

COMPARAÇÃO DE DESEMPENHOS DE CARTEIRAS OTIMIZADAS PELO MODELO DE MARKOWITZ E A CARTEIRA DE AÇÕES DO IBOVESPA¹

COMPARE PERFORMANCE OF THE PORTFOLIO OPTIMIZED BY MARKOWITZ MODEL AND STOCKS PORTFOLIO OF IBOVESPA

Sandro Marques²

Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Administração
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
sandro.marques@pucpr.br

Wesley Vieira da Silva

Doutor em Engenharia da Produção pela UFSC
Professor do Programa de Pós-Graduação em Administração e Bolsista em Produtividade de Pesquisa do CNPq
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
wesley.vieira@pucpr.br

Jansen Maia del Corso

Doutor em Management Science pela ESADE Ramon Llull Universidad
Professor do Programa de Pós-Graduação em Administração
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
del.corso@pucpr.br

Luciano Luiz Dalazen

Mestrando pelo Programa de Pós-Graduação em Administração
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
ldalazen@yahoo.com.br

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa é comparar o desempenho previsto de uma carteira ótima de ações, criada a partir de dados históricos com período compreendido entre janeiro de 2009 e dezembro de 2009, com o desempenho real obtido por essa carteira no ano de 2010, além de fazer uma análise comparativa do seu desempenho com o da carteira teórica ótima, valendo-se de dados dessas ações no ano de 2010 e do índice Ibovespa, por meio de técnicas de *back testing*. Essa técnica consiste no teste do modelo para verificar se os seus resultados estão de acordo com o que aconteceu na realidade, usando como base os dados históricos. Em termos metodológicos, trata-se de uma pesquisa aplicada e quantitativa de natureza descritiva, cujos procedimentos de execução utiliza-se da pesquisa operacional com delineamento *ex-post-facto*. Os resultados auferidos a partir da análise dos dados são de que não foi possível atestar a eficiência do modelo de Markowitz para a criação de carteiras eficientes somente com esse exemplo, mas é possível perceber que o comportamento nesse caso foi muito próximo ao previsto.

Palavras Chave: Markowitz. Otimização. Portfolio. *Performance*.

¹ Artigo recebido em: 19/06/2013. Revisado por pares em: 02/07/2013. Recomendado para publicação em: 03/07/2013 por Orleans Silva Martins (Editor Geral). Publicado em: 23/07/2013. Organização responsável pelo periódico: UFPB.

² Endereço: Rua Imaculada Conceição, 1155, Bloco Acadêmico, Sala 103B, Prado Velho, CEP: 80.215-901, Curitiba/PR.

ABSTRACT

The aim of this study sought to compare the expected performance of an optimal portfolio of shares, created from historical data between January 2009 and December 2009, with the actual performance of the portfolio in 2010, and make a comparative analysis of their performance with the optimal portfolio theory, using data such shares in 2010 and the IBOVESPA through backtesting techniques. This technique consists of the model test to check whether their results are consistent with what happened in reality, using as a basis the historical data. In methodological terms, it is an applied research and quantitative descriptive in nature, whose execution procedures uses operations research to design ex-post-facto. Actual results from the analysis of the data is that it cannot vouch for the efficiency of the Markowitz model for creating efficient portfolios only with this example, but it is indeed possible to realize that the behavior in this case was very close to predicted.

Key Words: Markowitz; Optimization. Portfolio. Performance.

1 INTRODUÇÃO

Um investimento pode ser caracterizado como um compromisso de dinheiro do qual se espera que gere mais dinheiro e, por requerer um determinado sacrifício no presente para um benefício incerto no futuro, ele possui certo grau de risco (FRANCIS; ARCHER, 1991).

Qualquer decisão de investimento sempre vai envolver, além dos valores a serem investidos, os prazos de investimento, os diferentes níveis de retorno que o investidor está disposto a obter, os níveis de risco que ele está disposto a correr com os valores investidos e as diferentes combinações de risco e retorno que as alternativas disponíveis de investimento oferecem.

Para Costa e Assunção (2005) estas alternativas podem ser compostas por ativos individuais ou por um conjunto de ativos, que formam uma carteira de investimentos. Um ativo é algo que tem valor e que pode no futuro gerar algum ganho para o seu investidor, podendo ser físico, como casas, terrenos, carros e eletrodomésticos, ou financeiro, como moedas estrangeiras, ações, títulos públicos e derivativos, entre outros. O termo *portfolio* de investimentos também pode ser usado visando indicar uma carteira de investimentos.

O tipo de investimento foco deste trabalho é aquele fruto de títulos de empresas que compõe o mercado aberto de ações. No Brasil, estes títulos são negociados na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBOVESPA). Estes títulos emitidos pelas empresas e negociados nas Bolsas de Valores são as ações, que podem ser definidas como títulos de renda variável que representam a menor fração do capital de uma empresa constituída na forma de sociedade anônima.

Apesar do mercado de ações ser de renda variável, pesquisadores, analistas de mercado e investidores buscam formas de prever as oscilações dos preços das ações na tentativa de se estabelecer a tendência do título em termos de rendimento, ou seja, se há uma tendência de alta, de baixa ou de estabilidade no valor da ação.

Neste sentido, há duas escolas que usam informações e considerações diferentes para fazer essas projeções: uma é a escola fundamentalista, que se baseia em informações financeiras das empresas como o Balanço Patrimonial e Demonstrações de Resultado do Exercício (DRE), além de fatores políticos e desempenho do mercado e da economia como um todo; a outra é a escola técnica (ou gráfica), que estuda o desempenho dos preços de uma ação ao longo do tempo e, por meio de métodos matemáticos e estatísticos tenta projetar as movimentações futuras dos preços do título.

A análise técnica se preocupa como os preços se movimentam e não porque eles se movimentam, ou seja, estuda-se a dinâmica do mercado por meio de sinais que o próprio mercado emite com o objetivo de se prever informações futuras em função do comportamento passado. Esta previsão, por meio da aplicação de algum método e da consideração de certas hipóteses, é um processo que auxilia na tomada de decisão de investimentos (SECURATO, 1996).

Esta possibilidade de previsão do valor de uma ação, ou de um conjunto delas, por meio de análises estatísticas e matemáticas será o foco deste trabalho, não sendo considerada qualquer informação relativa ao desempenho da empresa, setor, política, economia ou mercado, ou seja, não será considerada qualquer análise fundamentalista.

Este trabalho tem por objetivo comparar o desempenho previsto de uma carteira ótima de ações, criada a partir de dados históricos com período compreendido entre janeiro de 2009 e dezembro de 2009, com o desempenho real obtido por essa carteira no ano de 2010, além de comparar o seu desempenho com o da carteira teórica ótima com os dados dessas ações em 2010 e com o índice IBOVESPA, por meio de técnicas de *back testing*. Essa técnica consiste no teste do modelo para verificar se os seus resultados estão de acordo com o que aconteceu na realidade, usando como base os dados históricos.

A carteira ótima de ações será criada por meio da aplicação do modelo de Markowitz para a criação de portfólios de investimento, considerando as informações históricas de taxa de retorno de ações das empresas que representam mais de 50% de participação no índice IBOVESPA e que tenham suas ações negociadas durante o período selecionado.

Costa e Assunção (2005) afirmam que há um conceito empiricamente aceito de que a diversificação de ativos diminui o risco de um investimento. Este conceito vem comprovar o ditado popular: “não se deve colocar todos os ovos em uma cesta única”. As carteiras (ou portfólios) de investimentos são construídas exatamente com esta função de redução de riscos pela diversificação. O processo de otimização por algoritmos como o proposto por Markowitz considera questões como a relação entre os históricos de rendimentos das ações para determinar a participação de cada título na carteira, determinando o retorno esperado e o risco desta (MARKOWITZ, 1952).

