Formulación generalizada del proceso de elementos finitos

El método de los elementos finitos es la herramienta más poderosa de que se dispone actualmente para la solución de muchos problemas de análisis en ingeniería mediante la formulación de un modelo discreto del fenómeno físico correspondiente y el uso del computador.

Es importante destacar el hecho de que varios fenómenos físicos distintos pueden representarse por el mismo modelo matemático, de modo que la obtención de resultados numéricos se lleva a cabo utilizando un mismo algoritmo.

ALFONSO RAMIREZ RIVERA
IC, DIC, MSc, PhD
Profesor de la Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

PROBLEMAS DE ANALISIS EN INGENIERIA

Los problemas de análisis en ingeniería se pueden formular bien en términos de parámetros continuos o de parámetros discretos. La formulación esencial corresponde al caso continuo, con un número infinito de valores de los parámetros y conduce a un modelo matemático expresado con ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.

La formulación en términos discretos, esto es, con un número finito de valores de los parámetros, conduce, a un modelo matemático que se puede expresar con matrices y ecuaciones algebraicas ordinarias.

La posibilidad de obtener soluciones cerradas de problemas formulados con ecuaciones diferenciales es extremadamente limitada, de modo que para resolver un problema de análisis hay que recurrir normalmente a métodos numéricos y para problemas de cierta magnitud esto implica el uso del computador.

Dado el carácter esencialmente discreto del computador electrónico digital, su empleo requiere que el problema esté formulado en términos discretos, lo cual hace necesaria la reformulación de problemas del continuo en esos términos, bien sea a partir de las ecuaciones diferenciales (series de Fourier, diferencias finitas, etc.), o directamente desde la construcción del modelo matemático.

Por otra parte, muchos problemas no pueden siquiera formularse de un modo específico con ecuaciones diferenciales involucrando las correspondientes condiciones de frontera y en dichos casos la alternativa es la construcción del modelo matemático directamente en términos discretos, y para esto la herramienta por excelencia es el método de los elementos finitos.

Hoy en día se resuelven problemas por el método de elementos finitos con más de un millón de ecuaciones simultáneas, y con el advenimiento de los computadores de la quinta generación el tamaño y la complejidad de los problemas que se van a poder resolver en el futuro es inimaginable.

La situación anterior ha traido como consecuencia que el problema de manejar las cantidades inmensas de información de entrada y salida del computador ha llegado a un punto crítico y ha estimulado el desarrollo de técnicas como el álgebra de los Formex con la cual se pueden generar automáticamente los datos de entrada a partir de la información básica del problema.

Por otra parte, aparece clara la importancia de formular los problemas de una manera rigurosa, que aproveche al máximo la capacidad del computador y las potencialidades del método, al no justificarse más el uso de los modelos matemáticos aproximados que eran necesarios cuando existía la barrera de la limitación de efectuar cálculos numéricos.

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos parte de la construcción de un modelo matemático aproximado con parámetros discretos para representar el problema físico que se trata de resolver. La esencia de su buena aplicación está en la selección apropiada del elemento básico (elemento finito) y de su correcta interconexión para construir el modelo, de modo que resulte un sistema convergente, esto es, que represente cada vez más exactamente el problema a medida que aumente el número de elementos.

El método fue propuesto inicialmente para resolver problemas de análisis estructural, pero luego su uso se ha extendido a otros campos de manera que se ha convertido en una herramienta imprescindible para la solución numérica de muchos problemas de análisis en ingeniería.

En este traba,o se presenta una formulación generalizada del problema biparamétrico, que es un esquema dentro del cual se pueden ubicar gran cantidad de problemas de análisis en una gran variedad de campos de la ingeniería.

EL PROBLEMA BIPARAMETRICO

El problema biparamétrico aparece al considerarse un fenómeno físico que se puede describir en términos de dos parámetros generalizados, que denominaremos A y B, y de tres leyes que los relacionan, a saber:

a) Una ley que deben cumplir independientemente los parámetros A: L(A).

b) Una ley que deben cumplir independientemente los parámetros B: L(B).

c) Una ley que relaciona los parámetros A con los parámetros B: L(A,B).

