CPU-e

Revista de Investigación Educativa 18

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308 | Xalapa, Veracruz

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

El papel de los sistemas de representación en las dificultades experimentadas por los estudiantes al resolver un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas

Mtro. Alfonso Javier Bustamante Santos

Investigador, estudiante de doctorado*
abustamante@uv.mx

Dr. Jorge Vaca Uribe

Coordinador
Línea de Investigación en Lengua Escrita y Matemática
Básica: adquisiciones, prácticas y usos*
jvaca@uv.mx

*Instituto de Investigaciones en Educación
Universidad Veracruzana, México

Esta contribución busca comprender las dificultades que encuentran 329 estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria al enfrentar un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, la relación de esas dificultades con los sistemas de representación y con los teoremas-en-acto sobre la división. Los resultados muestran que una tercera parte resuelve correctamente el problema, casi la mitad de quienes no lo hacen invierte los datos en la división y esto puede deberse a la idea de que "el número grande siempre es el dividendo y el número pequeño es el divisor", aunado a que no consideran la factibilidad real de la respuesta dada. Otras dificultades corresponden a la asignación de unidades de longitud a números decimales.

Palabras clave: Educación básica, proporcionalidad, resolución de problemas.

Recibido: 04 de febrero de 2013 | **Aceptado:** 19 de junio de 2013

CPU-e

Alfonso Javier Bustamante Santos y Jorge Vaca Uribe

This contribution seeks to understand the difficulties encountered by 329 students in sixth grade and ninth grade to address a problem of conceptual field of multiplicative structures, the relationship of these difficulties with the systems of representation and theorems-in-action on the division. The results show that one-third correctly resolve the problem, almost half of those who do not, inverting the data in the division and this may be due to the idea that "the big number is always the dividend and the smaller the number divisor", together they do not consider the actual feasibility of the answer, other difficulties relate to the allocation of units of length to decimal numbers.

Keywords: Basic education, proportionality, problem-solving.

El papel de los sistemas de representación en las dificultades experimentadas por los estudiantes al resolver un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas

Introducción

Actualmente se reportan puntajes bajos en los resultados de las pruebas estandarizadas que pretenden evaluar las competencias de los estudiantes mexicanos en matemáticas. Por ejemplo, la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2012) informa que el promedio nacional en la prueba Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) 2009 es de 419 puntos, en comparación con el promedio de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) que es de 501 puntos. Esta es la razón por la que se inició un trabajo de investigación que busca conocer en detalle lo que sucede cuando estudiantes de entre 11 y 15 años enfrentan un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Si fallan, en qué fallan y por qué.

Se considera que algunas dificultades están relacionadas con la interacción entre los diferentes sistemas de simbólicos involucrados en el proceso de resolución, específicamente la escritura alfabética, el lenguaje oral y la notación matemática, además de aquellas vinculadas con el dominio conceptual de las nociones implicadas.

La investigación se dividió en dos fases: la primera fue la aplicación grupal de cuatro versiones de un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas:

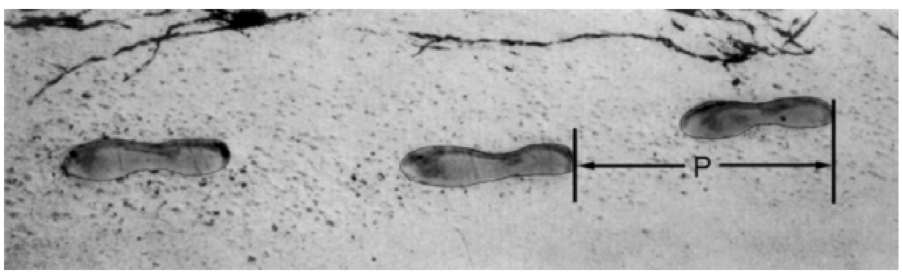
Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

La segunda fase consistió en la realización de entrevistas clínicas a los estudiantes que dieron respuestas interesantes para conocer a profundidad la relación entre los diferentes sistemas de representación usados y las justificaciones que dan para usarlos.

Para este artículo sólo se reportan los resultados de la primera fase, que recaba las producciones escritas de los estudiantes y que por lo tanto algunas de las respuestas sólo nos permiten hacer inferencias sobre el procedimiento y las dificultades experimentadas.

