

Análisis de la difracción por elementos cuadrados

Artículo Corto - Fecha de recepción: 15 de agosto de 2012 - Fecha de aceptación: 3 de septiembre de 2012

Óscar Babilonia

Físico, Universidad del Atlántico. Barranquilla, Colombia, oscar-babilonia@hotmail.com

Sonia Valbuena

Magíster en Matemáticas y Educación, Corporación Universidad de la Costa - CUC. Barranquilla, Colombia, svalbuen1@cuc.edu.co

Francisco Racedo

Doctor en Ciencias e Ingeniería Eléctrica, Universidad del Atlántico. Barranquilla, Colombia, fracedo1@hotmail.com

RESUMEN

En este trabajo se utilizó la relación de Fresnel para la difracción y se implementó el método de la transformada rápida de Fourier (FFT) para analizar la propagación de un frente de onda plano y monocromático al pasar por diferentes tipos de rendijas. Se simuló en Matlab y el patrón de difracción se proyectó en un plano de observación. Se realizó un estudio del patrón de difracción y la irradiancia en función de la distancia al plano de observación. También se dispusieron las rendijas de tal manera que se observara el fenómeno de interferencia de Young y su evolución en función de la distancia.

Palabras clave

Difracción, irradiancia, propagación, Transformada rápida de Fourier.

Diffraction analysis for square elements

ABSTRACT

For this paper, Fresnel diffraction equation was used and fast Fourier transform (FFT) method was implemented to analyze flat monochromatic wave front propagation through different types of slits. A Matlab simulation was performed and the diffraction pattern was projected in an observation plane. In this Matlab simulation, diffraction pattern and irradiance were studied based on the distance to the plane of observation. Slits were also arranged so Young's interference phenomenon and its evolution, depending on the distance, could be observed.

Keywords

Diffraction, irradiance, propagation, Fast Fourier Transform (FFT).

INTRODUCCIÓN

La difracción juega un papel importante en muchas aplicaciones ópticas. Esta es un factor fundamental para aplicaciones que involucren alta resolución o las largas distancias de propagación como el radar láser, y en las aplicaciones de la participación de las pequeñas estructuras como los procesos de fotolitografía. Las ecuaciones que describen este fenómeno son muy difíciles de solucionar analíticamente, por lo que el uso de la computadora ayuda a desarrollar las soluciones de las expresiones integrales con ayuda del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés). Con esta ayuda se ha llegado a desarrollar métodos eficientes para la solución de diferentes tipos de problemas en la óptica electromagnética. Uno de los problemas más comunes en óptica se presenta cuando queremos propagar una radiación en estructuras que poseen dimensiones geométricas comparables a la longitud de onda de la radiación utilizada. Aquí es cuando ocurre el fenómeno de la difracción. Dentro de este campo se han realizado estudios con estructuras con geometrías circulares ya que las fibras ópticas presentan esta geometría [1]-[3]. Unos pocos estudios se han realizado en otros tipos de geometrías como las rectangulares y cuadradas [4], [5], pero muy pocos en función de la distancia al plano de observación [6], [7]. Este estudio es importante debido a que da información de cuál es la distancia apropiada para focalizar el spot de un láser en la entrada de una estructura de confinamiento cuántico como lo es una guía de onda, un modulador electro-óptico

o un *swich* óptico y su posible patrón de difracción. Se usa el entorno de programación en Matlab ya que es una buena herramienta para simulación de aplicaciones de óptica de Fourier debido a que brinda la facilidad de trabajar con vectores y matrices, ofreciendo la opción de trabajar en más de una dimensión, ayudando a visualizar situaciones de problemas físicos como el aquí estudiado. Este enfoque permitirá una conexión clara entre el mundo físico que está siendo modelado y el código en el equipo. Cabe destacar que el medio donde se propaga la onda que se analizará será un medio lineal, homogéneo, isotrópico y no magnetizado.

