \frac{R_s}{L_s} I_{\perp} + \frac{4U_o}{\pi L_s} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin(\delta) \quad (2.5)$$

La expresión para la tensión del condensador se obtiene promediando la potencia proporcionada a los terminales del inversor, dividiendo por la componente DC de  $U_o$  e igualando la expresión resultante con la Ecuación (2.1). De este forma, se llega a la siguiente ecuación diferencial no lineal.

$$\frac{dU_o}{dt} = -\frac{2}{C_o \pi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) [I_{\parallel} \cos(\delta) - I_{\perp} \sin(\delta)] \quad (2.4)$$

Bajo condiciones de operación de estado estable y en cualquier punto de trabajo asociado al parámetro  $\delta^*$ , los términos  $\frac{dI_{\parallel}^*}{dt}$ ,  $\frac{dI_{\perp}^*}{dt}$  y  $\frac{dU_o^*}{dt}$ , de las Ecuaciones (2.4), (2.5)

y (2.6) son todos iguales a cero!. Esto implica que el punto de operación de estado estable del compensador estático soportado por un convertidor DC/AC se obtiene resolviendo el sistema resultante de tres ecuaciones y tres incógnitas dado por:

$$I_{\parallel}^* = \frac{U_n}{2R_s} [1 - \cos(2\delta^*)] \quad (2.7)$$

$$I_{\perp}^* = \frac{U_n}{2R_s} \sin(\delta^*) \quad (2.8)$$

$$U_o^* = \frac{\pi U_n}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\cos(\frac{\omega L_s}{R_s} - \delta^*)}{\cos(\frac{\omega L_s}{R_s})} \quad (2.9)$$

Dado que el sistema descrito por las Ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9), describen un sistema altamente no lineal, se necesita ahora obtener un modelo lineal. La linealización del sistema alrededor de un punto de operación se puede adquirir obteniendo el Jacobiano del sistema. Este procedimiento conlleva a obtener las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & \omega & -\frac{4}{\pi L_s} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\delta^*) \\ -\omega & -\frac{R_s}{L_s} & \frac{4}{\pi L_s} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\delta^*) \\ \frac{2}{\pi C_o} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\delta^*) & -\frac{2}{C_o \pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\delta^*) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{4U_o^* \sqrt{3}}{\pi L_s} \frac{2}{2} \sin(\delta^*) \\ \frac{4U_o^* \sqrt{3}}{\pi L_s} \frac{2}{2} \cos(\delta^*) \\ \frac{2}{\pi C_o} \frac{\sqrt{3}}{2} [-I_{\parallel}^* \sin(\delta^*) - I_{\perp}^* \cos(\delta^*)] \end{bmatrix}$$

El análisis de la ecuaciones (2.4), (2.5) and (2.6) en conjunto con el Jacobiano permiten representar el sistema mediante la ecuación de estado.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{\parallel} \\ \tilde{I}_{\perp} \\ \tilde{U}_o \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tilde{I}_{\parallel} \\ \tilde{I}_{\perp} \\ \tilde{U}_o \end{bmatrix} + B \tilde{\delta} \quad (2.10)$$

Donde  $\tilde{I}_{\parallel}$  representa la perturbación del sistema cuando este se encuentra en régimen estable ( $I_{\parallel}^*$ ), y similarmente para  $\tilde{I}_{\perp}$  y  $\tilde{U}_o$ .

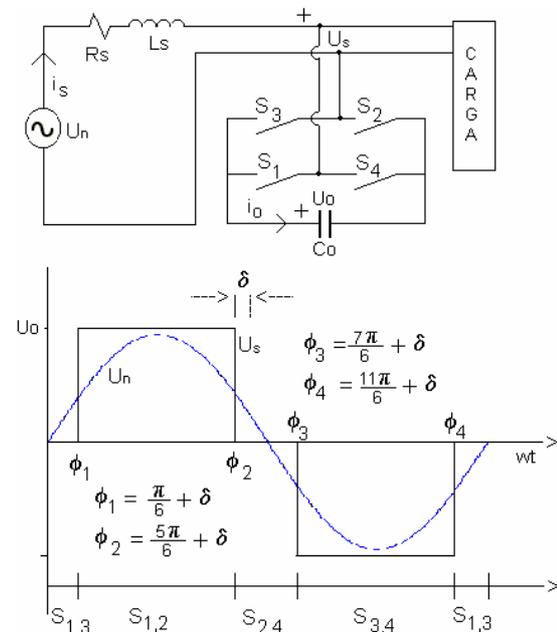


Figura 1. Modelo del sistema de compensación dinámica de potencia reactiva utilizando un inversor para cualquier tipo de carga.