El problema arriba mencionado y sus versiones (expuestas en la metodología) son una adecuación del *problema de pasos*, reactivo empleado en la prueba PISA 2003 (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2013):

PASOS



La foto muestra las huellas del caminar de un hombre. El tamaño de cada paso P es la distancia entre los talones de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$, nos da una relación aproximada entre n y P donde,

n = número de pasos por minuto y

P = el tamaño del paso en metros.

PREGUNTA 16: PASOS M124Q01-0129

Si aplicamos la fórmula a Héctor que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es el tamaño de los pasos de Héctor? Muestra tus operaciones.

Figura 1. Pasos. Reactivo liberado de la prueba PISA 2003

Puesto que el problema original requiere dominar contenidos de algebra que no son parte de la estructura curricular del nivel primaria, se hizo una adaptación que conservara cierto grado de dificultad y que pudiera propiciar diferentes estrategias de resolución y formas de representación.

Se sabe que los contextos socioculturales de los estudiantes propician el tipo de situaciones que ellos enfrentan de manera cotidiana y, por lo tanto, esos contextos influyen en el desarrollo de las competencias que se necesitan para resolverlas satisfactoriamente (Vaca, Bustamante, Gutiérrez & Tiburcio, 2010). También sabemos que hay una gran variedad de condiciones en las escuelas (Rockwell, 2005) y diferentes niveles de desempeño de los profesores. Además, en México se transitó hacia un cambio curricular basado en competencias y esa transición ha provocado confusión en los actores del sistema educativo en sus diferentes niveles. Sin embargo, para este trabajo sólo nos enfocaremos en el proceso de resolución para identificar las principales dificultades que enfrentan los estudiantes ante estos problemas.

1. Marco conceptual

Gérard Vergnaud propone una clasificación de las situaciones en función de las relaciones matemáticas y conceptualizaciones implicadas en cada una de ellas. Da especial énfasis a la noción de representación y sus diferentes planos, que son homomórficos entre sí y con la realidad. Para el análisis de los procedimientos, la noción de esquema que propone resulta muy pertinente para entender las respuestas de los estudiantes; es por ello que la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990 y 2009) nos parece una herramienta muy útil para explicar los procesos de resolución en función de las conceptualizaciones movilizadas y los sistemas de representación usados por los estudiantes ante la situación experimental propuesta.

Esta teoría, según su autor, tiene como propósitos describir y analizar la complejidad progresiva de las competencias matemáticas, que los estudiantes desarrollan dentro y fuera de la escuela, y establecer las relaciones entre la forma operatoria y la forma predicativa del conocimiento. Considera que un campo conceptual es al mismo tiempo un conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos estrechamente vinculados (Vergnaud, 2009, p. 86).

Este autor propone que si se asume la teoría de que el conocimiento es un proceso de adaptación, se debe entonces responder a la pregunta ¿qué es lo que se adapta y a qué? Considera que la respuesta más razonable es que lo que se adapta son las formas de organización de la actividad, es decir, los esquemas, y ellos se adaptan a las

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

situaciones. Retoma de Piaget la noción de esquema, la complementa y la enriquece; expresa que los esquemas comprenden los siguientes aspectos:

- El aspecto intencional de los esquemas involucra una o varias metas que pueden ser desarrolladas en sub-metas y anticipaciones.
- El aspecto generativo de los esquemas involucra reglas para generar la actividad, concretamente la secuencia de acciones, la toma de información y los controles.
- El aspecto epistémico de los esquemas involucra invariantes operatorias, concretamente conceptos-en-acto y teoremas-en-acto. Su principal función es recoger y seleccionar información relevante e inferir de ella metas y reglas.
- El aspecto computacional involucra posibilidades de inferencia. Ellas son esenciales para entender que el pensamiento está compuesto de una intensa actividad de cómputo, incluso en situaciones aparentemente simples, y aún más en situaciones nuevas. Necesitamos generar metas, sub-metas y reglas, además de propiedades y relaciones que no son observables. (Vergnaud, 2009 p.88)

Vergnaud (2009) distingue entre teorema-en-acto y concepto-en-acto, en que un teorema puede ser verdadero o falso, porque se trata de un enunciado (una proposición), y un concepto no es un enunciado, no puede considerarse verdadero o falso, sino solamente pertinente o no pertinente. Aclara que los teoremas-en-acto pueden ser falsos pero ser considerados por el estudiante como verdaderos (p. 88).