MARCO TEÓRICO Y ANÁLISIS

La transformada de Fourier

Muchos de los problemas en la óptica son bidimensionales, por lo que es necesario conocer la transformada de Fourier de una función bidimensional $g(x, y)$; esta se encuentra definida como:

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad (1)$$

Donde $G(f_x, f_y)$ es la transformada, f_x y f_y son las frecuencias de las variables asociadas x, y , respectivamente y se abrevia de la forma $\mathfrak{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, y la transformada inversa está dada por:

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad (2)$$

Escrita en notación la ecuación (2) queda:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = g(x, y) \quad (3)$$

Para realizar la transformada de Fourier de la función $g(x, y)$ debe satisfacer las siguientes condiciones: 1) g debe ser integrable en todo el rango de x y y ; 2) g debe tener un número finito de discontinuidades; y 3) g debe ser univaluada.

Esta transformada cumple propiedades y teoremas como: linealidad, desplazamiento en el tiempo, desplazamiento en frecuencia, entre otros. Un teorema importante es el de **convolución**, que se define de la siguiente manera:

$$\mathfrak{F}\left\{\iint g(\xi, \eta)h(x - \xi, y - \eta)d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y)H(f_x, f_y) \quad (4)$$

Donde $G(f_x, f_y)$ y $H(f_x, f_y)$ son las transformadas de las funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$, respectivamente; es decir, podremos resolver la integral del producto de dos funciones solo con saber las transformadas de cada una de esas funciones. Esta relación es la que permite resolver las integrales encontradas en la ecuación de difracción que se emplean en el análisis de dicho fenómeno.

Discretización de la función y transformada discreta de Fourier (DFT)

La radiación incidente, su longitud de onda y las dimensiones geométricas de la rendija representarán el comportamiento de la radiación incidente y la proyectada usadas en el fenómeno de difracción, pero se hace necesario discretizar estas funciones para poder implementar la FFT, debido a que este método utiliza como kernel la DFT;

para esto se representarán las funciones por medio de vectores (para una dimensión) y matrices (para dos dimensiones); para optimizar los resultados se debe tener cuidado en la discretización de las funciones, para esto se usa el concepto de **ancho de banda efectiva** para determinar qué número de intervalos tendrá la función discreta. Cabe destacar que entre mayor sea el número de intervalos mejor será la aproximación, pero la velocidad de procesamiento y la capacidad de memoria del computador limita la escogencia del mismo. Una aproximación aceptable es usar el 98% de la información que lleva la función, o análogo a esto, se encuentra el ancho de banda efectivo para que la función represente el 98% de la potencia que posee la radiación, lo cual se logra utilizando la relación de Parseval:

$$P_T = \iint_{-\infty}^{\infty} \left|g\left(\frac{x}{2w}, \frac{y}{2w}\right)\right|^2 dx dy \quad (5)$$

Donde w es el factor que determina el ancho de banda efectivo, el factor a integrar se conoce como **irradiancia** y P_T es la potencia del sistema.

Después de encontrar el ancho de banda efectivo se discretiza la función, quedando de la siguiente manera:

$$g(x, y) \rightarrow g(m\Delta x, n\Delta y) \quad (6)$$

Donde m y n son dos vectores que poseen la dirección de Δx y Δy , respectivamente; la magnitud de cada uno de estos y de Δx y Δy dependerán del ancho de banda encontrado; $Lx = m\Delta x$ y $Ly = n\Delta y$ son las longitudes del área de muestreo de la función, en nuestro caso las dimensiones del *slit*,

permitiendo trabajar con las transformadas de Fourier de funciones discretas o DFT.

La Fig. 1 muestra de manera gráfica el proceso de convoluir una representación continua en una discreta, mostrándose el hecho de que al aumentar la discretización, es decir aumentar el número de puntos, se obtiene una mejor “imagen” de la función continua. El proceso inverso es posible si se reemplazan las siguientes expresiones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dx dy \rightarrow \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=M/2}^{M/2-1} \dots \Delta x \Delta y \quad (7)$$

Donde M y N corresponden al número de componentes (menos uno) que poseen los vectores m y n .

Difracción utilizando la teoría de Fresnel

Considerando la propagación de un haz de luz monocromático a través de un plano

que posee una abertura (plano fuente), se puede observar el fenómeno de difracción proyectado en un segundo plano (plano de observación) (Fig. 2). El comportamiento de dicha imagen depende de la configuración del plano fuente (rendija), de la longitud de onda y de la distancia a la cual se encuentre un plano del otro (distancia de propagación).

