

# Linealización Entrada/Salida de Sistemas No Lineales Afines Utilizando un Filtro

Alberto Delgado\*

## RESUMEN

La linealización Entrada/Salida (E/S), dentro del marco teórico del control geométrico, es una técnica madura para sistemas no lineales afines. Esta técnica cancela los términos no lineales de la planta, usando una retroalimentación de estado no lineal, y produce una dinámica E/S lineal para la planta.

En este artículo se muestra que un filtro D(s) puede utilizarse para linealizar sistemas no lineales afines en lugar de aplicar una retroalimentación de estado no lineal que requiere conocer las ecuaciones exactas de la planta, su grado relativo, y la medición completa del vector de estado. En este nuevo enfoque el único requisito es conocer el grado relativo del sistema no lineal afín.

## INTRODUCCIÓN

La teoría de linealización E/S por retroalimentación es bien conocida en este momento [5]. La principal desventaja de esta técnica, desde el punto de vista práctico, es la necesidad de conocer las ecuaciones de la planta para calcular la entrada linealizante. Para superar este problema la teoría de linealización ha sido extendida con redes neuronales dinámicas y estáticas en lugar de las ecuaciones de la planta [1]. En el primer caso la red dinámica se usa para identificar el comportamiento E/S de la planta [2] y luego el modelo neuronal se manipula para sintetizar una entrada linealizante [3]. El segundo enfoque con una red neuronal estática no requiere la identificación de la planta porque los términos no lineales de la planta se cancelan directamente al entrenar la red [4].

En este trabajo se formula una proposición matemática y se demuestra que es posible la linealización E/S de sistemas no lineales afines usando un diferenciador, este procedimiento no requiere conocer las ecuaciones de la planta o la medición del vector de estado. La única información necesaria es el grado relativo de la planta y la medición de la salida del sistema  $y(t)$ .

Durante el desarrollo de este artículo se asume que el sistema no lineal cumple las condiciones establecidas en [5] para ser linealizado desde el punto de vista Entrada/Salida.

## I. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Considere el sistema no lineal de una entrada y una salida,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_1(x_1(t), \dots, x_n(t))u(t) \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_n(x_1(t), \dots, x_n(t))u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = h(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (1)$$

Esta clase de sistemas se conocen como afines puesto que el control  $u(t)$  aparece linealmente, i.e., las ecuaciones (1) son afines a las ecuaciones, en variables de estado, de los sistemas lineales. El sistema (1) se puede escribir de manera compacta como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado,  $u \in \mathfrak{R}$  la entrada manipulada,  $y \in \mathfrak{R}$  la salida,  $f(x)$  y  $g(x)$  son campos vectoriales y  $h(x)$  es un campo escalar. Esto es,  $f(x) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $g(x) \in \mathfrak{R}^n$  y  $h(x) \in \mathfrak{R}$ .

### A. GRADO RELATIVO

El grado relativo  $r$  de un sistema dinámico de una entrada y una salida se define como el número de veces que la salida  $y(t)$  se debe derivar con respecto al tiempo para obtener la entrada  $u(t)$  explícitamente.

La primera derivada de la salida  $y(t)$  para el sistema (1) está dada por,

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

\* Ingeniero Electricista, Ph.D., Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional de Colombia

reemplazando la derivada de la variable de estado,

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} [f_i(x) + g_i(x)u]$$

distribuyendo el producto,

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} g_i(x)u$$

en forma compacta,

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u$$

Donde  $L_f h(x)$  y  $L_g h(x)$  se conocen como las derivadas Lie del campo escalar  $h(x)$  en la dirección de los campos vectoriales  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente. Esto es,

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$L_g h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} g_i(x)$$

Si  $L_g h(x)$  es diferente de cero para todo  $x$  en el dominio considerado,  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ , la entrada  $u(t)$  aparece explícitamente y el grado relativo es uno. Matemáticamente,

$$\text{Si } L_g h(x) \neq 0 \text{ para } x \in D, \text{ entonces } r = 1.$$

Suponga que  $L_g h(x)$  es cero, entonces,

$$\dot{y} = L_f h(x)$$

derivando la salida de nuevo,

$$\ddot{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

$$\ddot{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x_i} f_i(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x_i} g_i(x)u$$

en forma compacta,

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u$$

esto es,

$$L_f^2 h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$L_g L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x_i} g_i(x)$$

Si  $L_g L_f h(x)$  es diferente de cero para  $x \in D$ , la entrada  $u(t)$  aparece explícitamente y el grado relativo es  $r = 2$ . Matemáticamente,

$$L_g h(x) = 0$$

$$L_g L_f h(x) \neq 0 \text{ para } x \in D, \text{ entonces } r = 2.$$

Este proceso se puede repetir y finalmente el sistema no lineal (1) se dice que tiene grado relativo  $r$  si,

$$L_g L_f^i h(x) = 0; i = 0, \dots, r-2$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \text{ para } x \in D$$

con  $L_f^0 h(x) = h(x)$ .