Esta noción de teorema en acto es análoga a la de los modelos primitivos implícitos propuesta por Fischbein, Deri, Nello y Sciolis (1985). Ellos sostienen que en las operaciones aritméticas entran en juego algunos modelos comportamentales primitivos que hacen que los estudiantes, aunque sepan dividir convencionalmente por ejemplo, sean influidos por alguno de estos modelos y cometan errores. Uno de estos modelos implícitos es que en la división interpretada como reparto (divisón-partición) y en la interpretada como agrupamiento (división-cuotición), tanto el divisor como el cociente deben ser números más pequeños que el dividendo (p. 14).

Esta afirmación, considerada por los autores como un modelo primitivo implícito, desde la perspectiva de Vergnaud correspondería a un teorema-en-acto, que también tiene la característica de que no necesariamente puede ser explicitado por el sujeto. Tiene una base comportamental porque es construida en la acción y por ello le asigna el nombre de teorema-en-acto o en acción. Así, aunque ambas nociones pueden referirse al mismo fenómeno, se opta por la perspectiva de Vergnaud, quien integra esta noción como parte de las invariantes operatorias que a su vez son componentes del esquema. Sin embargo, durante el análisis de los resultados se retoman algunas

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

coincidencias con los resultados obtenidos bajo la noción de los modelos tácitos o implícitos de Fischbein et al. (1985).

Por otro lado, Vergnaud (1994) además plantea la necesidad de analizar y clasificar la variedad de significantes lingüísticos y simbólicos que podemos usar cuando nos comunicamos y pensamos acerca del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Considera que una tarea empírica y teórica esencial para los investigadores es entender por qué una representación simbólica particular puede ser útil, bajo qué condiciones, cuándo y por qué puede ser adecuadamente reemplazada por otra más general y abstracta. También expone la necesidad de poner gran atención a la dificultad comparativa de diferentes clases de problemas y procedimientos y las diferentes expresiones verbales y escritas producidas por los estudiantes (p. 43).

Para la matemática elemental propone dos *campos conceptuales* a partir de los cuales se pueden clasificar los problemas matemáticos: el de las *estructuras aditivas* y el de las *estructuras multiplicativas*. El primero lo define como el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones. El campo conceptual de las estructuras multiplicativas lo define como el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación o una división o una combinación de tales operaciones. Para las finalidades de este trabajo se describirán los cuatro grandes tipos de problemas de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1990).

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas

Vergnaud menciona que en las estructuras multiplicativas, a diferencia de las aditivas, “las relaciones de base más simples no son ternarias sino cuaternarias, porque los problemas más simples de multiplicación y de división implican la proporción simple de dos variables una en relación con la otra” (1990, p. 153).

Propone un sistema de representación gráfico para mostrar las relaciones entre las magnitudes de los datos de los problemas que favorece su análisis. Usa los rectángulos para los estados y los redondeles para las transformaciones o las relaciones. En la Figura 2 se representan las relaciones de base más simples en las estructuras multiplicativas.

Puesto que se trata de establecer la relación entre el número de pasos y la distancia recorrida en metros para calcular el valor unitario de un paso, se ubica este problema en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas en los tipos de problemas de isomorfismo de medidas (Vergnaud, 2004, p. 218).