Portanto, a pergunta de pesquisa deste trabalho pode ser descrita da seguinte forma: uma carteira teórica de ações criada pelo método de Markowitz teria um bom desempenho no período seguinte à base usada para sua criação comparando-se ao índice IBOVESPA e à carteira otimizada de ações nesse período?

O trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma: a primeira seção traz a parte introdutória; a segunda trata da fundamentação teórico-empírica; a terceira refere-se a metodologia adotada; a quarta traz a apresentação e análise dos dados e a quinta refere-se às considerações finais e recomendações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-EMPÍRICA

O mercado de ações sempre foi bastante atrativo aos investidores em função da possibilidade de proporcionar grandes rentabilidades em pequenos períodos de tempo. O problema deste mercado é que, da mesma forma que pode produzir estes ganhos, em pequenos períodos de tempo, ele também pode produzir grandes perdas.

Um desafio enfrentado pelos investidores é buscar a possibilidade de aproveitar o máximo possível destas altas de títulos, ou do mercado como um todo, e reduzir as chances de perdas resultantes das baixas. Um ganho ou perda no investimento está ligado ao conceito de retorno de investimento e a incerteza sobre este retorno está relacionada ao conceito de risco (SECURATO, 1996). Assim, primeiramente serão conceituadas a taxa de retorno e risco de um investimento e como elas são influenciados quando o investidor leva em conta uma carteira com mais de um ativo.

2.1 A Taxa de Retorno de um Investimento

A taxa de retorno de um investimento mede a velocidade de como o valor de um investimento cresce ou diminui. Esta taxa pode ser calculada pelo percentual da variação do valor final do investimento com o seu valor inicial em um determinado período:

Onde:

$$R_t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \quad (1)$$

R_t taxa de retorno no período “t”;
 V_f valor final do investimento;
 V_i valor inicial do investimento (ou preço de compra).

De acordo com Costa e Assunção (2005), quando as variações entre V_f e V_i são pequenas, aplicando-se a expansão da 1ª ordem de Taylor, pode-se calcular aproximadamente a taxa de retorno de um dado investimento no período “t” por intermédio da expressão (2):

Onde:

$$R_t = \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (2)$$

R_t taxa de retorno do investimento no período “t”;
 \ln logaritmo neperiano.

Os métodos anteriores se aplicam ao cálculo da taxa de retorno de investimentos para valores passados. O fato de um rendimento ter acontecido no passado não significa que ele vá acontecer com certeza no futuro, assim a informação que os investidores consideram para a tomada de decisão é o valor esperado deste rendimento.

O valor esperado pode ser resultado de uma projeção baseada em rendimentos históricos dos investimentos ou em estimativas de analistas financeiros sobre as possíveis taxas de retorno futuras e suas probabilidades. Francis e Archer (1991) caracterizam a primeira forma como sendo “objetiva”, que é baseada na frequência de distribuição relativa dos rendimentos passados, e a segunda como sendo “subjetiva”. Elton *et al.* (2004, p. 59) afirmam que “quando há risco, o resultado de qualquer decisão não é conhecido com certeza, e os resultados possíveis são comumente representados por uma distribuição de frequências”.

Considerando a frequência de distribuição relativa das taxas de retorno, é possível estimar a taxa de retorno esperada de um investimento aplicando a média ponderada das taxas de retorno históricas, sendo a frequência de cada taxa de retorno usada para estimar a probabilidade de ocorrência do rendimento e esta probabilidade usada como peso para a ponderação (FRANCIS; ARCHER, 1991), resultando na expressão (3).

Onde:

$$\bar{R}_i = \sum_{t=1}^T P_{it} R_{it} \quad (3)$$

\bar{R}_{it} rendimento esperado do ativo “i” no período “t”;
 P_{it} probabilidade da ocorrência do rendimento “ R_{it} ” para o ativo “i” no período “t”;
 T : número de elementos na tabela de frequência analisada.

Alguns estudos empíricos demonstraram que as taxas de retorno de aplicações financeiras seguem uma distribuição próxima à distribuição normal, ou seja, são simétricas (FRANCIS; ARCHER, 1991; FISHER; LORIE, 1970). Desta forma, uma medida de tendência central (que indique o centro da distribuição) pode ser usada para se estimar a taxa de retorno esperada baseada em históricos dos rendimentos. As medidas de tendência central podem ser a média aritmética, moda ou mediana.

Markowitz atesta que a moda e a mediana poderão levar a erros de interpretação, pois a mediana apresenta o inconveniente de ser insensível a mudanças nos valores extremos observados (MARKOWITZ, 1959). Já a moda, contrariamente, possui uma grande sensibilidade a alterações nos

³ Como tais estimativas têm como base a análise fundamentalista, estas não serão consideradas no escopo deste trabalho.

dados considerados. Além disso, a média aritmética será sempre única (fato que não acontece com a moda) e as relações matemáticas usando a média aritmética ficam mais simples para se calcular o rendimento esperado do que se fossem usadas moda ou mediana.

A forma considerada neste trabalho para estimativa do rendimento esperado para um título será representada pela média aritmética dos rendimentos passados, considerando que estes rendimentos passados têm individualmente a mesma probabilidade de acontecerem no futuro. Para mensurar a taxa média dos retornos esperados, utiliza-se a expressão denotada em (4):

$$\bar{R}_{it} = \sum_{j=1}^N \frac{R_{ij}}{N}$$

Onde:

$$\bar{R}_{it} \quad \text{rendimento esperado do ativo "i" no período "t";}$$

$$R_{ij} \quad \text{retorno do ativo "i" no período "j";}$$

$$N \quad \text{número de períodos passados analisados.}$$
(4)

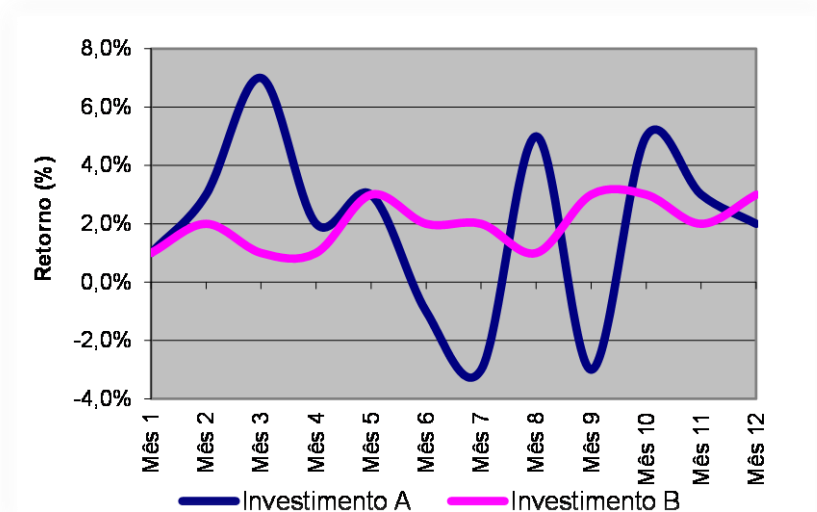
Assim como o rendimento esperado de um ativo, o risco acaba sendo um fator considerado pelo investidor no momento da decisão para realizar um investimento financeiro.

2.2 Risco de Investimento Financeiro

A literatura apresenta as mais variadas definições para o significado de risco de investimento: Securato (1996, p. 26) define risco como “grau de incerteza a respeito de um evento”. Francis (2001) define o risco simplesmente como a variabilidade das taxas de retorno. Jorion (1998, p. 61) define como sendo a “dispersão de resultados inesperados, devido a oscilações nas variáveis financeiras”.

