Distribución λ-Generalizada en la Simulación de Sistemas Estocásticos Complejos

Jorge Eduardo Ortiz Triviño*

Resumen

En este artículo se presenta una técnica para diseñar modelos estocásticos de sistemas complejos adaptativos empleando redes de autómatas. El método consiste en modelar los elementos de un sistema mediante autómatas de aprendizaje, luego determinar las relaciones estocásticas y determinísticas que permiten la interacción entre tales componentes para, de esta manera, constituir una red de autómatas como abstracción de la estructura del sistema en estudio. Así mismo, para modelar su dinámica se propone el diseño de un plan adaptativo en el cual deben construirse los operadores que otorgan a la estructura la posibilidad de evolucionar. Una vez construida la red adaptativa de autómatas puede simularse mediante la construcción adecuada de generadores de variables aleatorias a través de la distribución λ-generalizada. Específicamente, éstos generadores son usados en la simulación de las relaciones estocásticas de los autómatas de aprendizaje y en la selección de los operadores en el plan adaptativo. El método no solo es útil en el análisis de sistemas complejos, sino que permite construir organismos dotados con vida artificial.

Palabras clave: Distribución λ-generalizada, Sistema complejo, Autómata de aprendizaje, plan adaptativo, Variable aleatoria, vida artificial.

Abstract

This paper presents a technique to design computers stochastic models of adaptative complex systems using automata nets. The method consist in construct models for subsystems through learning automata, after that, it is necessary find the random relationships that allow interactions between components. So, it is possible construct an automata net as a model of the system in study. In the same way, it is possible design an adaptative plan to represent the systems change as a space-time function. The model so construct can be simulated, in a computer, using generators of random vectors. In specific, these vectors are used in both simulation of the relationships between different automatas and in the adaptative plan operators. This method can be used not only to know about natural complex systems but also in design of synthetic complex organisms that presents artificial life properties.

Key Words: Generalize Lambda Distribution, Complex System, Learning automata, Adaptative plan, random variate, Artificial Life.

Introducción

La *Simulación de Sistemas* es un proceso en el cual se tratan de imitar las características relevantes de alguna organización, real y/o abstracta, con el ánimo de conocerla más a fondo, poder explicar su comportamiento, y principalmente tomar una serie de decisiones orientadas a mejorar el logro de sus objetivos.

Además, la simulación de sistemas estocásticos complejos es un camino para crear vida artificial. Con ella pueden diseñarse organismos complejos que incorporen conceptos tales como *adaptación*, *robustez*, *herencia*, *muerte*, etc.

Así, en las siguientes secciones se tratan algunos conceptos de sistemas, luego se discuten, a grandes rasgos, los modelos matemáticos para sistemas complejos y, finalmente, se propone una metodología para construir modelos estocásticos de simulación empleando el concepto de variable aleatoria con la distribución lambda generalizada.

I. Sistemas y Modelos Matemáticos

En esta sección se discuten algunos conceptos de sistemas y se establece su relación con los modelos matemáticos.

A. Sistema Complejo

En este trabajo se entiende por sistema[1] a una estructura funcional que se caracteriza por que tiene un conjunto de entidades y diversas propiedades que determinan las relaciones

*Profesor Asistente, Departamento Ingeniería de Sistemas, Universidad Nacional de Colombia

[1] La definición de sistema aquí presentada es una adaptación del concepto propuesto por George Klir.

atemporales bien sean estocásticas, determinísticas y/o difusas a un nivel de resolución dado. Por nivel de resolución se entiende la determinación de los conjuntos de entidades y relaciones, su catalogación como estocásticas, difusas o determinísticas en un determinado lugar en el tiempo y espacio.

Cuando los cardinales de los conjuntos implicados en la definición anterior son grandes se dice que el sistema es complejo. Ejemplos típicos de sistemas complejos son el cerebro humano, los ecosistemas, etc.

B. Modelos Matemáticos

En el proceso de abstracción de un sistema a través del lenguaje matemático, el punto de partida lo constituyen las variables independientes *tiempo-espacio,* que se definen como sigue:

$$T \in R^4$$

En el cual, la primera componente representa el tiempo, y las componentes restantes son el espacio. La variable T también se conoce con el nombre de *variable independiente.*

Similarmente, se definen las *variables dependientes* o *variables de estado* de la siguiente manera:

$$X \in R^p$$

Donde, cada $X_i \in X$ es una función de la variable independiente *tiempo-espacio*, esto es:

$$X_i : R^4 \to R$$
$$\mathrm{T} \to \mathrm{X}_i(T)$$

Para el estudio de sistemas de naturaleza aleatoria, la variable X es estocástica y se denomina *vector aleatorio.*

II. Redes De Autómatas Como Modelos De Sistemas Complejos

De acuerdo con lo propuesto anteriormente, un sistema complejo (*sc*) es una estructura funcional para la cual el número de entidades es grande, al igual que las relaciones entre ellas.