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

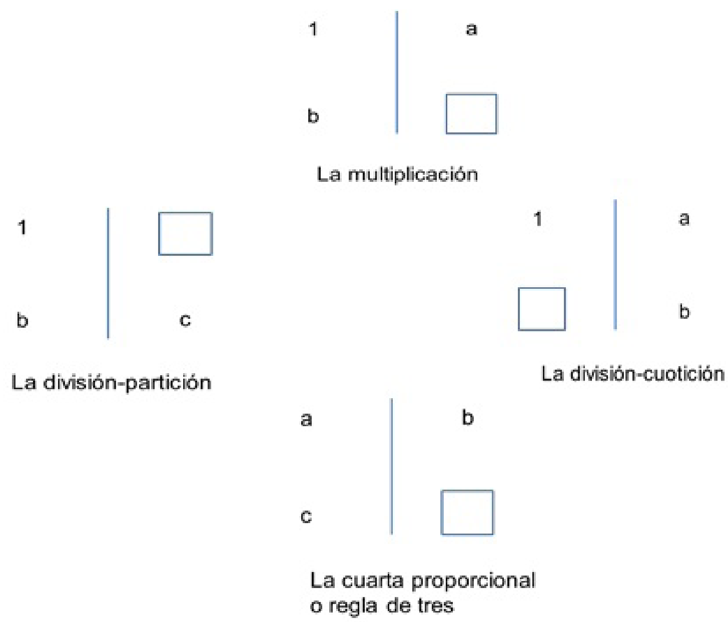


Figura 2. Esquemas de relaciones del campo conceptual de las estructuras multiplicativas

En la Figura 3 se muestra el esquema que representa estas relaciones.

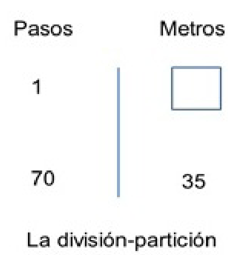


Figura 3. Esquema de relaciones del problema de pasos

Se trata de un problema que busca el valor de una parte o un objeto, en este caso el tamaño de los pasos. Se retoma y adapta el análisis de las propiedades matemáticas que hace Vergnaud (2001, p. 215) en este tipo de problemas, para encontrar la solución de éste, donde considera que es necesario reconocer una propiedad de la función lineal f

que une la medida de la distancia recorrida con el número de pasos correspondiente:

$$f(\text{nx1}) = \text{n}f(1) \Rightarrow f(1) = f\ (\text{nx1})/\text{n}$$

Esto significa que el tamaño de *n* veces un paso (70 pasos) es igual a *n* veces el tamaño de un paso (35 metros); por lo tanto, el tamaño de un paso es igual al tamaño de *n* veces un paso (35 metros) entre *n* veces (70).

Si sustituimos los valores del problema en el planteamiento anterior se obtendría:

$$70 \text{ pasos} = 35 \text{ metros} \Rightarrow 1 \text{ paso} = 35 \text{ metros} / 70$$

Por supuesto que los estudiantes, al enfrentar esta situación, si reconocen estas propiedades no significa necesariamente que puedan expresarlas lingüísticamente; se trata entonces de un teorema-en-acto. El esquema gráfico que muestra esta relación de la función lineal se muestra en la Figura 4.

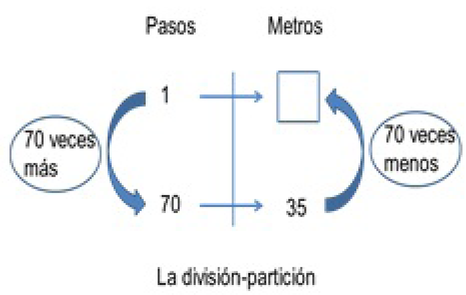


Figura 4. Esquema de relaciones de la función lineal

Estas relaciones operan bajo cantidades escalares, es decir, sin dimensión. Si la relación de un paso a 70 pasos es 70 veces más (se aplica el operador escalar x70), entonces el valor unitario de un paso se obtiene aplicando la recíproca de esa relación. El valor de un paso es 35 metros "70 veces menos", o para ser más precisos con el lenguaje: 70 veces menor (se aplica el operador escalar inverso ([:70]). Este procedimiento de solución de tipo escalar (vertical en el esquema) establece la relación entre magnitudes del mismo tipo: pasos con pasos y metros con metros.

Otra posibilidad en el cálculo relacional que Vergnaud analiza es la de operar sobre los coeficientes de proporcionalidad entre las dos variables (relaciones horizontales en el esquema, ver Figura 5).