Existen muchas expresiones que proporcionan esta relación [8], [9], pero todas son muy difíciles de resolver ya que implican integrales dobles y se debe tener en cuenta diferentes factores como los antes mencionados.

Si se utiliza la relación de Fresnel esta es una herramienta poderosa que ofrece ventajas ya que se puede utilizar el teorema de convolución para determinar la solución de dicha ecuación. La relación es la siguiente:

$$U_2(x, y) = \iint U_1(x, y) \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right] \quad (8)$$

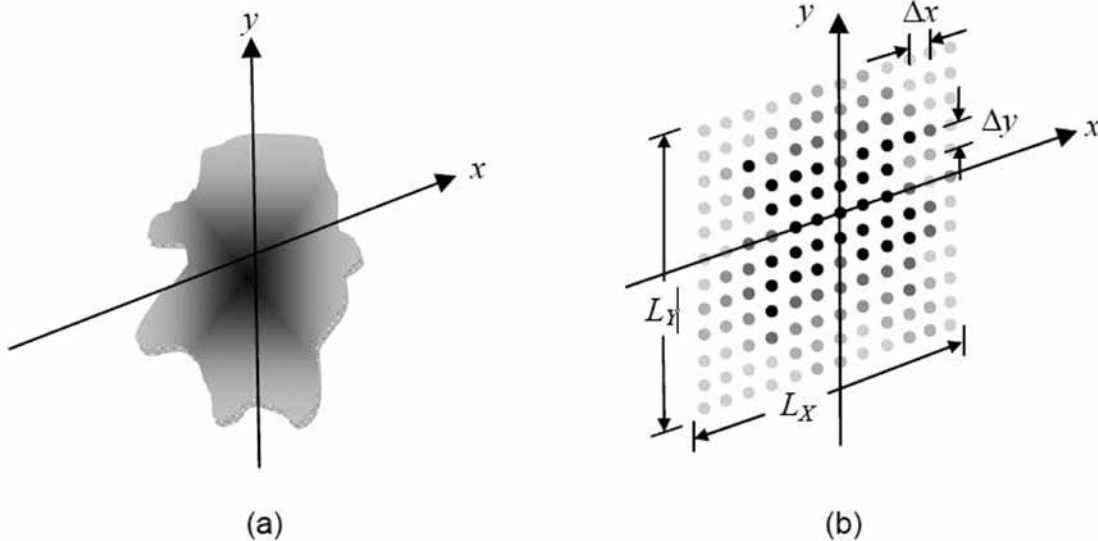


Fig. 1 Función de dos dimensiones: a) continua, b) discreta

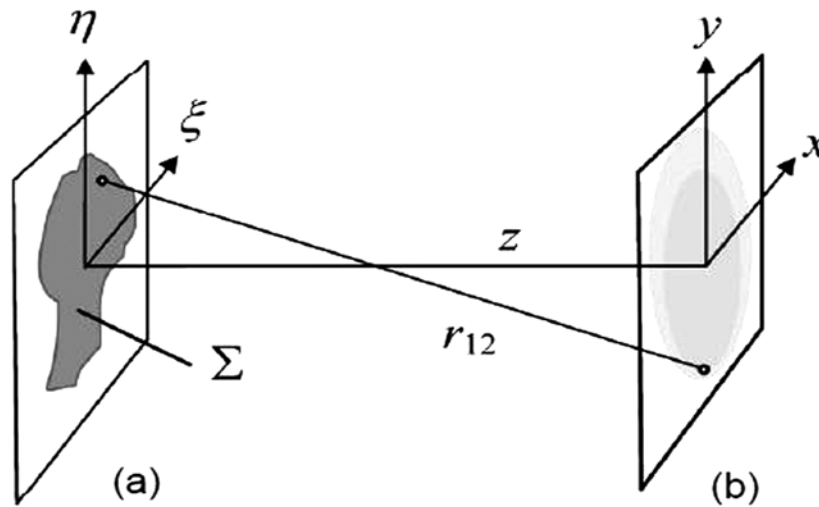


Fig. 2 Propagación de la luz a través de un plano fuente (a) que se ve difractada en un plano de observación (b)