A continuación se presenta un modelo matemático útil en el estudio de sistemas complejos.

A. Modelo Para Elementos Del Sistema

Un elemento puede modelarse formalmente a través de un autómata. Entendiendo por autómata una máquina que recibe una señal de entrada, asume un estado y produce una señal respuesta en un determinado momento en el tiempo y el espacio.

Matemáticamente, un Autómata A, es una quíntupla :

$$A = (\, \varepsilon,\ \Sigma_e,\ \Sigma_s,\ \delta,\ \psi\,)$$

Donde:

$\varepsilon = \{e_i\}_{i \in I}$, es un conjunto de estados sobre el conjunto de índices I. El cardinal de I representa el número total de estados del autómata.

$\Sigma_e = \{a_i\}$, es el alfabeto de entrada de A.

$\Sigma_s = \{b_j\}$, es el alfabeto de Salida de A.

δ ,es la relación siguiente estado dada por:

$$\delta : \varepsilon \mathrm{x} \Sigma_e \to \varepsilon$$

ψ es la relación respuesta de A, dada por :

$$\psi : \varepsilon \mathrm{x} \Sigma_e \to \Sigma_s$$

Cuando δ ,ψ son estocásticas, A se denomina Autómata de aprendizaje.

B. Modelo Para Sistemas Y Subsistemas

Un sistema, en un sentido general, puede modelarse mediante una red de autómatas interconectadas. Una entidad se comunica y relaciona con otras entidades mediante el intercambio de información de sus estados en algún lugar en el tiempo y el espacio.

Para establecer un modelo matemático de esta naturaleza se requiere definir adecuadamente cada uno de los autómatas que conforman la red y la manera como están interconectados. Por ello, se debe determinar un conjunto de autómatas y un conjunto de relaciones de comunicación.

Formalmente, una red de autómatas R es una dupla

$$R = \left(M, \{A_i\}_{i \in I} \right)$$

donde:

a) $M = (I, \gamma)$ es un multígrafo que tiene como nodos el conjunto de índices I de los autómatas y donde γ es un subconjunto cualquiera del conjunto de partes de *IxI*

b) $A = \{A_i\}_{i=1}^{i=n}$ es un conjunto de autómatas.

C. Modelo Para La Dinámica y Adaptación De Sistemas

Una de las características más importantes de los sistemas complejos es su tendencia al cambio en función del tiempo-espacio. Esta propiedad, comunmente denominada dinámica del sistema, es usualmente modelada mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales y/o en diferencias[2] para sistemas de naturaleza continua y discreta respectivamente.

[2] En el caso general, pueden emplearse ecuaciones diferenciales y en diferencias estocásticas.

En el caso de sistemas complejos, solucionar tales ecuaciones (inclusive encontrarlas) es difícil y en la mayoría de los casos es imposible. Afortunadamente, este problema puede abordarse, por lo menos en parte, mediante la teoría de sistemas adaptativos y la simulación de sistemas estocásticos.

Inicialmente el concepto de Adaptación de Sistemas Complejos se considera como una forma de aprendizaje [4] que, al igual que la dinámica del sistema, ocurre en función de la variable independiente tiempo-espacio. En consecuencia, la idea de adaptación está ligada funcionalmente al de dinámica y, naturalmente, al concepto de entropía entendida esta última como la característica de los sistemas que los hace tender al desorden. Es decir,

$$Adaptación = f(dinámica(T), Entropía(T))$$

De otro lado, existen dos propiedades, de particular interés en el estudio de sistemas complejos adaptativos: *Estabilidad* y *Robustez*. En el primer caso, se dice que un sistema es estable cuando, ante cambios en el ambiente, existe una persistencia en la tendencia teleológica de la estructura funcional. Similarmente, un sistema se dice robusto cuando persiste la tendencia teleológica ante fallas de las entidades o subsistemas que lo componen.

En consecuencia, se define sistema adaptativo como aquel que modifica su estructura para mantener o mejorar el logro de los objetivos en un ambiente cambiante.