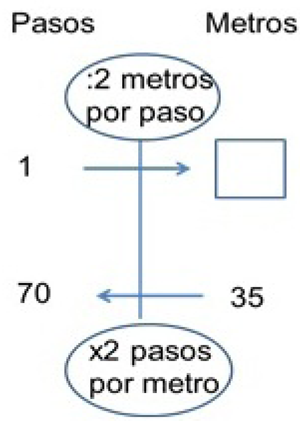


Figura 5. Esquema de relaciones operando sobre los coeficientes de proporcionalidad

Si el razonamiento opera sobre el cociente proporcionalidad de dos magnitudes diferentes, se identifica que uno es el doble del otro, entonces la relación para pasar de 35 metros a 70 pasos es la operación de multiplicación x2; pasos por metro, pero de acuerdo con Vergnaud, esta multiplicación no significa dos veces más sino que se trata de un coeficiente de proporcionalidad que une dos variables, la una con la otra (2 pasos por metro), es decir una composición de medidas. Quiere decir que en la otra relación, para pasar de un paso a metros se debe aplicar la operación inversa que sería :2, que tampoco significa dos veces menos, sino dividir entre dos metros por paso; el resultado sería 0.5 metros.

El teorema sobre el que reposa este razonamiento lo plantea Vergnaud (2001) en estos términos:

$$f(n) = 2n(1) \rightarrow (1) = f(n)/2n$$

El operador funcional se constituye, según Vergnaud (2001), en un nivel más elaborado puesto que implica no sólo la noción de relación numérica, sino también la de cociente de dimensiones. Hasta ahora no se cuenta con datos de que algún estudiante de la muestra que haya optado por este procedimiento.

La composición de medidas podría ser equivalente a lo que Schwartz (1988) propone como "medidas intensivas" (derivadas de relaciones proporcionales) como cociente de dos cantidades extensivas (sujetas a relaciones aditivas).

Sin embargo, dado que se usa como referente teórico la propuesta de Vergnaud, se optó por emplear su terminología; además se considera que la noción de composición de medidas es didácticamente más productiva que la propuesta por Schwartz de medidas intensivas.

Por lo tanto, el problema así planteado a los estudiantes tiene las siguientes características:

- Se establecen relaciones entre cuatro datos: dos explícitos (35 metros y 70 pasos), uno implícito (el valor unitario del paso) y la incógnita (la medida del paso).
- Se ubica en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.
- Se trata de un problema de isomorfismo de medidas del tipo división-reparto.
- El nivel de dificultad es alto porque no se da el valor unitario de una de las magnitudes.
- El número de pasos es el doble del número de metros, relación que los niños identifican pero no es suficiente para realizar el cálculo adecuado.
- La división correspondiente es de cociente decimal menor a uno.

Se trabajaron algunas variaciones del problema bajo algunas hipótesis generadas a partir de los análisis previos de las entrevistas realizadas en el reporte de investigación "Los lectores y sus contextos" (Vaca et al., 2010).

Algunas de las hipótesis fueron:

- La presencia de una información innecesaria en el texto del problema repercute en los resultados obtenidos.
- Es posible que los estudiantes establezcan con mayor facilidad la relación entre las magnitudes 20 y 40 que entre 35 y 70.
- El uso de la calculadora favorece que más estudiantes resuelvan correctamente el problema.
- Algunos estudiantes usarán las propiedades del sistema de escritura alfabético para la escritura de la notación matemática, en este caso para la escritura de la división. (Esta hipótesis no puede ser analizada con los datos reportados en este artículo).

A partir de estas hipótesis se diseñaron cuatros versiones del problema arriba mencionado, que mantienen su estructura relacional pero que varían ya sea en las magnitudes de las medidas o en la presencia o ausencia de información innecesaria. Las cuatro versiones se describen en el siguiente apartado.

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

2. Metodología

Instrumentos

Se trata de cuatro versiones de un problema, cada versión presenta alguna modificación que nos permite observar aspectos muy específicos y consideramos que cada una de ellas tiene diferente nivel de dificultad: por los valores numéricos usados, por la presencia de información innecesaria o inútil que llamamos un "distractor", aunque la estructura del problema es la misma.

Versiones del problema

Versión A. Con distractor ("en un minuto") y con la relación 35/70.

En un minuto, Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Versión B. Sin distractor y con la relación 35/70.

Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Versión C. Con distractor ("en un minuto") y con la relación 20/40.

En un minuto, Héctor camina 20 metros y da 40 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Versión D. Sin distractor y con la relación 20/40.