Una gran cantidad de problemas de análisis caben dentro de este esquema, especialmente los referentes a fenómenos estacionarios (independientes del tiempo), en campos como el análisis estático y dinámico de estructuras, la transferencia de calor, la mecánica de fluidos, la torsión, la electricidad, el magnetismo, etc.

Por ejemplo en electricidad los parámetros A y B pueden corresponder a los voltajes y las corrientes, regidos por las leyes de Kirchhoff, y relacionados mediante la ley de Ohm.

En el análisis lineal de estructuras esqueletales elásticas, los parámetros A y B son las fuerzas y los desplazamientos regidos por las condiciones de equilibrio y compatibilidad y relacionados por la ley de Hooke.

En estos y otros casos la formulación del modelo matemático y su proceso de solución es idéntico, si se hace abstracción del significado de los parámetros y de sus relaciones.

En lo que sigue se presentará el problema biparamétrico con referencia a un ejemplo

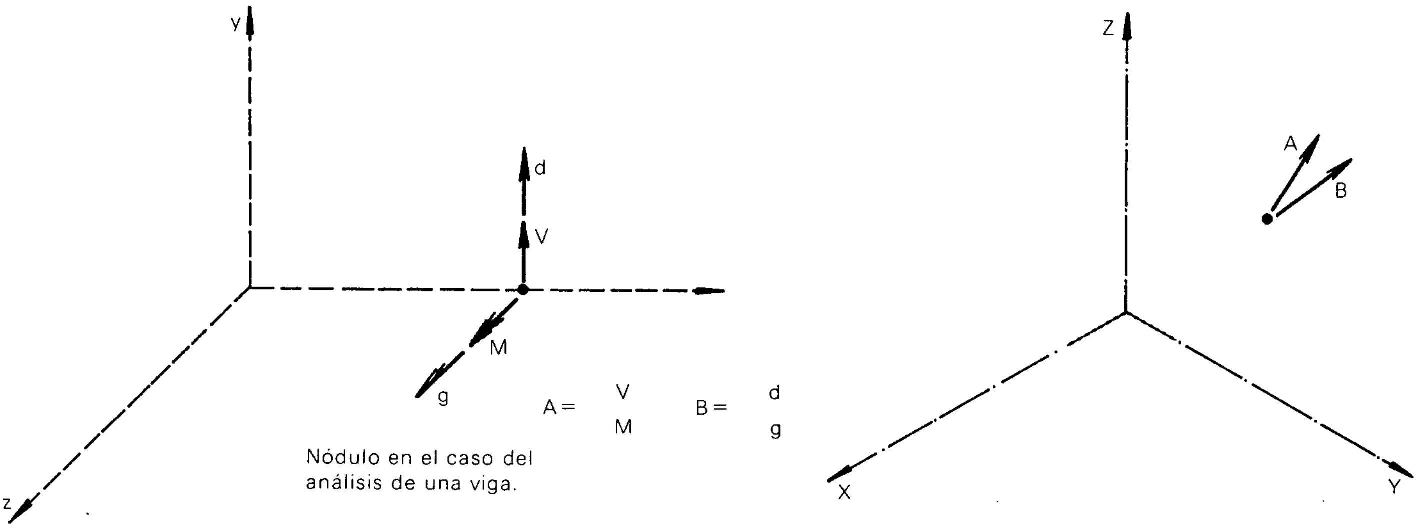

FIGURA 1. Nódulo.

sencillo de análisis estructural de una viga continua, pero teniendo en cuenta que la formulación es general y que el proceso puede aplicarse a un problema en cualquier otro campo, dándole a los parámetros el significado que corresponda.