Aplicando el teorema de convolución queda:

$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{U_1(x, y)\}\mathfrak{F}\{h(x, y)\}\} \quad (9)$$

Donde $U_1(x, y)$ es la configuración de la rendija, $h(x, y)$ es llamada la respuesta de impulso y es la expresión que multiplica a $U_1(x, y)$ en la ecuación (8) y $U_2(x, y)$ es el patrón observado en el plano de observación [9], [10].

Notemos que la solución del problema objeto de estudio se simplifica drásticamente pues la solución solo dependerá de encontrar las transformadas mostradas en la ecuación (9) y esto es relativamente fácil utilizando algoritmos que incluyan la FFT.

Con el método propuesto arriba se procede a implementarlo para su uso en tres clases de rendijas: una circular, una cuadrada y dos círculos equidistantes, con el objeto de, en el primer caso, comparar los resultados

con los reportados en la literatura y observar la fortaleza del programa desarrollado. El segundo caso en rendijas cuadradas (o rectangulares) es el objeto de estudio del presente trabajo y en el tercer caso es para observar el alcance y robustez del programa para estudio y aplicación a nuevas configuraciones de fibras ópticas como son las fibras de cristal fotónico. En este sentido, se realizó un programa que guarda las configuraciones de las rendijas en tres archivos .m en Matlab, que se ven como lo muestran las Fig. 3, 5 y 6.

Después se introdujeron los valores del tamaño de la longitud $Lx = Ly = 0,1\mu m$, la longitud de onda de la radiación $\lambda = 0,5 \times 10^{-6}m$ y la longitud de propagación variando entre 0 y 5000 (m). Los resultados para longitudes de propagación para z iguales a 300, 1500, 3000, 6000 (m) se muestran respectivamente en la Fig. 4 para los tres tipos de rendijas analizadas.