## 2.2 ECUACIONES DEL MODELO EXACTO.

De la Figura 1 se puede observar que el circuito se alterna entre dos estados y debido a la secuencia de conmutación, es suficiente analizar medio ciclo completo durante el intervalo  $0 < \omega t < \pi$ . Durante este intervalo el sistema progresa a través de dos estados diferentes. El primer estado está definido a su vez por el sub-intervalo  $0 < \omega t < \pi/6 + \delta$ , mientras que el segundo está definido por el sub-intervalo  $\pi/6 + \delta < \omega t < 5\pi/6 + \delta$ . Estos dos estados permiten la siguiente representación del sistema en el espacio de estados.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{X_s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ X_s \\ 0 \end{bmatrix} u_n \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{X_s} & -1 \\ \frac{1}{B_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ X_s \\ 0 \end{bmatrix} u_n \quad (2.12)$$

Donde:  $\omega C_o = B_o$  y  $\omega L_s = X_s$

Las Ecuaciones (2.11) y (2.12) tienen respectivamente las siguientes soluciones dadas por las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} = e^{A_o(t_1-t_0)} \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_o(t_1-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} = e^{A_1(t_2-t_1)} \chi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{A_1(t_2-\tau)} \mathbf{B}_1 u_n(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

Donde:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{X_s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_o = \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ X_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{X_s} & -1 \\ \frac{1}{B_0} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14a)$$

$\chi(t_0)$  denota las condiciones iniciales de  $i_s$  y  $u_o$  en el instante  $t_0=0$  y  $\chi(t_1)$  denota las condiciones iniciales de  $i_s$  y  $u_o$  en el instante  $t_1$  y posee la siguiente forma:

$$\chi(t_1) = e^{A_o(t_1-t_0)} \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_o(t_1-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

El sistema retorna ahora al primero estado de operación pero ahora las condiciones iniciales están dadas por el instante  $t_2$ . Por lo tanto la solución al final del intervalo ( $t = \pi / \omega$ ) está dada por la expresión:

$$\begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix} = e^{A_o(t_2-\pi/\omega)} \chi(t_2) + \int_{t_2}^{\pi/\omega} e^{A_o(t_2-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

Donde,  $\chi(t_2)$  denota las condiciones iniciales de  $i_s$  y  $u_o$  en el instante  $t_2$  y es de la forma,

$$\chi(t_2) = e^{A_1(t_2-t_1)} \left\{ e^{A_o(t_1-t_0)} \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_o(t_1-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau \right\} + \int_{t_1}^{t_2} e^{A_1(t_2-\tau)} \mathbf{B}_1 u_n(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

Las condicione iniciales para el siguiente estado de operación estará dado por:

$$\chi\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = e^{A_o(t_2-\pi/\omega)} \chi(t_2) + \int_{t_2}^{\pi/\omega} e^{A_o(t_2-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Observando cuidadosamente las Ecuaciones (2.15), (2.17) y (2.18) en conjunto con las Ecuaciones (2.13) y (2.14) permite obtener la siguiente relación entre los extremos del intervalo bajo análisis.

$$\begin{bmatrix} i_s \\ u_o \end{bmatrix}_{\frac{\pi}{\omega}} = \zeta \cdot \chi(t_0) + \xi \quad (2.19)$$

Donde:

$$\zeta = e^{A_o(t_2-\pi/\omega)} \cdot e^{A_o(t_2-t_1)} \cdot e^{A_o(t_1-t_0)}$$

$$\xi = e^{A_o(t_2-\pi/\omega)} \left\{ e^{A_o(t_2-t_1)} + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_o(t_1-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} e^{A_1(t_2-\tau)} \mathbf{B}_1 u_n(\tau) d\tau \right\} + \int_{t_2}^{\pi/\omega} e^{A_o(t_2-\tau)} \mathbf{B}_o u_n(\tau) d\tau$$