Elton sugere que o risco é representado por uma medida estatística de dispersão dos valores das taxas de retorno, como a variância ou o desvio padrão (ELTON *et al.*, 2004). O gráfico apresentado na Figura 1 mostra o desempenho de dois investimentos durante doze meses.

Figura 1 – Comparação entre retornos de dois investimentos



Apesar dos dois investimentos apresentarem uma taxa de retorno médio de 2% no período de doze meses, pode-se observar que os retornos do Investimento A variaram em uma proporção muito maior que os do Investimento B, desta forma, diz-se que houve maior incerteza do retorno para o Investimento A e conseqüentemente maior risco.

A variância do ativo representa o quanto a taxa de retorno deste ativo se afastou daquela prevista pelo investidor, que é a média das taxas de retorno analisadas. Assim, quanto maior o valor

da variância maior a chance do rendimento do ativo se distanciar do valor esperado pelo investidor. Por outro lado, quanto menor o valor da variância, menor a probabilidade de um retorno se distanciar do valor esperado. A variância das taxas de retorno do investimento é obtida pela expressão (5).

$$Var(R_i) = \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{N} \quad (5)$$

Onde:

- \bar{R}_i rendimento esperado do ativo "i";
- R_{ij} retorno do ativo "i" no período "j";
- N número de períodos passados analisados;
- $Var(R_i)$ ou σ_i^2 variância do ativo "i" nos "N" períodos analisados.

Outra medida de dispersão que pode ser utilizada é o desvio-padrão (σ), que é obtido por meio da raiz quadrada da variância das taxas de retorno:

$$\sigma_i = \sqrt{Var(R_i)} \quad (6)$$

Onde:

- σ_i desvio-padrão do ativo "i";
- $Var(R_i)$ variância do ativo "i".

Tanto os desvios para baixo quanto os desvios acima do valor esperado do rendimento do ativo são considerados no cálculo da variância. Teoricamente os desvios acima da média são desejados pelo investidor e somente os desvios abaixo da média perturbam o investidor.

Outra forma de considerar a dispersão das taxas de retorno e, conseqüentemente, o risco de um ativo, é levando em conta somente os retornos históricos abaixo da média, pois seriam indesejados pelo investidor. Esta medida é conhecida como semivariância. Entretanto, os resultados obtidos com a utilização da semivariância são muito próximos aos obtidos com o uso da variância: "como as evidências empíricas mostram que a maioria dos ativos existentes no mercado possui retornos razoavelmente simétricos, a semivariância não é necessária" (ELTON *et al.*, 2004, p. 63).

A variância estatística e o desvio padrão (que é derivado da primeira) das taxas de retorno serão utilizados como medida de risco (ou de dispersão) dos ativos e das carteiras de investimentos neste trabalho. A criação de carteiras diversificadas de investimentos é uma alternativa aos investidores que, pela diversificação, podem trazer como benefícios a possibilidade de reduzir o risco global do investimento a um nível abaixo do risco de qualquer um dos ativos individualmente, sem sacrificar as taxas de retorno obtidas.

2.3 Carteiras de Investimento

Há um conceito empiricamente aceito de que a diversificação de ativos diminui o risco de um investimento (COSTA; ASSUNÇÃO, 2005). Dessa forma, "os investidores não devem aplicar, e na verdade não aplicam, em um único ativo; eles investem em grupos ou carteiras de ativos" (ELTON *et al.*, 2004, p. 59). Para Securato a diversificação pode ser entendida como "qualquer processo que possibilite minimizar os efeitos do risco sobre um ativo ou sobre uma carteira de ativos" (SECURATO, 1996, p. 44).

No próximo item será apresentada a Teoria Moderna de Portfolios, descrevendo os conceitos envolvidos e as alternativas para a criação de carteiras de investimentos eficientes, que segundo Gitman e Joehnk, são aquelas que fornecem o retorno mais alto para um dado nível de risco ou um risco mais baixo para um dado nível de retorno (GITMAN; JOEHNK, 2005).

2.4 A Teoria Moderna de Portfólios

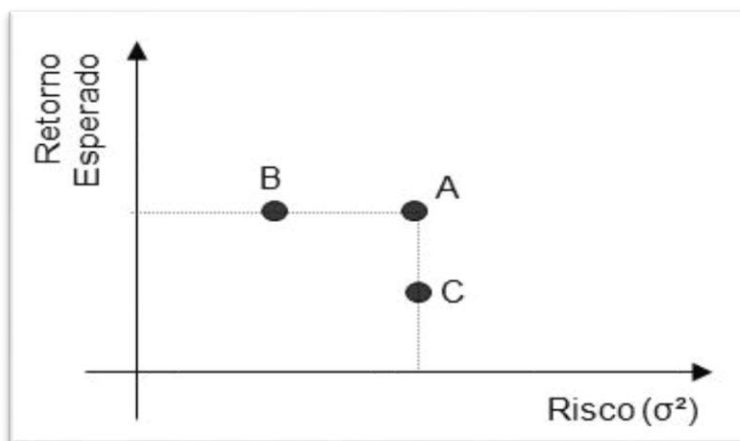
Os estudos de Markowitz foram o marco inicial sobre os estudos de carteiras de investimento e que introduziram a Teoria Moderna de Investimento (ou Teoria Moderna de Portfólios). Estes estudos apresentaram pela primeira vez um embasamento teórico matemático em relação à redução de risco resultante da diversificação (COSTA; ASSUNÇÃO, 2005).

A Teoria Moderna de Portfólios pode ser considerada uma ferramenta que permite ao investidor compor a carteira de investimento com diferentes ativos financeiros e otimizar a relação entre retorno e risco do investimento:

Essa teoria é desenvolvida seguindo a premissa de que os investidores avaliariam suas carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado, sendo essas as duas únicas variáveis de decisão para a seleção dos ativos. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, os investidores sempre escolheriam a de maior retorno e, da mesma forma, quando postos a escolher duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolheriam a de menor (COSTA; ASSUNÇÃO, 2005, p. 17)

Estes princípios podem ser observados na Figura 2. Considerando *A*, *B* e *C* diferentes carteiras de investimentos, sendo *A* e *C* de mesmo risco e *A* e *B* de mesmo retorno esperado (sendo o retorno esperado e risco de *B* e *C* diferentes), o investidor sempre escolheria a carteira *A* em relação à carteira *C*, pois *A* possui um retorno esperado maior. Da mesma forma, a carteira *B* sempre seria preferida em relação à carteira *A*, pois *B* possui menor risco. Tomando-se como base os princípios de dominância acima descritos e considerando-se um conjunto de ativos que podem ser combinados em diferentes proporções para a formação de carteiras de investimentos, é possível definir um conjunto limitado destas carteiras de investimentos que são preferíveis em relação a todas as outras carteiras do conjunto.

Figura 2 – Princípios de dominância entre ativos



Fonte: Adaptado de Vince (1999, p. 39).

Estas carteiras que são preferidas em relação às outras são denominadas Carteiras Eficientes e o seu conjunto forma um conjunto denominado Fronteira Eficiente, que será descrito a seguir, logo após a definição e forma de cálculo da taxa de retorno e de risco de carteiras de investimentos.

2.4.1 Taxa de Retorno e Risco e de uma Carteira

A taxa de retorno de uma carteira de ativos é obtida por meio da proporção de cada ativo na composição da carteira e da taxa de retorno individual de cada ativo, ou seja, calculando-se a média ponderada das taxas de retorno dos ativos individuais. Da mesma forma, a taxa de retorno esperada

da carteira de ativos é a média ponderada das taxas de retorno esperadas dos ativos individuais (ELTON *et al.*, 2004), e pode ser mensurada por meio da expressão (7).