Así, el modelo matemático para un sistema adaptativo ***SA***. está dado por la cuádrupla

$$SA = (\varepsilon, \Omega, I, \tau)$$

Donde,

$\varepsilon = \{E_k\}_{k \in K}$ Es el conjunto de redes de autómatas posibles.

$\Omega = \{\omega_j\}$ Es el conjunto de operadores que modifican las redes de autómatas con :

$$\omega_j : \varepsilon \rightarrow P$$

con P un conjunto de distribuciones de probabilidad multivariadas sobre ε.

I. Es el conjunto de posibles entradas al sistema desde el ambiente.

τ Es una aplicación dada por :

$$\tau : I \times \varepsilon \rightarrow \Omega$$

de forma que si t es un elemento del tiempo-espacio, se cumple lo siguiente:

$$\tau(I(t), \varepsilon(t)) = \omega_t \in \Omega \text{ y } \omega_t(\varepsilon(t)) = P(t+1)$$

Nuevamente las variables aleatorias juegan un papel importante en este enfoque.

D. Modelo para Suprasistemas Adaptativos

Un suprasistema (SS) es en sí mismo una estructura funcional conformada por sistemas complejos. Un caso típico se tiene en los ecosistemas en donde varias especies (conjunto de sistemas) interactuan en un ambiente común.

Esta situación puede modelarse como una red de redes adaptativas. Esto es, formalmente un suprasistrema (***SS***) es una dupla:

$$SS = (M, \{RA_i\})$$

Donde M es un multígrafo y RA_i es la i-ésima red adaptativa del modelo del suprasistema. Nuevamente, las relaciones establecidas en M pueden ser estocásticas. En este caso, se dice que el suprasistema es de aprendizaje.

De igual forma, dado que un SS, es en sí mismo un sistema complejo puede considerarse adaptativo, caso en el cual, puede su evolución modelarse mediante redes adaptativas de autómatas.

III. Simulación Estocástica Generalizada

Una vez construida la red adaptativa de autómatas puede simularse mediante la construcción adecuada de generadores de variables aleatorias a través de la distribución λ-generalizada. Éstos generadores son usados en la simulación de las relaciones estocásticas de los autómatas de aprendizaje y en la selección de los operadores en el plan adaptativo. El método no solo es útil en el análisis de sistemas complejos, sino que permite construir organismos dotados con vida artificial.

A. Distribución λ-generalizada

Una distribución continua de probabilidad se define usualmente por su función de distribución o por su función de densidad. Alternativamente, puede ser definida por su función percentil, si existe. La función percentil es simplemente el inverso de la función de distribución.

Este concepto es particularmente útil en estudios de simulación de sistemas complejos debido al siguiente resultado :

Sea F una función de distribución continua sobre $\Re$ con inversa F^{1} definida por:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) = u, \} \quad \forall u \in (0,1)$$

Si $U \sim U(0,1)$ entonces $F^{-1}(u)$ tiene función de distribución F. También, si X tiene función de distribución F, entonces $F(X)$ es uniformemente distribuido en (0,1).

Un ejemplo específico es la función lambda de Tukey dada por

$$F^{-1}(u) = \frac{\lfloor u^{\lambda} - (1-u)^{\lambda} \rfloor}{\lambda} \quad (0 \leq u \leq 1) \qquad (1)$$

La cual es definida para todos los valores de lambda diferentes de cero. Ramberg y Schmeiser [11] mostraron cómo esta distribución podía ser usada para aproximar muchas de las bien conocidas distribuciones simétricas y exploraron su aplicación a estudios de la simulación de Monte Carlo, además, generalizaron (1) a una distribución de cuatro parámetros definida por la función percentil :

$$F^{-1}(u) = \lambda_1 + \frac{\lfloor u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4} \rfloor}{\lambda_2} \quad (0 \leq u \leq 1), \qquad (2)$$

Denominada *Distribución λ- Generalizada*, aquí λ_1 es un parámetro de localización, λ_2 es un parámetro de escala y λ_3 y λ_4 son parámetros de forma. Esta distribución, que incluye la distribución Lambda original, también permite construir curvas sesgadas de diversas formas.