Para la descripción del proceso de solución del problema biparamétrico introducimos las siguientes definiciones:

Nódulo. Un nódulo se define mediante dos vectores de la misma dimensión, uno con componentes paramétricos del tipo A y el otro con componentes del tipo B, en un mismo punto del espacio geométrico en el cual se plantea el problema.

La dimensión de los vectores y la clase de componentes caracteriza el tipo de problema considerado.

Como ejemplo consideramos el análisis estructural de una viga continua de elementos prismáticos, referido a un sistema de coordenadas rectangulares XYZ, con el eje de la viga en X.

El nódulo en este caso se define como un par de vectores de dos dimensiones (V, M) y (d,g) en un punto del eje de la viga, y en un plano paralelo a YZ.

Las componentes V y d están en la dirección Y y corresponden a la cizalladura resultante y al desplazamiento transversal del eje de la viga.

Las componentes M y g están en la dirección Z y corresponden al momento flector y al giro (cambio de pendiente) del eje.

Elemento. Un elemento se define como un conjunto de nódulos tales que se puede definir una relación entre cada uno de los parámetros A con cada uno de los parámetros B mediante la relación R (A, B), y que se expresa mediante una matriz R, esto es:

$$(F) = [R] \times (D)$$

en donde (**F**) es el vector formado por todos los parámetros **A** de los nódulos y (**D**) el vector correspondiente de los parámetros **B**.

En el ejemplo, un elemento corresponde a un tramo de viga continua en cada uno de cuyos extremos se tiene una fuerza cortante, un momento flector, un desplazamiento transversal y un giro, esto es, un nódulo en cada extremo.

Las cuatro fuerzas de los dos nódulos del tramo están relacionados con los cuatro desplazamientos correspondientes mediante una matriz 4 X 4, que es la matriz de rigidez.

Si **L** es la longitud del tramo, **I** el momento de inercia de la sección y **E** el módulo de elasticidad del material el modelo matemático del elemento es entonces:

$$\begin{bmatrix} V1 \\ M1 \\ V2 \\ M2 \end{bmatrix} = \frac{12\,EI}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2L & -1 & 2L \\ 2L & 3L^2 & -2L & 6L^2 \\ -1 & -2L & -1 & -2L \\ 2L & 6L^2 & -2L & 3L^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d1 \\ g1 \\ d2 \\ g2 \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene un elemento finito "natural" que representa exactamente el problema físico. Sin embargo, en los problemas normales en los cuales se utiliza el método de elementos finitos el elemento que se define sólo puede representar el problema físico de una manera aproximada.

La definición del elemento finito requiere en general procedimientos especiales y constituye