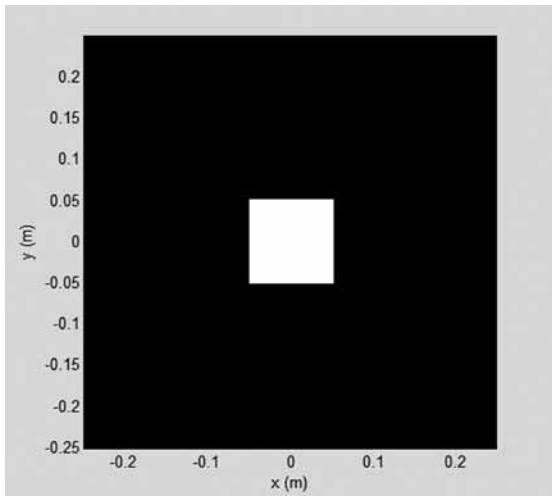
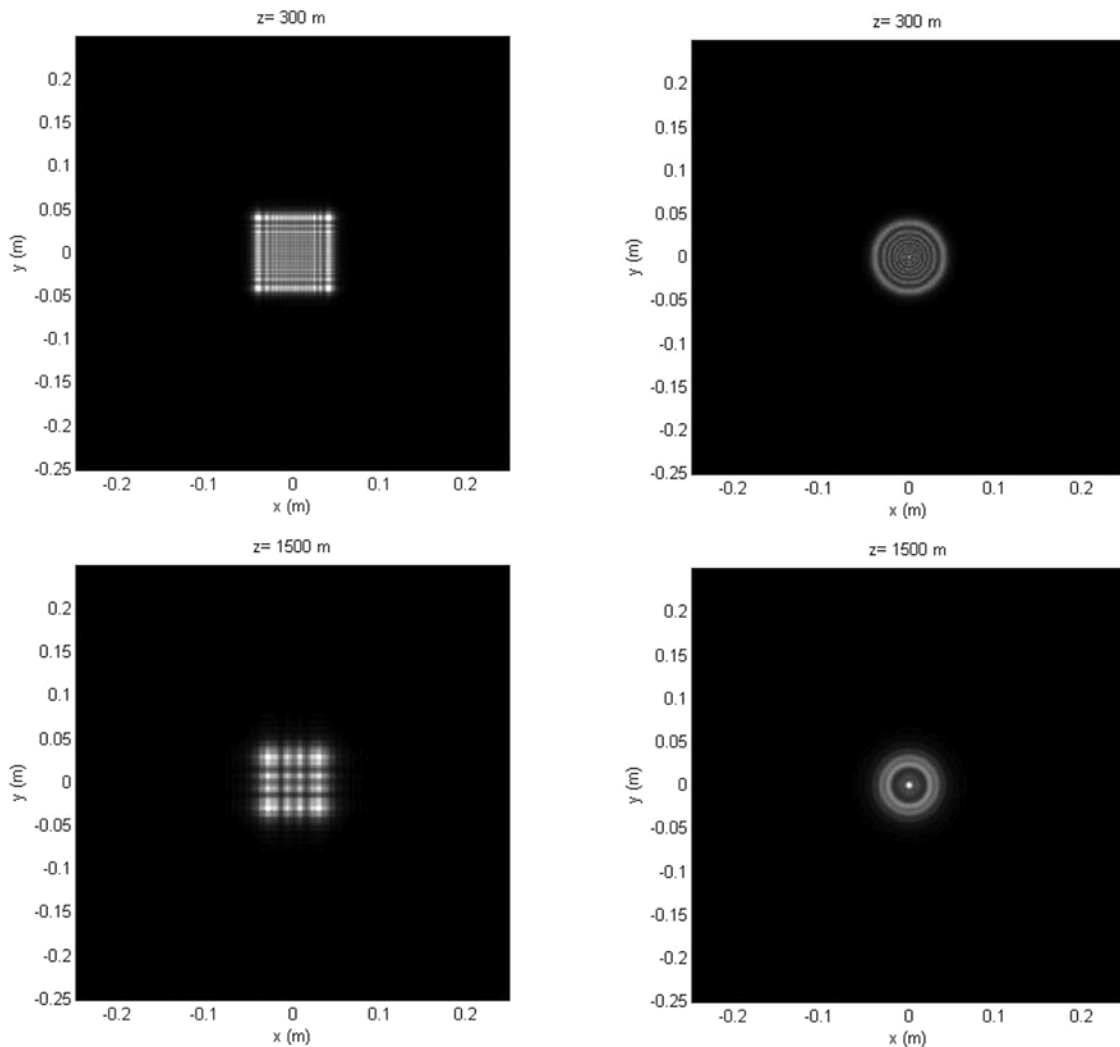
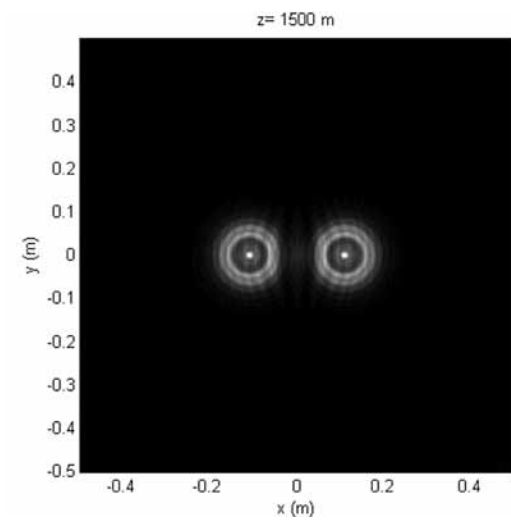
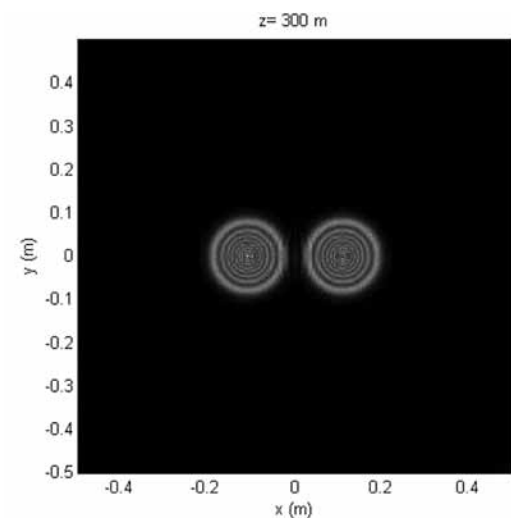