Héctor camina 20 metros y da 40 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Referente empírico

El número de estudiantes que enfrentaron estas versiones del problema son 329; 161 son mujeres y 168 son hombres. Estos estudiantes pertenecen al último grado escolar tanto de primaria como de secundaria de cinco escuelas públicas del estado de Veracruz: tres de primaria (una rural y dos urbanas) y dos de secundaria (una de contexto rural y la otra de contexto urbano). La distribución de los estudiantes por escuela y por género se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Distribución de los estudiantes por género y escuela

Escuela	Mujeres	Hombres	Total general
Primaria A Urbana	27	42	69
Primaria B Urbana	21	25	70
Primaria C Rural	31	26	57
Secundaria A Urbana	64	58	122
Secundaria B Rural	18	17	35
Total general	**161**	**168**	**329**

Las edades son entre 10 y 16 años como se muestra en la Tabla 2. En promedio, los estudiantes de primaria tienen 11.9 años y los de secundaria 14.4 años.

Tabla 2. Distribución de las edades de los estudiantes

Edad en años	Primaria N	Secundaria N	Total general	
			N	%
10	3		3	0.9
11	98		98	29.7
12	55		55	16.7
13	10	7	17	5.1
14	4	98	102	31.0
15	1	41	42	12.7
16		6	6	1.8
(en blanco)	1	5	6	1.8
Total general	**172**	**157**	**329**	**100**

Aplicación del instrumento

La aplicación de los instrumentos se realizó en sus salones de clase, en un momento otorgado amablemente por los profesores. En total se trabajó con 13 grupos de las cinco escuelas; a la mitad de los grupos se le distribuyó una calculadora que tenían a su disposición para que libremente pudieran emplearla si así lo decidían. La otra mitad de los grupos no tuvo acceso a la calculadora.

La distribución de los grupos según el uso de la calculadora se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución de los grupos y la disponibilidad de calculadora

Escuelas	Grupos	Sin calc.	Con calc.
Primaria A	a	0	35
	b	34	0
Primaria B	a	0	24
	b	22	0
Primaria C	a	0	19
	b	20	0
	c	9	9
Secundaria A	g	0	36
	h	29	0
	i	25	0
	j	0	32
Secundaria B	a	0	18
	b	17	0
	Total general	**156**	**173**

En el caso de la primaria C, que tiene tres grupos de sexto grado, al grupo *a* se le permitió el uso de la calculadora, al grupo *b* no y en el grupo *c* sólo se le permitió a la mitad de los estudiantes.

Los grupos se organizaron de tal manera que en un extremo se ubicaran los hombres y en el otro las mujeres, con la finalidad de distribuir las versiones del problema entre los estudiantes y tener subgrupos relativamente iguales.

Se le entregó a cada estudiante una hoja con sólo una de las cuatro versiones del problema; dicha hoja se colocó de manera invertida para que cuando se terminara de

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

repartir a todo el grupo, se diera la instrucción de voltear la hoja y todos empezaran al mismo tiempo. Se les pidió que resolvieran el problema con bolígrafo para evitar que borraran y que, en caso de equivocarse, podían tachar lo que quisieran y continuar en otro lado.

Se dio la instrucción para que los estudiantes llenaran los datos de identificación en la hoja y posteriormente contestaran la pregunta.

Cuando algún estudiante terminaba se le pedía que volteara su hoja y que en silencio esperara a que todos sus compañeros terminaran. Sólo hasta que el último estudiante terminaba se recogían las hojas en el mismo orden en que se entregaron.

Es importante destacar que la situación de aplicación de los instrumentos se da en el contexto escolar, en presencia de los profesores y en ocasiones de los directores de las escuelas, quienes presentan a los aplicadores ante los estudiantes. Además, las instrucciones dadas a los alumnos, el arreglo de las butacas, el cuidado de los aplicadores para entregar y recoger los instrumentos son características propias de un contexto de evaluación escolar. Por lo anterior, se asume que en esta situación las respuestas de los estudiantes están mediadas por un contrato didáctico (Brousseau, 1997).

3. Resultados

¿Cuántos alumnos lo resolvieron de la manera esperada? Del total de 329 estudiantes, 113 (34%) dieron la respuesta que se considera correcta para los fines de la investigación; es decir, que indican la medida de un paso por medio de la magnitud y las unidades de referencia (medio metro o sus equivalentes). Una tercera parte de los estudiantes respondió adecuadamente, lo que significa que para el resto (dos terceras partes del total), estos problemas presentan dificultades para su resolución. Se analizan a continuación los resultados en función de algunas variables como sexo, nivel educativo, localidad, disponibilidad de la calculadora y las versiones del problema.