Onde:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N (\phi_i \bar{r}_i)$$

\bar{R}_p rendimento esperado do portfólio (carteira);
 ϕ_i proporção do ativo "i" no portfólio "p";
 \bar{r}_i rendimento esperado do ativo "i";
 N número de ativos "i" no portfólio "p".

(7)

O risco de uma carteira é medido da mesma forma que o risco de um ativo individual, ou seja, por meio do cálculo da variância da carteira. Elton *et al.* (2004) demonstram matematicamente como a variância de uma carteira é obtida. Partindo-se do valor esperado do quadrado da diferença entre o rendimento obtido e o rendimento esperado da carteira para um período, obtém-se a variância da carteira como:

Onde:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^N (\phi_j^2 \sigma_j^2) + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (\phi_j \phi_k \sigma_{jk})$$

σ_p^2 variância da carteira "p";
 ϕ_j proporção do ativo "j" na carteira "p";
 ϕ_k proporção do ativo "k" na carteira "p";
 σ_j^2 variância do ativo "j";
 σ_{jk} covariância entre os ativos "j" e "k";
 N número de ativos na carteira.

(8)

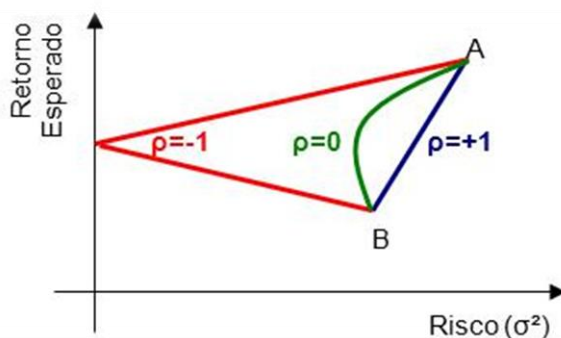
Os estudos de Markowitz liquidaram a concepção de que as estratégias ingênuas de diversificação, com a escolha aleatória dos títulos, trariam redução de risco na carteira. Para que uma carteira tenha riscos menores que os ativos que a compõem individualmente, é necessário que os preços dos ativos não variem em conjunto na mesma direção e proporção.

Segundo Elton *et al.* (2004) um menor risco na carteira depende da possibilidade dos retornos dos ativos variarem em proporções diferentes ou que, enquanto alguns apresentem retornos positivos, outros apresentem retornos negativos. Assim, na determinação do risco de uma carteira, deve ser estimado um indicador que relacione os retornos dos títulos que compõem a carteira dois a dois (ELTON *et al.*, 2004). Este indicador pode ser representado pelo coeficiente de correlação ou a covariância entre os títulos (TOSTA DE SÁ, 1999).

Este coeficiente de correlação varia de +1, quando os resultados são perfeitamente correlacionados (sempre que um rendimento de um ativo é positivo, o do outro também é, assim como quando o rendimento de um é negativo, o do outro também é), até -1, quando a correlação é linear e perfeita no sentido inverso, ou seja, sempre que um é positivo, o outro é negativo, e vice-versa.

A Figura 3 apresenta o risco resultante de uma carteira composta por dois ativos A e B, considerando as situações onde a correlação entre os dois ativos é igual a +1, igual a zero e igual a -1. Considerando diferentes proporções de A e B na carteira (sendo que a soma total deve ser sempre igual a 100%), quando a correlação "ρ" entre A e B é igual à +1 a linha que une a carteira A com a carteira B é representada por uma reta (cor azul). Quando a correlação for igual à zero, as diferentes proporções formam uma curva (cor verde) e, quando o coeficiente de correlação for igual à -1, as diferentes proporções de A e B resultam em duas retas (cor vermelha).

Figura 3 – Correlação e a redução de risco



Fonte: Adaptado de Tosta de Sá (1999, p. 53).

Tosta de Sá (1999) também afirma que a covariância é outra medida estatística de dependência linear entre duas variáveis, no caso das taxas de retorno de dois ativos. Da mesma forma que o coeficiente de correlação, quando as taxas de retorno não estão relacionadas linearmente, a covariância entre elas é zero. A covariância entre duas variáveis é obtida a partir da expressão (9):

Onde:

σ_{xy} covariância entre as variáveis “x” e “y”;

R_x taxa de retorno do ativo “x” em um determinado período de tempo;

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum (R_x - \bar{R}_x)(R_y - \bar{R}_y)}{N}$$

\bar{R}_x taxa de retorno esperada do ativo “x”;

R_y taxa de retorno do ativo “y” em um determinado período de tempo;

\bar{R}_y taxa de retorno esperada do ativo “y”;

N número de observações.

(9)

Como pode ser observado na expressão (9), a covariância entre duas variáveis, no caso das taxas de retorno históricas de dois títulos, é considerada no cálculo do risco de uma carteira. Segundo Tosta de Sá:

Quanto menor a covariância entre os retornos dos dois títulos, menor o risco da carteira e, mais, quando a covariância for negativa o risco da carteira será menor do que a média ponderada do risco de cada um dos títulos que a compõem. Esse é o grande segredo da diversificação eficiente proposta por Markowitz. (TOSTA DE SÁ, 1999, p. 58).

Desta forma, o risco de uma carteira pode ser reduzido se forem considerados ativos cuja covariância entre eles sejam as menores possíveis. Se for considerado um número grande de ativos com retornos independentes, ou seja, com covariância igual a zero, a variância da carteira composta por estes ativos tenderá a zero. Apesar desta possibilidade matemática, na prática, a maioria dos mercados possui correlação e covariância positivas entre as taxas de retorno de ativos. Elton *et al.* (2004, p. 71) ainda mostram que “nesses mercados, não se consegue levar a zero o risco da carteira, mas ele pode ser muito inferior à variância do retorno de um ativo individualmente”.

2.4.2 Fronteira Eficiente

Para um investidor que está considerando um investimento em um conjunto fechado de ativos e tem disponível um determinado montante em dinheiro a ser investido, é possível a criação de inúmeras carteiras diferentes por meio de investimentos em distintas proporções do montante financeiro disponível em cada ativo.

Como exemplo, pode-se considerar que este investidor está interessado em investir em seis ativos "A", "B", "C", "D", "E" e "F". Para cada um deles tem-se o histórico de valores dos ativos em um determinado número de períodos passados. Com estes valores dos ativos e aplicando-se algumas das equações descritas anteriormente, pode-se determinar qual a taxa de retorno média assim como o desvio padrão (medida de risco) de cada ativo. Considerando-se que a proporção do montante total a ser investido em cada ativo individualmente pode variar de 0% a 100% e que o somatório total das proporções investidas individualmente deve sempre ser igual a 100% (ou seja, o montante total disponível), é possível considerar inúmeras alternativas, como por exemplo, as que encontram-se listadas na Tabela 1.