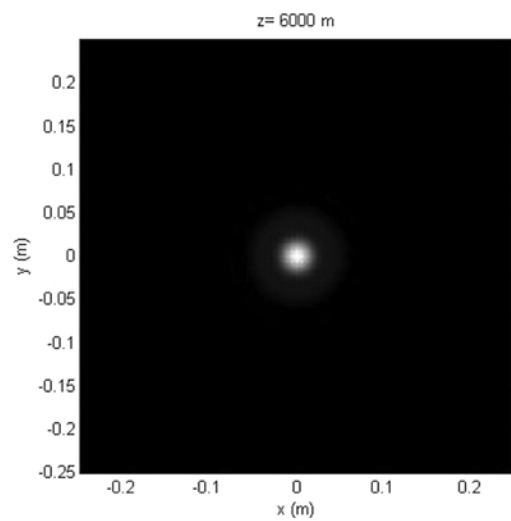
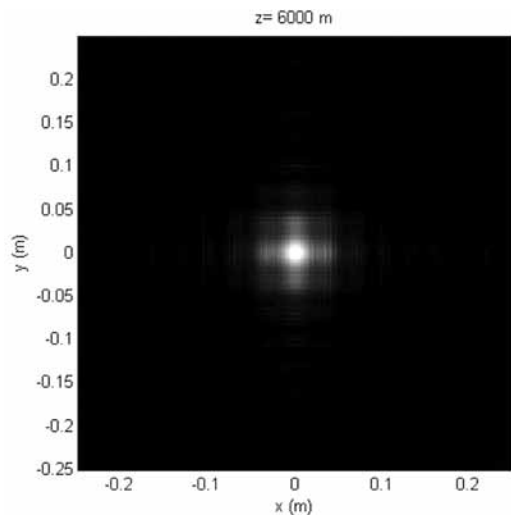
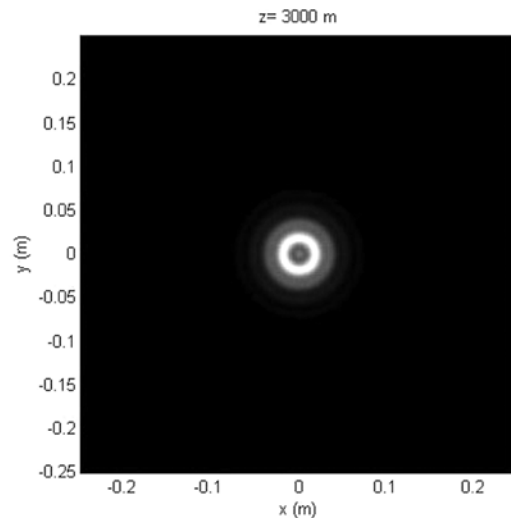
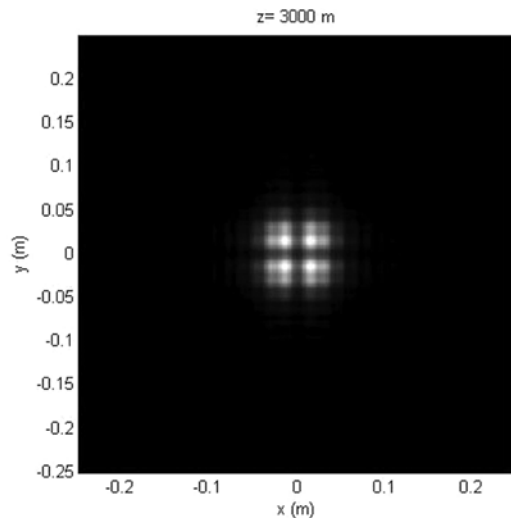