En cuanto a los resultados obtenidos por hombres y mujeres, se observa que, efectivamente, hay más hombres que llegan a la respuesta correcta que mujeres y la diferencia es significativa (Tabla 4).

Tabla 4. Resultados por sexo. Prueba Chi2 = 4.663, sig .031

Sexo	Incorrectos	Correctos	Total general
Femenino	71% **115** 53%	29% **46** 41%	100% **216** 49%
Masculino	60% **101** 47%	40% **67** 49%	100% **113** 51%
Total	66% **216** 100%	34% **113** 100%	100% **329** 100%

Por nivel educativo, los resultados de la Tabla 5 indican que los estudiantes de secundaria obtienen mejores resultados que los de primaria.

Tabla 5. Resultados por nivel educativo

Nivel	Incorrecto	Correcto	Total general
Primaria	79% **136** 63%	21% **36** 32%	100% **172** 52%
Secundaria	51% **80** 37%	49% **77** 68%	100% **157** 48%
Total	72% **216** 100%	28% **113** 100%	100% **329** 100%

En primaria la mayoría tuvo un resultado incorrecto (79%); en cambio, en la secundaria los porcentajes se asemejan: casi la mitad lo resolvió correctamente.

Como se esperaba, más estudiantes de secundaria lograron un resultado correcto con respecto a los de primaria. Hasta cierto punto es obvio puesto que han tenido la oportunidad de enfrentar mayor cantidad de situaciones problemáticas y, por lo tanto, tuvieron mayores probabilidades de haber construido o enriquecido esquemas

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

para enfrentar de mejor manera problemas de este tipo. Sin embargo, es necesario resaltar el hecho de que hubo estudiantes de primaria que dieron una respuesta correcta, mientras que otros de secundaria no lo lograron.

Los resultados obtenidos en las localidades rural y urbana son prácticamente los mismos (Tabla 6), no hay diferencias significativas. Sin embargo, se esperaba alguna diferencia debido a que, en un estudio previo (Vaca et al., 2010) se reportó que más estudiantes en localidades rurales consideraban la factibilidad real de sus respuestas; a diferencia de aquellos que, al obtener como resultado pasos de 2 metros o de 2 cm, no les resultaba extraño y tampoco tomaban en consideración su relación con la realidad.

En un reporte de investigación, Chain, Ortega, Vaca, Bustamante, Ojeda, Velasco, Hernández y López (2009) analizaron algunos ítems de la prueba ENLACE y reportaron que algunos reactivos requerían el cálculo del peso de una vaca en gramos o la capacidad de un tinaco en mililitros. Seguramente, dichos reactivos fueron creados por los diseñadores bajo la idea de que el estudiante mostrara la capacidad de operar con números grandes y además en situaciones de la "vida cotidiana".

Los estudiantes, entonces, se familiarizan cada vez más con situaciones que generan resultados que podrían no comparar con la realidad y, por lo tanto, encontrar dificultades para determinar su factibilidad real.

Tabla 6. Distribución de los resultados por tipo de localidad

Localidad	Incorrecto	Correcto	Total general
Urbana	67% **156** 72%	34% **81** 72%	100% **237** 72%
Rural	65% **60** 28%	35% **32** 28%	100% **92** 27%
Total	66% **216** 100%	34% **113** 100%	100% **329** 100%

Estos datos indican que no hay diferencias significativas entre las localidades, por lo menos en el resultado final (Prueba Chi^2 = .011 sig. = .917).

Con respecto a la disponibilidad de la calculadora, estos resultados (Tabla 7) muestran que no hay diferencia significativa entre los estudiantes que tuvieron a su disposición una calculadora y los que no la tuvieron.