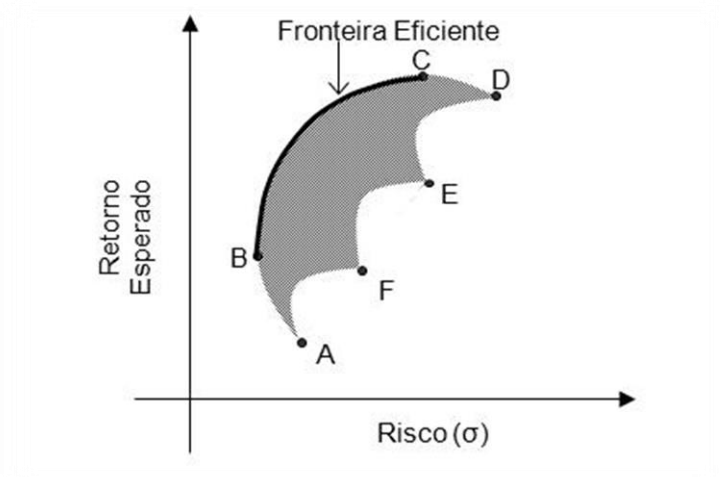
Tabela 1 - Exemplo de diferentes carteiras de investimento

Ativo	A	B	C	D	E	F	Total
Carteira 1	10%	10%	20%	20%	10%	30%	100%
Carteira 2	0%	35%	15%	0%	30%	20%	100%
...
Carteira <i>n</i>	<i>t</i> %	<i>u</i> %	<i>v</i> %	<i>x</i> %	<i>y</i> %	<i>z</i> %	100%

Onde: *t*, *u*, *v*, *x*, *y* e *z* são maiores ou igual a 0% e menores ou igual a 100%

Cada uma destas carteiras possíveis terá uma taxa de retorno e um risco (desvio padrão) que podem ser calculados em função da composição da carteira. Este conjunto de carteiras possíveis pode ser apresentado em um gráfico, em conjunto com os ativos, que poderia ter o formato igual à Figura 4.

Figura 4 – Risco *versus* retorno de ativos e das carteiras possíveis



Fonte: Adaptado de Gitman e Joehnk (2005, p. 150)

Nessa figura, os pontos com as letras de "A" até "F" representam os ativos e a área escura do gráfico é formada por inúmeros pontos, onde cada ponto representa uma carteira possível de ser formada com diferentes proporções investidas nos ativos "A", "B", "C", "D", "E" e "F".

Dentre todas estas carteiras possíveis há um conjunto que é preferido em relação às demais pelo princípio de dominância apresentado anteriormente, ou seja, este conjunto de carteiras eficientes tem o menor risco para um dado nível de retorno e o melhor retorno para um determinado nível de risco. Este conjunto de carteiras eficientes encontra-se na curva que liga os pontos “B” e “C” do gráfico e formam a fronteira eficiente das carteiras destes ativos. Assim, pode-se definir a fronteira eficiente como sendo o conjunto viável de carteiras eficientes, tal como “aquelas que fornecem a melhor substituição entre risco (medido pelo desvio padrão) e retorno” (GITMAN; JOEHNK, 2005, p. 149)

Gitman e Joehnk (2005) e Elton *et al.* (2004) descrevem que o risco total de um investimento é composto por uma parte diversificável e outra parte não diversificável. A parte diversificável do risco também é definida como risco específico ou risco não sistemático, e a parte que não é afetada pela diversificação é conhecida como risco sistemático ou risco de mercado. O risco de uma carteira de investimentos é obtido pela equação (10).

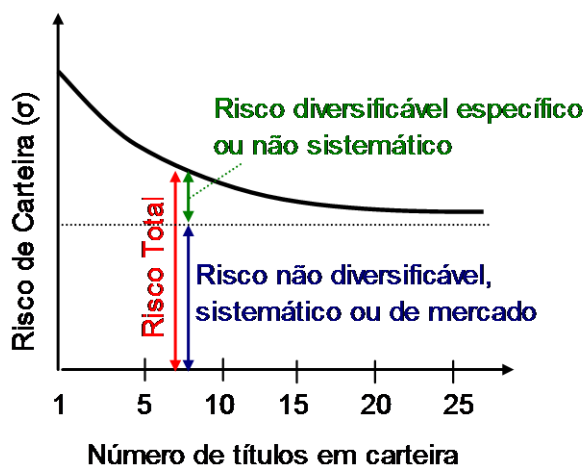
Onde:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \overline{VAR} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \overline{COV} \quad (10)$$

σ_p^2 variância da carteira “p”;
 \overline{VAR} média aritmética das variâncias individuais;
 \overline{COV} média aritmética das covariâncias entre todos os pares de ativos da carteira;
 N número de ativos.

Pode-se observar a partir da expressão (10) que a contribuição da variância dos ativos individuais tende a zero quando “N” é bastante elevado, da mesma forma que a contribuição das covariâncias tende à média das covariâncias nesta situação. Dessa forma, comprova-se que o risco individual dos títulos pode ser eliminado com o processo de diversificação, mas o risco causado pelas covariâncias não pode ser eliminado, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Risco sistemático e não sistemático



Fonte: Adaptado de Elton *et al.* (2004, p.73) e Gitman e Joehnk (2005, p. 151).

Com relação ao número ideal de ativos na carteira, Gitman e Joehnk afirmam que “em média, a maior parte dos benefícios de diversificação, em termos de redução de risco, pode ser obtida formando-se carteiras que contenham de oito a 15 títulos selecionados aleatoriamente” (GITMAN; JOEHNK, 2005, p. 151).

Segundo Francis (2001), para obter os melhores benefícios, o número ideal varia de 10 a 15 ativos diferentes nas carteiras. Acima deste limite, qualquer adição de título resulta em uma diversificação supérflua. Fatores como dificuldade na gestão, altos custos de pesquisa e corretagem e o aumento dos custos para formação e acompanhamento da carteira pode fazer com que o ganho líquido (retorno) do investidor seja reduzido, justificando desta forma o limite máximo de 15 títulos para a formação de carteiras de investimentos mais eficientes.

A criação dessas carteiras de investimento usando algoritmos como o de Markowitz considera que o desempenho futuro das ações componentes da carteira tenha comportamento aproximado ao do período em que os dados foram utilizados para a criação da carteira. Entretanto sabe-se que o desempenho passado de uma ação não garante o mesmo desempenho futuro.

Além disso, fatores externos como o ataque terrorista às Torres Gêmeas nos EUA em 2001 e a crise imobiliária nos EUA em 2008 podem influenciar diretamente o comportamento do mercado de ações, como pode ser observado no comportamento dos mercados mundiais de ações logo após esses eventos, e não há dados estatísticos que sejam capazes de prever esses eventos.

Mau (2009) descreve que essas questões são pouco consideradas em literaturas econômicas e financeiras e as frequências relativas são utilizadas sem questionamento por muitos modelos matemáticos. Houve esforços que iniciaram há aproximadamente oito décadas atrás para considerar esses fatores nos modelos matemáticos, mas esses problemas resultaram em modelos complicados e difíceis de interpretar e usar. Independente de essas exceções serem válidas, os modelos que utilizam a frequência relativa como base para estimar o desempenho futuro de ações são racionais e baseados em conhecimento válido e continuam a serem usados pelos economistas (MAU, 2009).

2.5 Avaliação de Performance de Carteiras de Investimento

Algumas questões surgem quando se deseja escolher uma carteira entre o conjunto de carteiras eficientes: qual delas é a mais adequada ao investidor considerando-se a relação entre risco e retorno esperado para cada uma das carteiras? Ou seja, em que proporção o investidor poderia aceitar o aumento do risco do investimento considerando um determinado aumento no retorno esperado? Ou, em sentido contrário, que parcela de retorno esperado este investidor estaria disposto a deixar de lado para ter uma redução do risco?

O termo performance é utilizado neste trabalho para indicar esta relação entre risco e retorno de ativos e carteiras de investimentos. O objetivo deste tópico é descrever um dos indicadores que podem ser usados para medir esta performance e até mesmo para a formação de carteiras que atendam melhor às expectativas de investidores.