Fig. 3 Rendija cuadrada para el plano de observación

Las imágenes mostradas en la columna izquierda corresponden a la difracción de una rendija con forma de un círculo mientras que las mostradas en la columna derecha corresponden a dos círculos equidistantes, donde se observa el comportamiento para diferentes longitudes de propagación.

Las rendijas son las siguientes:





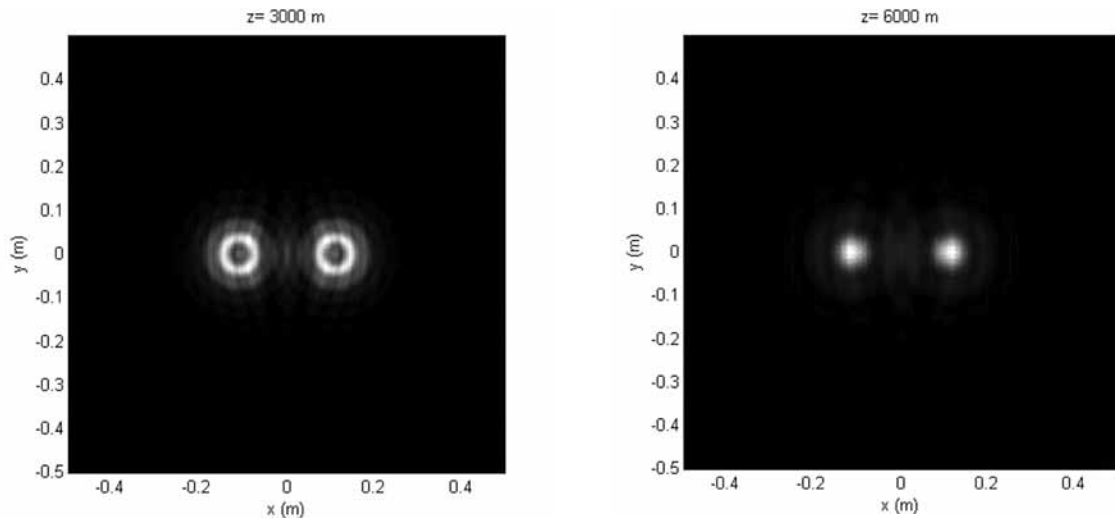


Fig. 4 Las figuras mostradas corresponden a la difracción de las rendijas señaladas en las Fig. 5 y 6

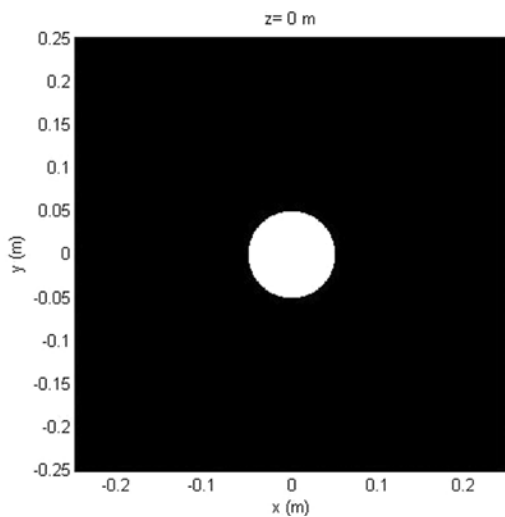


Fig. 5. Rendija circular para la difracción mostrada en la columna izquierda de la página anterior para diferentes valores de z

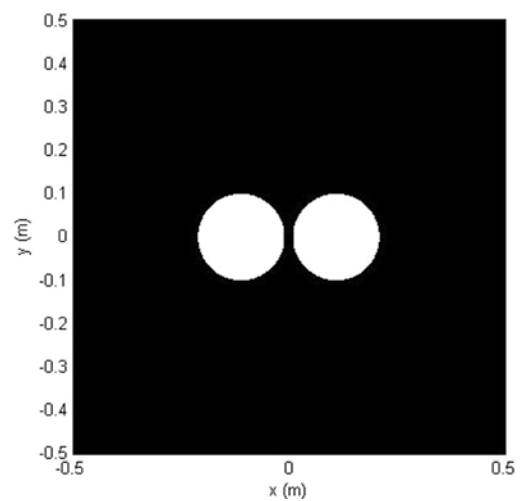


Fig. 6. Rendija de dos círculos para la difracción mostrada en la columna derecha de la página anterior para diferentes valores de z