Organizando conjuntamente toda la solución se puede observar que los extremos del intervalo están relacionados de la siguiente forma

$$\chi(\pi) = \zeta \cdot \chi(0) + \xi \quad (2.20)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} i_s & u_o \end{bmatrix}^T \quad (2.21)$$

Los valores de los parámetros  $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$  están determinados por la variable de control  $\delta$ , por lo tanto  $\zeta$  y  $\xi$  son funciones de  $\delta$ . Ahora bien, en cualquier punto de operación permisible de la variable  $\delta$  es posible explotar el hecho de que bajo condiciones estacionarias  $i_s$  es una variable alterna mientras que la tensión a través del condensador es una DC. De la Ecuación (2.19) se desprende entonces que el valor de los extremos de las variables de estado están relacionadas por la expresión,

$$\chi^*(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \chi^*(0) \quad (2.22)$$

Sustituyendo ahora la Ecuación (2.22) en la Ecuación (2.19) y despejando el vector de estados, se obtiene la expresión,

$$\chi^*(0) = \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \zeta^* \right)^{-1} \cdot \xi^* \quad (2.23)$$

Esta forma de solución matemática del problema no hace ningún tipo de aproximación, es bastante rigurosa y por lo tanto sirve para validar los resultados del modelo promediado. Inclusive esta forma de solución es útil en sistemas donde no se puede hacer uso del modelo promediado [1]. No obstante, el problema con este tipo de solución es que solo se puede resolver utilizando programas de computador especializados como MATLAB, lo que la hace absolutamente dependiente de los paquetes numéricos especializados.

### 3. FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA.

Con ánimo de comparar los resultados de los dos modelos se procederá a operar el sistema tanto en estado estable como en régimen transitorio. En el primer caso se observará el comportamiento tanto en modo inductivo como en modo capacitivo y en el segundo caso el sistema se someterá a cambios de operación de inductivo a capacitivo y viceversa. En todos los casos los valores de los parámetros del sistema estarán dados por ( $C_o=2400 \mu F$ ,  $L_s=10 \text{ mH}$ ,  $X_s/R_s=7.2$  y  $U_n=\sqrt{2} \cdot 120$ ),

Las Figuras 2 y 3 describen la solución obtenida en estado estacionario mediante el modelo promediado (línea sólida) y con el modelo exacto (línea a trazos). La primera figura muestra la solución bajo operación en modo inductivo, mientras que la segunda muestra la solución bajo operación en modo capacitivo.

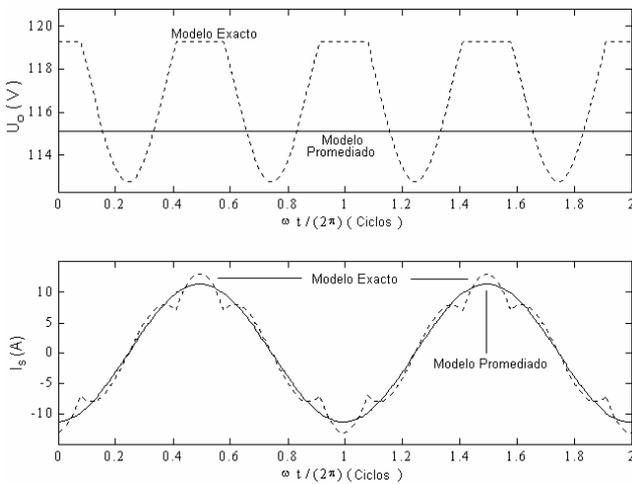


Figura 2. Solución estacionaria en estado estable bajo operación en modo inductivo ( $\delta=-2^\circ$ ). Línea sólida modelo promediado y línea a trazos el modelo exacto.

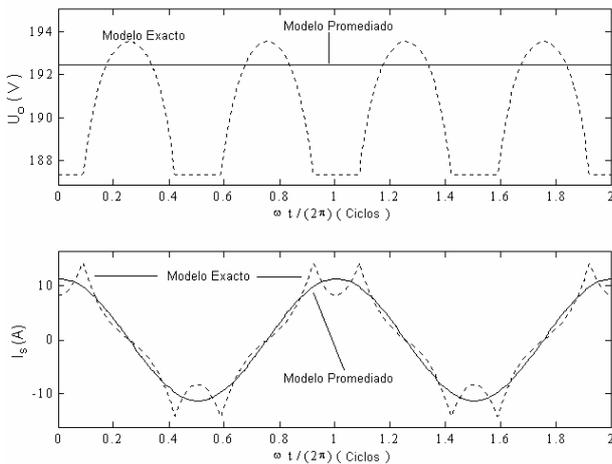


Figura 3. Solución estacionaria en estado estable bajo operación en modo capacitivo ( $\delta=2^\circ$ ). Línea sólida modelo promediado y línea a trazos el modelo exacto.