Para que um investidor possa selecionar entre todas as carteiras de ativos disponíveis quais as opções mais adequadas de acordo com o seu comportamento em relação ao risco e até mesmo compará-las com outras opções disponíveis no mercado financeiro (aplicações de renda fixa, imóveis, poupança, etc.) é necessário que sejam estabelecidos critérios de comparação entre estas alternativas. Uma das formas mais simples de avaliação da performance de carteiras é por meio do agrupamento das alternativas diferentes em categorias de riscos equivalentes e comparação dos retornos obtidos em cada categoria (ELTON *et al.*, 2004). Dentro de cada categoria, o investimento mais interessante ao investidor será aquele com maior taxa de retorno.

Outra forma de comparação é por meio do desenvolvimento de medidas da relação entre risco e retorno para que a comparação possa ser feita entre alternativas com níveis de risco diferentes. Nesse trabalho será considerado o indicador de performance conhecido como índice de performance de Sharpe, que relaciona a taxa de retorno da carteira com o risco total do ativo⁴.

⁴ Há outros indicadores de performance como o índice de Treynor, que usa o Beta como medida de risco (variabilidade) das ações mas não serão considerados nesse trabalho.

2.5.1 Índice de Performance de Sharpe

Esse índice foi criado por William F. Sharpe em 1965, que o definiu como um Índice de Re-compensa pela Variabilidade "*Reward to Variability Ratio*". O índice de performance de Sharpe considera o retorno de uma carteira relativo ao seu risco total (desvio padrão). Sharpe (1965) considerou a possibilidade dos investidores manterem parte de seus recursos aplicados em ativos com risco e parte aplicados em ativos livres de risco.

O índice de performance de Sharpe é obtido dividindo-se o prêmio pelo risco assumido (diferença entre o retorno da carteira e o retorno do ativo livre de risco) pelo risco total da carteira, tal como mostra a equação (11).

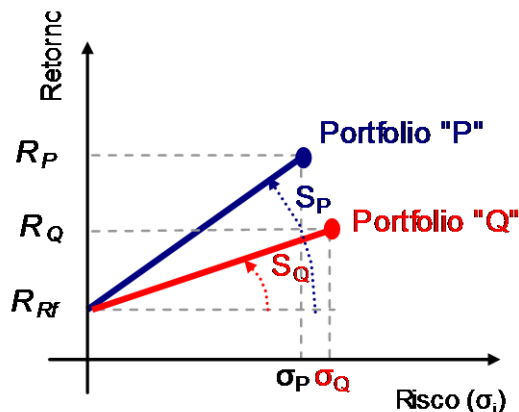
$$S_P = \frac{R_P - R_{Rf}}{\sigma_P}$$

Onde:

- S_P índice de *performance* de Sharpe para o *portfolio* "P"
 R_P retorno do *portfolio* "P";
 R_{Rf} retorno do ativo livre de risco " R_f ";
 σ_P desvio padrão das taxas de retorno do *portfolio* "P"
 (risco total).

A representação gráfica das linhas que unem *portfolios* de risco com o ativo livre de risco é apresentada na Figura 6. Conforme apresentado essa figura, o índice de performance de Sharpe é o coeficiente angular das retas de regressão das combinações dos *portfolios* "P" e "Q" com o ativo livre de risco " R_f ". Quanto maior o valor do índice de Sharpe, melhor a performance do *portfolio*. Assim, o *portfolio* "P" é preferível ao *portfolio* "Q" por apresentar um índice de Sharpe maior. Dessa forma, para qualquer nível de risco, o *portfolio* "P" sempre irá apresentar um retorno maior que o *portfolio* "Q".

Figura 6 – Representação gráfica do índice de *performance* de Sharpe



Fonte: Adaptado de Francis e Archer (1991, p. 655).

Dessa forma, o índice de performance de Sharpe pode ser usado para medir performance passada de investimentos com as equações apresentadas anteriormente ou mesmo serem utilizados para prever a performance futura e seleção de carteiras de investimentos. Outra forma de aplicação é na comparação de resultados previstos e realizados de carteiras de investimentos, permitindo analisar a efetividade do processo de seleção de ativos na criação de carteiras de investimentos.

3 METODOLOGIA

3.1 População e Amostra

Quando se deseja estudar características existentes em um determinado grupo de elementos, pode-se fazer isto ao verificar a característica em cada um de seus elementos ou, quando isto não for viável, analisar uma parte menor deste grupo de forma que seja representativa e considerar que estas observações representam as características do grupo como um todo. O conjunto definido de elementos que possuem determinadas características denomina-se população ou universo e o subconjunto do universo usado para se estimar ou estabelecer as características chama-se de amostra (GIL, 2002).

A população da pesquisa é composta por todos os títulos de empresas brasileiras de capital aberto negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBOVESPA). Por questões de viabilidade prática para obtenção e tratamento dos dados, são considerados os títulos de empresas que pertencem ao IBOVESPA, definido como:

O valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações constituída em 02/01/1968, a partir de uma aplicação hipotética. [...] Dessa forma, o índice reflete não apenas as variações dos preços das ações, mas também o impacto da distribuição dos proventos, sendo considerado um indicador que avalia o retorno total de suas ações componentes (BOVESPA, 2011).

Assim, o IBOVESPA atualmente é composto por 66 ações de empresas brasileiras negociadas na BM&FBOVESPA que possuem os maiores volumes financeiros e número de negócios realizados. Quanto maiores os volumes negociados, maior a participação da ação neste índice, cuja composição é alterada a cada quatro meses. Além disso, este índice normalmente é utilizado como referência de desempenho do mercado de ações e tem sua cotação divulgada diariamente na mídia falada e escrita.

3.2 Dados: Tipos, Coleta e Tratamento

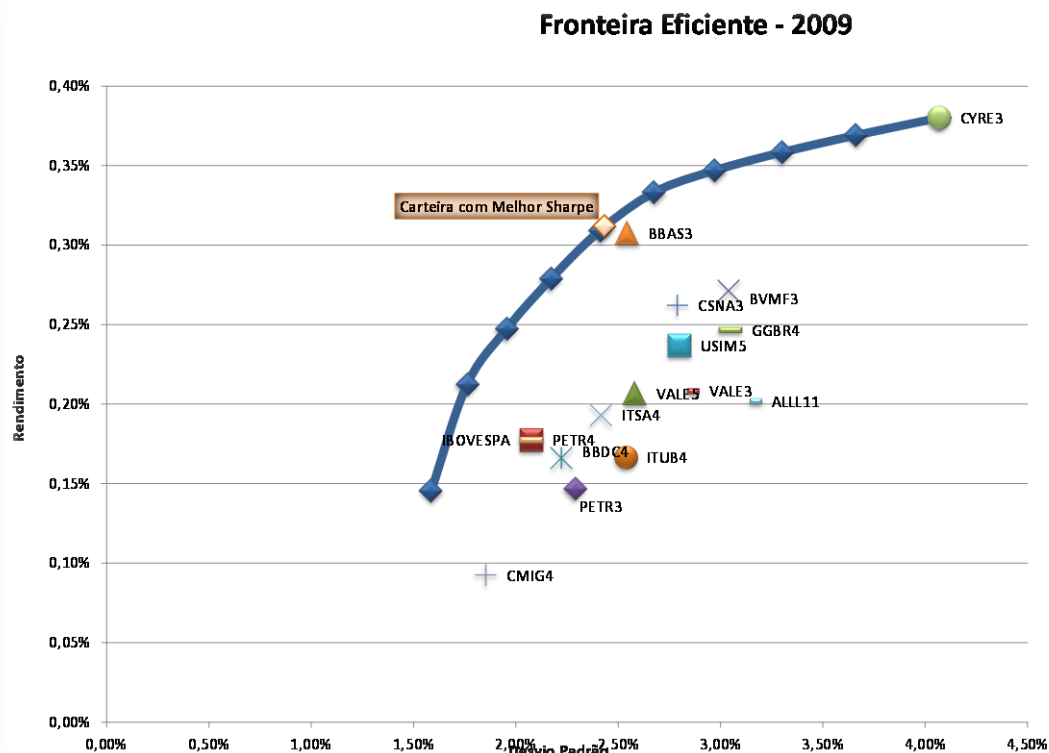
A partir da composição do IBOVESPA de janeiro a abril de 2009 (com um total de 66 ativos), foi feita a seleção das 15 ações⁵ com maior participação no índice, totalizando mais de 66% da composição total. Foi desconsiderada somente as cotações da ação UBBR4 (Unibanco), pois ela deixou de ser negociada em 31/03/2009 em função da aquisição do Unibanco pelo Itaú. Nas datas em que não havia cotação dos ativos (como fins de semana e feriados), estas foram desconsideradas. Apesar da ação ALL11 (América Latina Logística) ter negociação somente até o dia 22 de outubro de 2010, preferiu-se mantê-la na base e repetir o valor da última cotação nos últimos dias do ano, pois não teria como prever o seu encerramento de negociação ao final de 2009, período base para elaboração da carteira estimada para 2010.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A partir das cotações das 15 ações selecionadas do IBOVESPA em 2009, foi gerada a fronteira eficiente dessas ações, bem como a carteira com o melhor índice de Sharpe em 2009. A distribuição dos rendimentos e desvios padrão das ações em 2009, bem como da fronteira eficiente e da carteira com melhor índice de Sharpe, estão apresentadas na Figura 7.