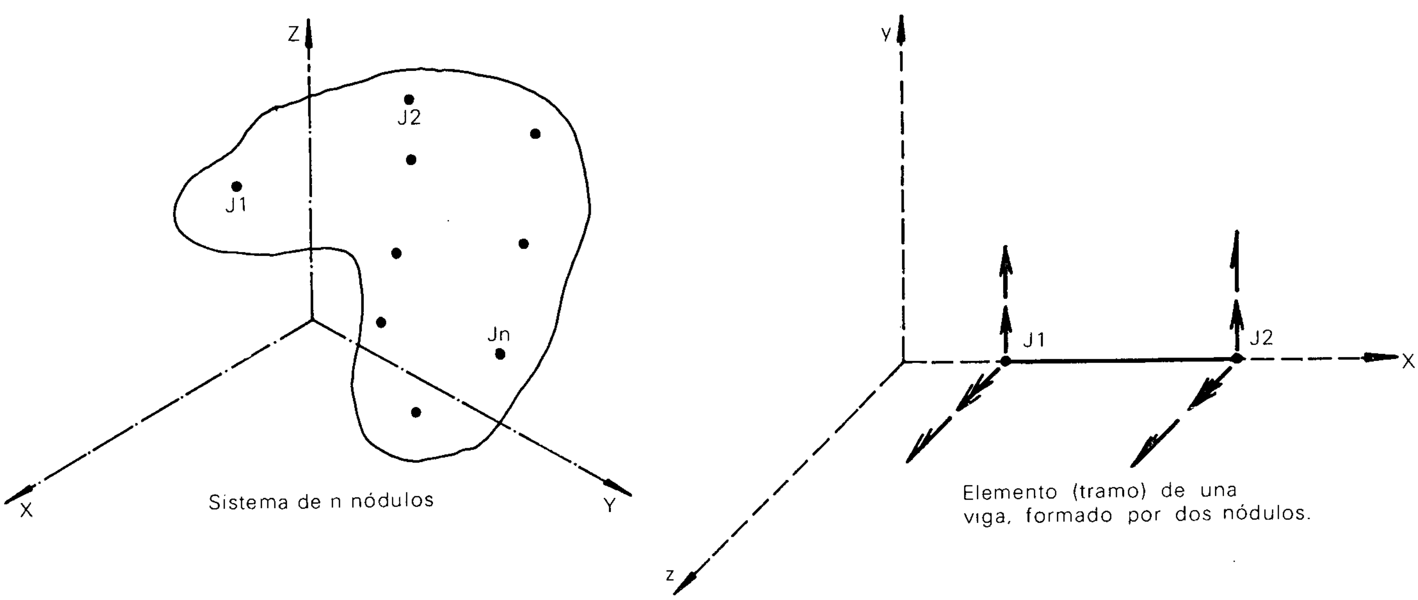

FIGURA 2. Elemento

la etapa clave en el proceso de formulación y solución del problema por este método. El conocimiento del elemento finito particular es la solución del problema unitario del fenómeno considerado y significa que se pueden determinar sus características internas en función de los valores de los parámetros en los nódulos del elemento.

El modelo completo se construye con los elementos así definidos mediante su interconexión en nudos y la especificación de las condiciones de frontera.

En este punto debe observarse que si los elementos están definidos en un sistema local de coordenadas, es necesario transformarlos a un sistema global para poder hacer su interconexión en los nudos.

Nudo: Un nudo puede ser un nódulo aislado de un elemento, esto es, cuando no está conectado a través de él a otro elemento. También puede ser un conjunto de nódulos de elementos diferentes situados en un mismo punto del espacio geométrico, ligados mediante una operación de condensación entre los parámetros B y una operación de sumación entre los parámetros **A**.

La operación de condensación se origina en la ley L(**B**) y significa que en cada nódulo que forma el nudo existe al menos una componente **B** que es igual a otra componente **B** de otro nódulo del nudo. Llevando a cabo la condensación, el nudo queda determinado por un vector de parámetros **B** correspondiente a las componentes independientes **B** de todos los nódulos y por el correspondiente vector de los parámetros **A** entre los cuales se efectúan sumas cuando corresponden a componentes **B** que se condensan por ser iguales.

Lo anterior se puede apreciar mejor con el ejemplo de la viga continua. Supongamos que la viga tiene tres tramos: **J1-J2; J3-J4, J5-J6** conectados entre **J2** y **J3** y entre **J4** y **J5.**

Se tienen entonces cuatro nudos, así:

N1, formado por el nódulo independiente **J1**.

N2, formado por el nódulo **J2** del primer elemento y el nódulo **J3** del segundo elemento. Si suponemos continuidad de los elementos se tienen dos operaciones de condensación al igualar los desplazamientos verticales y los giros de ambos nódulos. El nudo queda entonces representado por un vector de dos componentes independientes de desplazamiento (**d2, g2**) y el correspondiente vector de fuerzas (**V2, M2**) obtenidas de la suma de las componentes de fuerza correspondientes de los dos nódulos.

N3, formado de un modo semejante a **N2** con los nódulos **J4** y **J5**.

N4, formado por el nódulo aislado **J6** del tercer tramo.

El sistema total está representado entonces por la ecuación matricial resultante de las operaciones nodales anteriores.