Las Figuras 4, 5, 6 y 7 muestran el comportamiento dinámico del modelo promediado (línea sólida) y del modelo exacto (línea a trazos).

Las Figuras 4 y 5 describen el comportamiento dinámico del sistema para un cambio en corriente de 11.3 A inductivo a 11.31 A capacitivo; la Figura 4 muestra la superposición de las dos soluciones mientras que la Figura 5 muestra solamente la solución del modelo exacto.

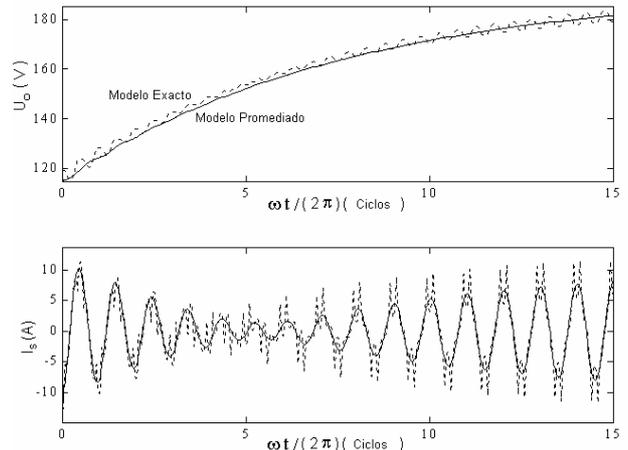


Figura 4. Comportamiento dinámico para un cambio de 11.3 A inductivo a 11.31 A capacitivo, ( $\delta=-2^\circ$  a  $\delta=2^\circ$ ) tanto para el modelo promediado (línea sólida) como para el modelo exacto (línea a trazos).

Las Figuras 6 y 7 describen el comportamiento dinámico del sistema para un cambio en corriente de 11.3 A capacitivo a 11.31 A inductivo; la Figura 6 muestra la superposición de las dos soluciones mientras que la Figura 7 muestra solamente la solución del modelo exacto.

### 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los resultados muestran que el modelo promediado exhibe un comportamiento adecuado a pesar de que solo se trabaja con la componente fundamental. Por otro lado, el modelo exacto muestra la cantidad de armónicos que se generan al intentar utilizar un inversor como compensador estático. La ventaja de utilizar el modelo exacto estriba en que se conoce con más detalle el comportamiento del sistema pero la solución es absolutamente dependiente de los programas especializados de programación además de la inherente carga matemática del análisis preliminar.

Independientemente del modelo que se utilice, los resultados muestran claramente la imposibilidad del sistema para mantener una tensión constante en sus dos modos de operación (inductivo y capacitivo).

A pesar de que es posible realizar compensación dinámica de potencia reactiva con un solo condensador, el rango de operación del sistema es bastante limitado, la variable  $\delta$  solo se puede variar entre  $\delta = +8^\circ$  y  $\delta = -8^\circ$ , esto sin considerar aún la generación de armónicos. Lo anterior implica que se deberá seguir investigando el sistema aun más, especialmente en cuanto a la eliminación de armónicos y la estabilización del nivel de tensión ante cambios en el modo de operación.

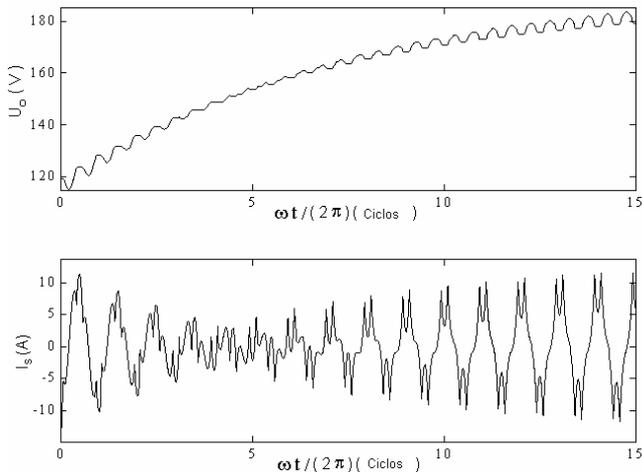


Figura 5. Comportamiento dinámico del modelo exacto para un cambio de 11.3 A inductivo a 11.31 A capacitivo.