⁵ Além de 15 ações ser o número máximo indicado para compor o portfólio, segundo a teoria apresentada anteriormente, percebe-se que as demais ações tem pequena representação no índice (menor que 1,4% individualmente).

Figura 7 – Rendimento médio e desvio padrão da Fronteira eficiente da amostra em 2009

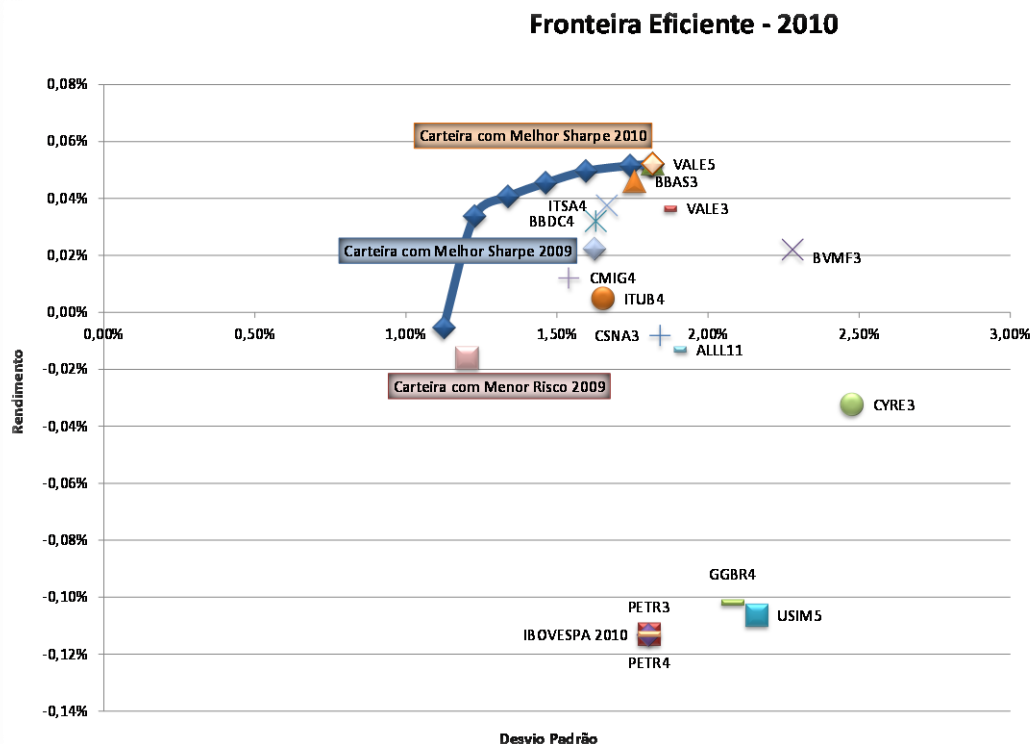


Percebe-se pela Figura 7 que a fronteira eficiente gerada, parte de uma carteira de menor risco (retorno esperado de 0,15% e desvio padrão de 1,59%) chegando até uma carteira composta 100% pela ação CYRE3, com maiores rendimento esperado e desvio padrão (0,38% e 4,07% respectivamente). Pode-se também observar que a carteira de menor risco tem um desvio padrão menor até mesmo que a ação CMIG4, com desvio padrão de 1,85%, confirmando o efeito positivo da composição de uma carteira com o objetivo de minimizar o risco. As composições de cada uma das carteiras e das ações estão apresentadas no apêndice deste trabalho. A carteira que teria a melhor performance, segundo o índice de Sharpe, seria a carteira representada em destaque na fronteira eficiente, próximo à ação BBAS3. Ela tem o rendimento esperado de 0,31% e o desvio padrão de 2,43%.

A partir da composição dessa carteira com melhor índice de Sharpe e da composição com menor risco previsto, foi feita uma comparação com o desempenho das ações, da fronteira eficiente da carteira com melhor índice de Sharpe com os dados das ações em 2010. Ou seja, buscou-se responder à pergunta: quais as performances das carteiras de melhor índice de Sharpe e da carteira de menor risco em 2009 se um investidor apostasse na composição dessas carteiras em 2010, comparando-se à performance real do IBOVESPA e das carteiras de melhor índice de Sharpe e de menor risco em 2010?

Pode-se observar na Figura 8 que mesmo sendo um ano onde o IBOVESPA teve um retorno médio diário negativo (-0,11%) e um desvio padrão de 1,80% (muito próximo das ações PETR3 e PETR4), a carteira de menor risco em 2009 teria um desempenho superior em termos de rendimento médio e risco (-0,02% e 1,2% respectivamente) em relação ao IBOVESPA. Se compararmos ao desempenho da carteira com melhor índice de Sharpe em 2009, percebe-se que essa carteira teria um retorno médio diário positivo em 2010 (0,02%), bem superior à maior parte das ações que compõem a amostra, e um risco de 1,63%, somente superior à da ação CMIG4 (1,54%), além de um desempenho geral bem superior ao índice IBOVESPA em 2010 (rendimento médio diário de -0,11% e desvio padrão de 1,80%).

Figura 8 – Rendimento médio e desvio padrão da Fronteira eficiente da amostra em 2010



Assim, mesmo considerando que em 2009 houve um grande aumento nos valores das ações enquanto que 2010 foi um ano onde o mercado de ações teve um comportamento estável (considerando o indicador IBOVESPA, este passou de 40.244 pontos para 68.588 em 2009, terminando em 69.304 pontos em 2010), as carteiras geradas com os dados de 2009 com o menor risco e com o melhor índice de Sharpe teriam comportamentos próximos aos esperados em 2010: a primeira tendo um risco menor que a maioria das ações e das carteiras teóricas possíveis com as ações da amostra e a segunda com um desempenho superior à maioria das ações e visualmente não muito distante da fronteira eficiente de 2010.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentada nesse trabalho a base que está por trás da teoria de Markowitz na criação de carteiras eficientes de ações, bem como se faz para estimar o índice de Sharpe para avaliar o desempenho de carteiras e de ações. Também foi apresentado que, apesar de haver eventos que podem influenciar diretamente no mercado de ações e que não podem ser previstos estatisticamente, os modelos matemáticos que consideram dados históricos passados para a criação de carteiras com o objetivo de criar carteiras que tenham bons desempenhos no futuro, continuam sendo considerados pelos economistas.