Para sistemas lineales el grado relativo es la diferencia entre el orden del denominador y el orden del numerador de la función de transferencia.

## II. LINEALIZACIÓN ENTRADA/SALIDA CON UN DIFERENCIADOR

Considere el sistema no lineal afín (2) con grado relativo  $r$ , entonces las primeras  $r$  derivadas de la salida  $y(t)$  están dadas por,

$$y = h(x)$$

$$\dot{y} = L_f h(x)$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x)$$

(3)

...

$$y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x)$$

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u$$

donde  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$ ,  $L_f^i h(x)$  es la  $i$ -ésima derivada Lie del campo escalar  $h(x)$  en la dirección del campo vectorial  $f(x)$ , y  $L_g L_f^{r-1} h(x)$  es la derivada Lie de  $L_f^{r-1} h(x)$  en la dirección de  $g(x)$ , note que  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$  porque el grado relativo es  $r$ .

**Proposición :** Dado el sistema no lineal (2) con grado relativo  $r$ , integrado en la configuración mostrada en la figura 1. Se concluye que la dinámica entrada/salida, entre la nueva entrada  $v(t)$  y la salida  $y(t)$  ( $y/v$ ), del sistema es lineal y obedece la ecuación diferencial,

$$\frac{d^r y}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r \cdot y = v$$

cuando el parámetro  $\epsilon$  del diferenciador es cero.

### Comentarios :

El bloque diferenciador, figura 1, está dado por la función de transferencia,

$$D(s) = \frac{V(s)}{E_1(s)} = \frac{s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_r}{(1 + \epsilon.s)^r}, \quad (4)$$

donde  $\beta_1, \dots, \beta_r$  son coeficientes propuestos por el diseñador de acuerdo a la dinámica E/S deseada para la planta.

La dinámica lineal deseada, figura 1, obedece la ecuación,

$$\frac{d^r y_d}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y_d}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y_d = u$$

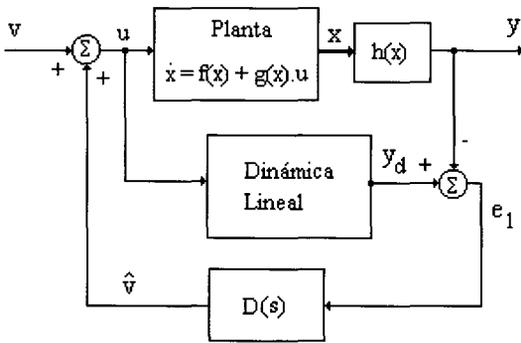


Figura 1. Configuración para la linealización E/S de una planta no lineal afín usando un diferenciador D(s).

**Prueba :** De la figura 1,

$$u = v + \hat{v} \quad (5)$$

donde  $\hat{v}$  es la salida del diferenciador (4). En el límite,  $\epsilon = 0$ , la salida está dada por,

$$\hat{v} = \frac{d^r e_1}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} e_1}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r e_1 \quad (6)$$

con  $e_1$  el error de linealización. Reemplazando  $e_1 = y_d - y$  en (6) produce,

$$\hat{v} = \left\{ \frac{d^r y_d}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y_d}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y_d \right\} - \left\{ \frac{d^r y}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y \right\} \quad (7)$$

sustituyendo (7) en (5) se logra,

$$u = v + \left\{ \frac{d^r y_d}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y_d}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y_d \right\} - \left\{ \frac{d^r y}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y \right\} \quad (8)$$

Llevando la entrada  $u$  (8) a la última ecuación de (3) y distribuyendo el producto,

$$y^{(r)} = L_f h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot \left\{ \frac{d^r y_d}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y_d}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y_d \right\} + L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot \left\{ v - \frac{d^r y}{dt^r} - \beta_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} - \dots - \beta_r y \right\} \quad (9)$$

pero la dinámica lineal ( $y_d/u$ ) es conocida y dada por,

$$\frac{d^r y_d}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y_d}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y_d = u \quad (10)$$

reemplazando (10) en (9) produce,

$$y^{(r)} = L_f h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u + L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot \left\{ v - \frac{d^r y}{dt^r} - \beta_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} - \dots - \beta_r y \right\} \quad (11)$$

sabemos que el grado relativo de la planta es  $r$ , entonces el último término en (11) debe ser cero. Recuerde que  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ , por lo tanto el paréntesis es cero y obtenemos que,

$$\frac{d^r y}{dt^r} + \beta_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \dots + \beta_r y = v \quad (12)$$

QED ■

Esta prueba muestra que la dinámica E/S de una planta no lineal afín (2) puede ser linealizada utilizando la configuración de la figura 1, el bloque principal es el diferenciador. Note que la dinámica E/S deseada (12) para la planta es dictada por el diseñador, i.e., los parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_r$  se conocen a priori.