Esta última rendija da la posibilidad no solo de analizar el fenómeno de difracción sino también el de interferencia en estructuras fotónicas, como se observa en el patrón obtenido para 3000 y 6000 m. Esto mostraría, en principio, un acoplamiento constructivo entre las dos ondas que viajan a lo largo de las cavidades para la longitud de onda estu-

diada. En el caso de la rendija cuadrada estudiada se observa una fuerte difracción para pequeñas distancias, en torno de los 300 m, y con tendencia a disminuir este efecto cerca a los 6000 m. Esto en principio permite el poder justificar porqué muchas imágenes se observan ruidosas cuando son obtenidas a “cortas” distancias, justificando porqué

todavía se debe trabajar en el desarrollo de algoritmos de filtrado y adquisición de imágenes y/o señales. El efecto difractivo se hace menos notorio para distancias mayores aunque se pierde intensidad en la señal, lo que dificulta la reconstrucción de la imagen y/o señal. Si se comparan los resultados obtenidos con la rendija circular y la cuadrada, se puede concluir que este último tipo de rendijas ofrece la ventaja de poder describir con mayor detalle los efectos de borde del elemento difractor y así tener una mejor forma de reconstruir la imagen que pasa por el objeto.

CONCLUSIONES

Implementar la transformada de Fourier junto con el teorema de convolución a este tipo de problemas permite obtener una herramienta poderosa que brinda la opción de observar y analizar los resultados predichos por la teoría de difracción de Fresnel. En todos los casos se observa que a menor distancia el patrón de difracción consigue definir de alguna manera el elemento difractor, siendo así muy parecida la rendija y el patrón, salvo por las líneas nítidas observadas en sus orillas. Lo que permite poder escoger cuál tipo de rendija es mejor en una determinada aplicación. Pero a distancias mayores, en el caso de la rendija cuadrada, se encuentra que la radiación en su mayor parte está ubicada en forma de cruz, pero en general a estas distancias grandes se encuentra que el valor máximo de la irradiancia estará ubicado en la zona central patrón. Este desarrollo da paso a una futura investi-

gación que consiste en comparar los resultados obtenidos por medio de este método con resultados experimentales y deducir si dicha teoría, que es una aproximación, es o no compatible con los resultados experimentales.

ANEXOS

El método fue implementado con un archivo .m llamado *propTF*, de la siguiente manera:

```

1 function[u2]=propTF(u1,L,lambda,z);
2 [M,N]=size(u1);
3 dx=L/M;
4 k=2*pi/lambda;

5 fx=-1/(2*dx):1/L:1/(2*dx)-1/L;
6 [FX,FY]=meshgrid(fx,fx);

7 H=exp(-j*pi*lambda*z*(FX.^2+FY.^2));
8 H=fftshift(H);
9 U1=fft2(fftshift(u1));
10 U2=H.*U1; %multiply
11 u2=ifftshift(ifft2(U2));
12 end

```

En las líneas 7-11 es donde se encuentra la aplicación del teorema de convolución propuesto en la ecuación número (9).

REFERENCIAS

- [1] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2a. Ed., McGraw-Hill, 1996.
- [2] C. A. Bennett, *Principles of Physical Optics*, Wiley, Hoboken, NJ, 2008.
- [3] D. Voelz, "Computational Fourier optics", *SPIE Press*, 2011.

- [4] C. Lemmi, Notas para su curso de *óptica de Fourier*, 2011.
- [5] O. K. Ersoy, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*, Wiley-Interscience, 2012.
- [6] E. Brigham, *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice-Hall, 2011.
- [7] E. Hecht, *Optics*, 4th. Ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 2002.
- [8] J. D. Schmidt, “Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in Matlab®”, *SPIE Press*, Bellingham, WA, 2010.
- [9] M. C. Casado Fernández, *Manual básico de Matlab*. Edit. Complutense, Madrid, 2009.
- [10] A. Gilat, *Introducción a Matlab con ejemplos prácticos*, 2a. Edición, Reverté, 2005.