Baseado no modelo de Markowitz, foram criadas carteiras teóricas das 15 principais ações componentes do índice IBOVESPA em 2009 e usados os dados dos valores das ações para avaliar qual seria o desempenho dessas carteiras em 2010. Os comportamentos dessas carteiras seriam realizados em 2010 de forma muito próxima aos previstos, tendo a carteira de menor risco em 2009 um risco baixo em 2010 (se comparada às ações da amostra) e a carteira com melhor índice de Sharpe em 2009 um desempenho superior à maioria das ações da amostra.

Não é possível atestar a eficiência do modelo de Markowitz para a criação de carteiras eficientes somente com esse exemplo, mas é possível perceber que o comportamento nesse caso foi muito

próximo ao previsto. Como sugestão de próximos trabalhos, poderiam ser feitas análises considerando períodos menores (como semestres, trimestres e até mesmo meses, ao invés de dados de um ano inteiro) para avaliar o comportamento do algoritmo nesse mesmo período ou em outros períodos onde houve situações externas que influenciaram o mercado de ações.

REFERÊNCIAS

BOVESPA – BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO. *BOVESPA*. Disponível em: <http://www.bovespa.com.br>. Acesso em: 20 set. 2011.

COSTA, O.; ASSUNÇÃO, H. *Análise de Risco e retorno em investimentos financeiros*. Barueri: Manole, 2005.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. São Paulo: Atlas, 2004.

FISHER, L.; LORIE, J. H. Some studies of variability of returns on investments in common stocks. *Journal of Business*, p. 99-134, 1970.

FRANCIS, J. C. *Investments: Analysis and Management*. (5a ed.). McGraw-Hill, 2001.

FRANCIS, J. C.; ARCHER, S. H. *Portfolio Analysis* (2ª ed.). Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.

GITMAN, L. J.; JOEHNK, M. D. *Princípios de Investimentos*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005.

JORION, P. *Value at risk: a nova fonte de referência para o controle de risco de mercado*. São Paulo: BM&F, 1998.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, v. 7, 77-91, 1952.

MARKOWITZ, H. M. *Portfolio Selection: Efficient diversification of investments*. Nova York: John Wiley, 1959.

MAU, R. R. Back to the Basics: A Process for Managing Portfolio Risk. *International Journal of Economics and Finance*, v. 1, n. 2, p. 12-20, 2009.

SECURATO, J. R. *Decisões financeiras em condições de risco*. São Paulo: Atlas, 1996.

TOSTA DE SÁ, G. *Administração de investimentos: teoria de carteiras e gerenciamento de riscos*. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1999.

VINCE, R. *Cálculo e análise de riscos no mercado financeiro*. São Paulo: Makron Books, 1999.

APÊNDICE

Tabela A - Carteiras geradas com os dados das ações em 2009 Tabela B - Carteiras geradas com os dados das ações em 2010

	Retorno Esperado	Desvio Padrão	PETRA4	VALES	BVMF3	BBDC4	ITUB4	CSNA3	VALE3	GGBR4	PETR3	USIM5	BBA33	ITSA4	CMIG4	ALL11	CYRE3	Total	Desvio Padrão	Índice de Sharpe
Carteira 1	-0,01%	1,12%	2,27%	0,00%	0,00%	9,49%	0,00%	0,39%	0,00%	0,00%	14,29%	0,23%	14,08%	4,81%	37,75%	16,70%	0,00%	100,00%	1,12%	(0,0270)
Carteira 2	0,03%	1,23%	0,00%	24,39%	0,00%	0,86%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	23,76%	14,24%	36,32%	0,00%	0,00%	100,00%	1,23%	0,0017
Carteira 3	0,04%	1,34%	0,00%	38,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	28,75%	18,89%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	1,34%	0,0117
Carteira 4	0,05%	1,46%	0,00%	48,07%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	33,68%	10,85%	7,41%	0,00%	0,00%	100,00%	1,46%	0,0140
Carteira 5	0,05%	1,60%	0,00%	60,63%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	39,18%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	1,60%	0,0154
Carteira 6	0,05%	1,74%	0,00%	90,61%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	9,39%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	1,74%	0,0152
Carteira 7	0,05%	1,81%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	1,81%	0,0149
Carteira 8	0,05%	1,81%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	2,08%	0,0149
Carteira 9	0,05%	1,81%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	2,27%	0,0149
Carteira 10	0,05%	1,81%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	2,48%	0,0149
Carteira com Melhor Sharpe 2010	0,05%	1,81%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	1,81%	0,0149
IBOVESPA 2010	-0,11%	1,80%																		
Carteira com Melhor Sharpe 2009	0,02%	1,63%	0,00%	0,00%	11,15%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	5,19%	66,96%	0,00%	0,00%	0,00%	16,69%	100,00%	2,43%	(0,0017)
Carteira com Menor Risco 2009	-0,02%	1,20%	26,66%	0,00%	0,00%	5,75%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	12,15%	0,00%	55,44%	0,00%	0,00%	100,00%	1,58%	(0,0341)

	Retorno Esperado	Desvio Padrão	PETRA4	VALES	BVMF3	BBDC4	ITUB4	CSNA3	VALE3	GGBR4	PETR3	USIM5	BBA33	ITSA4	CMIG4	ALL11	CYRE3	Total	Desvio Padrão	Índice de Sharpe
Carteira 1	0,15%	1,59%	26,66%	0,00%	0,00%	5,75%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	12,15%	0,00%	55,44%	0,00%	0,00%	100,00%	1,59%	0,0759
Carteira 2	0,21%	1,76%	12,70%	0,00%	3,45%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	5,41%	39,66%	0,00%	35,33%	0,00%	3,45%	100,00%	1,76%	0,1054
Carteira 3	0,25%	1,96%	2,70%	0,00%	6,41%	0,00%	0,00%	1,38%	0,00%	0,00%	0,00%	6,11%	49,49%	0,00%	25,71%	0,00%	8,21%	100,00%	1,96%	0,1137
Carteira 4	0,26%	2,17%	0,00%	0,00%	8,77%	0,00%	0,00%	1,59%	0,00%	0,00%	0,00%	5,84%	57,93%	0,00%	13,68%	0,00%	12,19%	100,00%	2,17%	0,1169
Carteira 5	0,31%	2,41%	0,00%	0,00%	11,06%	0,00%	0,00%	0,91%	0,00%	0,00%	0,00%	5,17%	65,82%	0,00%	0,90%	0,00%	16,14%	100,00%	2,41%	0,1179
Carteira 6	0,33%	2,68%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	64,40%	0,00%	0,00%	0,00%	35,60%	100,00%	2,68%	0,1152
Carteira 7	0,35%	2,97%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	29,50%	0,00%	0,00%	0,00%	54,50%	100,00%	2,97%	0,1083
Carteira 8	0,36%	3,30%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	45,80%	0,00%	0,00%	0,00%	70,10%	100,00%	3,30%	0,1010
Carteira 9	0,37%	3,66%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	15,02%	0,00%	0,00%	0,00%	84,98%	100,00%	3,66%	0,0939
Carteira 10	0,39%	4,07%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	4,07%	0,0873	
Carteira com Melhor Sharpe	0,31%	2,43%	0,00%	0,00%	11,15%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	5,19%	66,96%	0,00%	0,00%	0,00%	16,69%	100,00%	2,43%	0,1179