Aunque la función de distribución no existe en *forma simple cerrada*, en la práctica esto no es un problema para los usuarios. La función de densidad correspondiente a (2) esta dada por :

$$f(x) = f\left(F^{-1}(u)\right) = \frac{\lambda_2}{\left\{\lambda_3 u^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4 - 1}\right\}} \quad (0 \leq u \leq 1). \; (3)$$

Para graficar la densidad de los λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 dados, se requiere evaluar (2) y (3) para valores de u entre 0 y 1. Después $f\left(F^{-1}(u)\right)$ se grafica en el eje y contra $F^{-1}(u)$ en el eje x. Aun cuando λ_1 no aparece explícitamente en (3), la densidad es una función de λ_1 está definida en términos de $F^{-1}(u)$ el cual depende de λ_1 como se ve en (2).

B. Generador Universal De Variables Aleatorias

Esta distribución universal puede usarse para generar variables aleatorias con una función de distribución F arbitraria. En consecuencia, el método, en forma algorítmica, es el siguiente; recordando que un número aleatorio es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo [0,1].

Real ALGORITMO Variable_X(λ_1, λ_2, λ_3, λ_4)

INICIO

U ← Aleatorio (Z)

$$X \leftarrow \lambda_1 + \frac{\left[u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}\right]^{-1}}{\lambda_2}$$

Retornar (X)

FIN_ALGORITMO Variable_X

La mayor parte de las distribuciones conocidas pueden ser aproximadas mediante esta técnica. Por ejemplo, con $\lambda_1 = 0{,}12$, $\lambda_2 = 0{,}1975$, $\lambda_3 = 0{,}1349$ $\lambda_4 = 0{,}1349$ la distribución lambda generalizada resulta ser una buena aproximación a la distribución normal. Además, pueden obtenerse distribuciones sofisticadas útiles en vida artificial.

IV. Comportamiento y Funcionalidad Emergentes

Entendiendo por *funcionalidad* alguna cosa que el sistema deba llevar a cabo con el propósito de cumplir su misión teleológica y , además, como *comportamiento* una actividad regular de la interacción dinámica entre un sistema complejo y su ambiente. Mediante la construcción de modelos estocásticos basados en la distribución lambda generalizada, bien sea para sistemas reales o artificiales, pueden determinarse algunas de las más relevantes funcionalidades y comportamientos que surgen como consecuencia de la actividad propia del sistema en estudio. Algunas de ellas, inesperadas, revelan tópicos de especial interés en el estudio de vida artificial.

Discusión y Conclusiones

La metodología aquí presentada ha sido tímidamente empleada en la construcción de modelos para sistemas complejos así como en el diseño de organismos con vida artificial, sin embargo, estos conceptos pueden aplicarse de forma más ambiciosa en estas mismas áreas. Su aplicación va desde los autómatas celulares, pasando por las redes neuronales estocásticas hasta los mismos algoritmos genéticos, campos en los cuales los conceptos de número aleatorio y variable aleatoria pueden entrar a jugar un papel fundamental en las actuales investigaciones.

Agradecimientos

El autor desea agradecer a los profesores Adolfo Ocampo y Jonatan Gómez por sus valiosos comentarios de forma y de fondo orientado a mejorar este material académico.

Bibliográfia

1.DEVROYE, Luc. ***Non-Uniform Random Variate Generation***. Editorial Springer-Velag. 1986.

2.GARZÓN, M. ***Cellular Automata and Discrete Neural Networks***, Physica D 45, 431-440. 1990

3.__________. ***Models of Masive Parallelism: Analysis of Cellular Automata and Neural Networks***, Springer-Verlag, 1995.
1996,

4. __________. Evolutionary Computation: Evolution in Evolution. ***En Memorias del Primer Congreso Nacional de Neurocomputación***. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 43-51, 1996.

5.GOLBERG, D. E., "Genetic Algorithms": En ***Search, Optimization, and Machine Learning. Addisson***-Wesley, 1989.

6.GOLES, E (1990), ***Automata Networks***, Birkhauser, 1990.

7.HOLLAND J. H., ***Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology***, Control and Artificial Intelligence, MIT Press, 1992.

8. KOSKO B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach*. Prentice-Hall, 1992.

9. KRZANOWSKI, W.J. *Multivariate Analysis : Distributions, Ordination and Inference.* 1994.

10. NARENDRA, K. and THATHACHAR M.A.L. (1989), *Learning Automata : An Introduction.* Prentice-Hall.

11. RAMBERG, *et al* "A Probability Distribution and Its Uses in Fitting Data". *Technometrics,* Vol 21, No. 2 May 1.979.

12. ZAVAN, A. KARIAN y EDWARD, J. DUDEWICZ. *Modern Statistical, Systems and GPSS Simulation*. 1992.