Después de linealizar la planta, la estructura presentada en la figura 1 se integra a un lazo cerrado con un controlador lineal para mejorar la respuesta total. Por ejemplo, un controlador PI (12) puede cancelar el error en estado estacionario para una entrada escalón, ver figura 2.

$$v = k_p \cdot (c - y) + k_i \cdot \int_0^t (c(\tau) - y(\tau)) \cdot d\tau \quad (13)$$

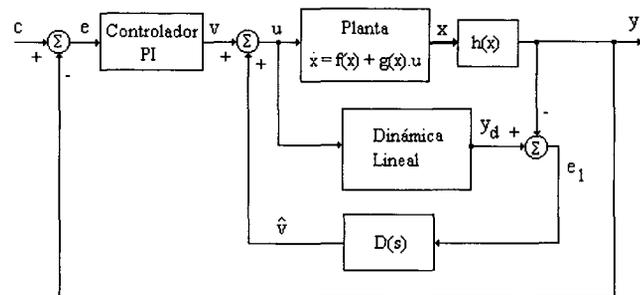


Figura 2. La planta linealizada se integra a un lazo cerrado con un controlador lineal para mejorar la respuesta y satisfacer otras especificaciones de diseño.

### III. SIMULACIONES

Considere el péndulo de la figura 3. Este sistema obedece las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -9,8\sin x_1 - 0,5x_2 + 0,5u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $u \in \mathcal{R}$  es la entrada a la planta,  $y \in \mathcal{R}$  es la salida de la planta, y el grado relativo es  $r = 2$ . El péndulo hace parte de la estructura mostrada en la figura 1, la dinámica entrada/salida deseada para el péndulo linealizado es,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \cdot \frac{dy}{dt} + 6 \cdot y = v \quad (15)$$

con el diferenciador  $D(s)$ ,

$$D(s) = \frac{s^2 + 5 \cdot s + 6}{(1 + \epsilon \cdot s)^2}$$

esto es,  $\beta_1 = 5$ ,  $\beta_2 = 6$ ,  $\epsilon = 0,05$ . Note que la dinámica (15) es la dinámica deseada para el péndulo linealizado utilizando la estructura de la figura 1 con un diferenciador ideal.

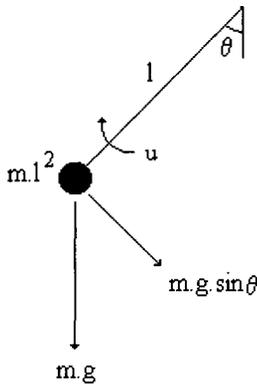


Figura 3. Sistema no lineal afín que se linealiza con la estructura de la figura 1.

Después de linealizar la dinámica E/S del péndulo, la estructura de la figura 1 se integró a un lazo cerrado con un controlador PI, como muestra la figura 2, las ganancias del controlador se ajustaron,  $k_p = 1$ ,  $k_i = 3$ , para conseguir la dinámica de lazo cerrado,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} + y = c \quad (16)$$

esta dinámica de segundo orden es posible por la cancelación polo-cero en  $s = -3$ . La figura 4 muestra la respuesta del lazo cerrado para una referencia escalón  $c = 1,5$ , cuando la planta

es el péndulo linealizado. El lector no debe confundir la dinámica de lazo abierto (15) con la dinámica (16), obtenida usando un lazo cerrado adicional con un controlador PI.

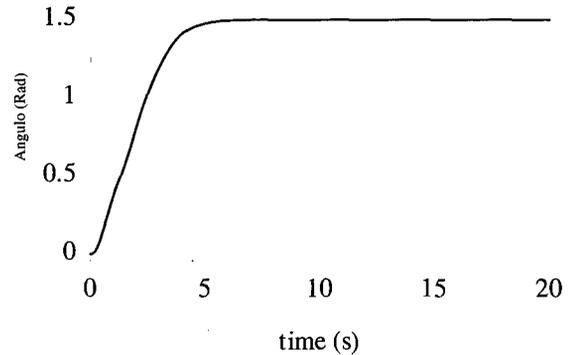


Figura 4.- Respuesta de lazo cerrado, para la referencia  $c = 1,5$ , del péndulo linealizado. Respuestas de lazo cerrado actual y deseada (negrita).