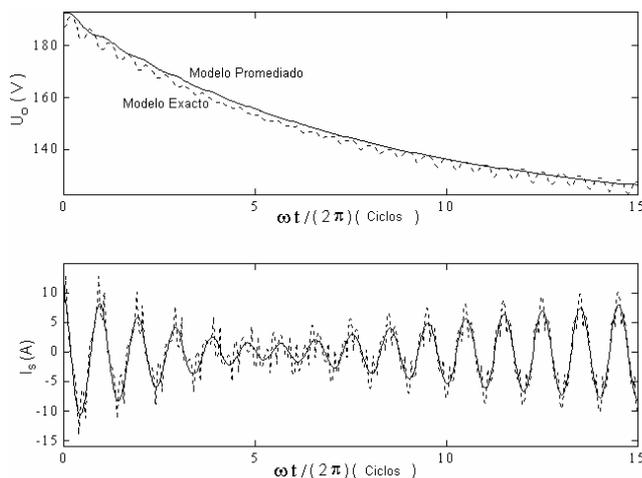


Figura 6. Comportamiento dinámico para un cambio en  $\delta$  de  $+2^\circ$  to  $-2^\circ$  obtenido mediante el modelo promediado (línea sólida) y el modelo exacto (línea a trazos)

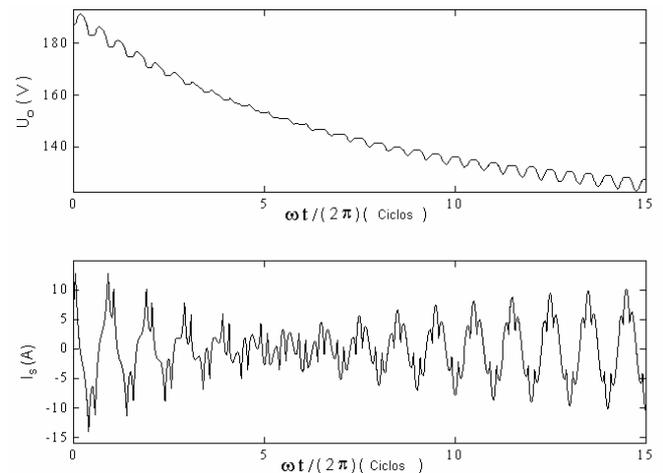


Figura 7. Comportamiento dinámico del modelo exacto para un cambio en  $\delta$  de  $+2^\circ$  a  $-2^\circ$ .

### 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kassakian J., M. Schlecht, and G. Verghese, "Principles of Power Electronics". Addison-Wesley, 1991.
- [2] Willems J. "Instantaneous sinusoidal and harmonic active and deactive currents in tree-phase power systems," European Transactions on Electric Power (ETEP), vol. 4 pp. 335-346, September / October 1994.
- [3] Zhang, Yihui "DSP-Based Control Strategies for an Inverter-Based Compensator," Master of Science Thesis , University of Manitoba, Winnipeg, February 1999.
- [4] Castro, Milton "Feedforward / Feedback Control of an Inverter-Based Compensator," Master of Science Thesis , University of Manitoba, Winnipeg, March 2000.
- [5] George C. Verghese, Marija Ilic-Spong, Jeffrey H. Lang, "Modeling and Control Challenges in Power Electronics," Proceedings of the 25<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, Athens, Greece, December 1986
- [6] H. R. Visser, P.P.J. van den Bosch, "Modelling of Periodically Switching Networks," IEEE PESC Record, pp. 67-73, 1991
- [7] M. Jamshid, M Malek-Zavarei, "Linear Control Systems, a Computer Aided Approach," Volume 7, Pergamon Press 1986
- [8] Matlab User's Guide. The Mathworks, 1995