En el ejemplo, la viga total está representada por la matriz de rigidez total de dimensión 8 X 8, que relaciona el vector de las 8 componentes de fuerzas de los 4 nudos y el vector de las 8 componentes de desplazamiento correspondientes.

Para la definición completa del modelo es necesario introducir las condiciones de frontera, las cuales se refieren tanto a los parámetros **A** como a los parámetros **B**.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera corresponden a la especificación de los valores de algunos de los parámetros **B** del modelo del sistema total, los cuales se dan como datos del problema. El vector total de los parámetros **B** queda entonces dividido en dos grupos **B1** y **B2**, en donde **B2** son los parámetros conocidos según las condiciones de frontera.

El vector total de los parámetros **A** queda entonces también dividido en dos grupos, **A1**, y

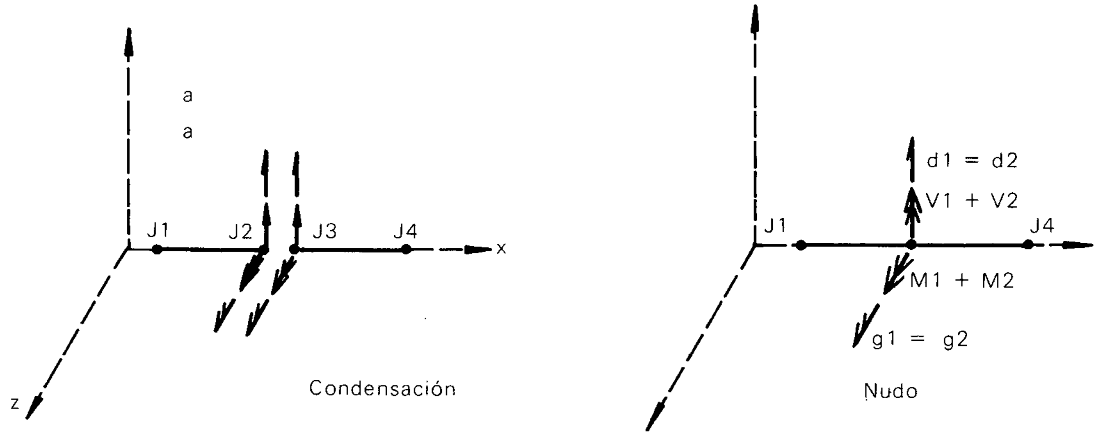

FIGURA 3. Nudo

A2, correspondientes a **B1** y **B2**. Las condiciones de frontera en lo referente a los parámetros **A** significa que los valores de **A1** son datos del problema.

Solución del problema biparamétrico

Con base en lo anterior, el problema puede formularse de la siguiente manera, reordenando los parámetros:

$$\begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \end{bmatrix}$$

en donde las incógnitas son **B1** y **A2**.

La solución buscada es un vector total **B** que cumpla la ley **L(B)**, del cual se conoce la parte **B2**, y simultáneamente un vector total **A** del cual se conoce la parte **A1**, y el cual debe cumplir la ley **L(A)**. Los parámetros **A** y **B** se encuentran relacionados por una ley **R(A,B)** que está indicada por la matriz **K**.

La solución se obtiene en dos etapas, así:

1. De la ecuación

$$K11 \times B1 + K12 \times B2 = A1$$

se calcula **B1**, que es el único término desconocido.

2. Una vez conocido **B1**, **A2** se obtiene de la ecuación

$$K21 \times B1 + K22 \times B2 = A2$$

En el ejemplo de la viga, supongamos que el nudo **N1** está empotrado y los otros tres nudos simplemente apoyados.

El vector **B** queda entonces dividido en dos partes,

B1 = (g2 g3 g4) que son las incógnitas, y
B2 = (d1 g1 d2 d3 d4) que es cero según las condiciones de frontera.

Con un vector dado **A1 = (M2 M3 M4)** se calcula **B1**, y luego a partir de **B1** se calcula el vector **A2**.

A2 = (V1. M1 V2 V3 V4) que representa las reacciones en los apoyos.