La figura 5 muestra la respuesta de lazo cerrado para la referencia escalón  $c = -1,5$ , cuando la planta es el péndulo linealizado.

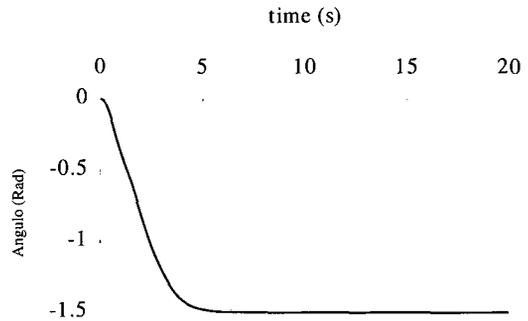


Figura 5. Respuesta de lazo cerrado, para la referencia  $c = -1,5$ , del péndulo linealizado. Respuestas de lazo cerrado actual y deseada (negrita).

La figura 6 muestra la respuesta del lazo cerrado para la referencia  $c(t) = \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ , cuando la planta es el péndulo linealizado,  $f = 0,4$  Hz.

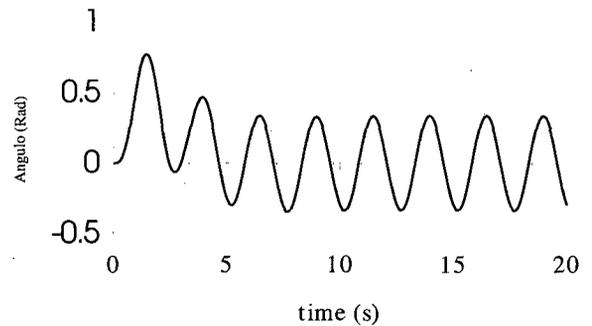


Figura 6. Respuesta de lazo cerrado, para la referencia  $c(t) = \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ , del péndulo linealizado. Respuestas de lazo cerrado actual y deseada (negrita).

## CONCLUSIONES

La linealización entrada/salida es una técnica bien conocida con bases matemáticas rigurosas. La principal limitación de esta técnica, en casos prácticos, es la necesidad de las ecuaciones de la planta y la medición completa del vector de estado para sintetizar la retroalimentación de estado linealizante.

En este trabajo se ha probado que es posible usar un diferenciador para la linealización entrada/salida de sistemas no lineales afines obedeciendo la estructura de la figura 1, por lo tanto, no es necesario conocer las ecuaciones de la planta o medir el vector de estado. Después de linealizar la planta, esta se integra a un lazo cerrado con un controlador PI para mejorar la respuesta. El resultado teórico fue ilustrado con la simulación de la linealización de un péndulo para distintas referencias  $c(t)$ .

Una limitación importante del resultado mostrado es la necesidad de un diferenciador ideal ( $\epsilon = 0$ ). En la práctica esto no es posible pues un diferenciador ideal amplifica el ruido y causa la saturación de los circuitos electrónicos, lo cual impide obtener un control  $u(t)$  que cancele los términos no lineales de la planta. Para obviar este problema se utiliza un circuito con la función de transferencia (4) y un valor de  $\epsilon$  pequeño.

Finalmente, se recomienda al lector interesado en el tema revisar el primer capítulo del proyecto meritario [6] donde se discute en detalle la teoría del control geométrico para sistemas de una entrada y una salida con ejemplos resueltos paso a paso.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece los esfuerzos de la Facultad de Ingeniería y del Centro de Investigaciones de la Universidad Nacional por crear un ambiente estimulante y apoyar la investigación en nuestro país.

## BIBLIOGRAFIA

1. DELGADO, A. *Input/Output linearization of control affine systems using neural networks*. PhD Thesis, Cybernetics Department, Reading University - UK, 1996.
2. DELGADO, A., KAMBHAMPATI, C. y WARWICK, K. "Identification of nonlinear systems with a dynamic recurrent neural network," *Proceedings of the IV International Conference on ANNs*, Cambridge, 1995, pp. 318 - 322.
3. \_\_\_\_\_. "Dynamic recurrent neural network for system identification and control," *IEE Proceedings - Part D*, 142, pp. 307 - 314, 1995.
4. \_\_\_\_\_. "Stable linearization using multilayer neural networks," *Proceedings of the International Conference on Control*, Exeter, 1996, pp. 194 - 198.
5. ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Berlin : Springer - Verlag, 1989.
6. LÓPEZ, A. *Estructura linealizante : Síntesis de la realimentación de estado utilizando polinomios*. Proyecto de grado, Departamento de Ingeniería Eléctrica. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1998.