Tabla 7. Resultados en función de la calculadora. Chi2 = 1.684 sig. 194

Disponibilidad	Incorrecto	Correcto	Total general
Sin calculadora	69% **108** 50%	31% **48** 42%	100% **156** 47%
Con calculadora	62% **108** 50%	38% **65** 58%	100% **173** 53%
Total	66% **216** 100%	34% **113** 100%	100% **329** 100%

Es posible analizar esta tabla en dos sentidos. En el sentido vertical vemos que de los 216 estudiantes que no dieron la respuesta correcta, la mitad tenía a su disposición una calculadora y la otra mitad no. De los 113 estudiantes que resolvieron el problema correctamente, el 58% pudo beneficiarse del dispositivo tecnológico. En el sentido horizontal vemos que de los 156 estudiantes que resolvieron el problema sin calculadora, el 31% logró una respuesta correcta. De los que tuvieron calculadora (en total 173), el 38% obtiene una respuesta correcta. Estos datos pueden indicar que el uso de la calculadora no garantiza mejores resultados si no se comprende adecuadamente el problema o no se sabe interpretar el resultado obtenido.

Algunos profesores de los profesores de las primarias seleccionadas con los que se ha conversado mencionan que ellos evitan que sus estudiantes usen la calculadora porque consideran que no les permite afianzar las cuatro operaciones básicas de la aritmética elemental; sin embargo, en secundaria la mayoría de los estudiantes emplea de manera cotidiana la calculadora y su uso está más permitido por los maestros. Por otra parte, esta aparente ventaja pudo convertirse en desventaja cuando los estudiantes de secundaria no tuvieron a su disposición una calculadora y la posible falta de práctica con los algoritmos pudieron causar dificultades en la resolución. Estas dificultades con el algoritmo se aprecian en los rodeos que algunos hicieron para encontrar el cociente de la división o en el manejo del punto decimal y en la posición del cociente, por ejemplo.

En la Tabla 8 se muestran los resultados obtenidos según la versión del problema. Recuérdese que entre la versión A y la B la diferencia radica en que la primera contiene un dato irrelevante (un minuto) que funciona como un distractor (c/d) y la segunda no lo tiene (s/d), por lo que se considera a esta última como de menor grado de dificultad. Lo mismo sucede con las versiones C y D.

Tabla 8. Resultados según la versión del problema

Versión	Incorrectos	Correctos	Total
A (c/d, 35/70)	74% **64** 30%	26% **23** 20%	100% **87** 26%
B (s/d, 35/70)	58% **49** 23%	42% **35** 31%	100% **84** 26%
C (c/d, 20/40)	71% **57** 26%	29% **23** 20%	100% **80** 24%
D (s/d, 20/40)	59% **46** 21%	41% **32** 28%	100% **78** 24%
Total	66% **216** 100%	34% **113** 100%	100% **329** 100%

Los datos muestran que, en efecto, más estudiantes resuelven correctamente la versión B que la A (42% contra 26%) y, de igual manera, en las versiones con cantidades "transparentes" (20 y 40) más estudiantes resuelven correctamente la versión D que la versión C (41% contra 29%).

Al unir las versiones con el dato distractor A y C y al contrastarla con la unión de las versiones B y D, que no lo tienen, se observa con mayor claridad la diferencia entre los resultados obtenidos (ver Tabla 9).

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

Tabla 9. Distribución según las versiones con distractor o sin él

Versiones	Incorrectos	Correctos	Total
Con distractor (A y C)	121 (72%)	46 (28%)	167 (100%)
Sin distractor (B y D)	95 (58%)	67 (42%)	162 (100%)
Total	216 (66%)	113 (44%)	329 (100%)

La diferencia es significativa (con .008 de sig.), y esto sugiere que los estudiantes pueden enfrentar una situación problemática aplicando esquemas de resolución guiados por la creencia (teorema-en-acto) de que "todos los datos que aparecen en el texto de un problema se deben usar en la resolución". Es a través de enfrentar diversas situaciones problemáticas, con variaciones en la pertinencia o no de emplear algunos datos, que los estudiantes podrían modificar esta idea y les permitiría entonces concentrarse en encontrar las relaciones entre los datos y descartar los innecesarios.

La diferencia entre las versiones A y B y las versiones C y D es que los valores numéricos en el texto del problema cambian, de ser 35 y 70 en las primeras, a 20 y 40 en las segundas. Esta diferencia se realizó bajo la hipótesis de que los valores numéricos podrían facilitar o dificultar encontrar la relación proporcional entre ellos. Nuevamente, si se agrupan las versiones en función del tipo de magnitudes (Tabla 10), se observa que no hay diferencias importantes ($Chi^2 = .029$ con sig. = .865).

Tabla 10. Distribución en función del tipo de las magnitudes

Versiones	Incorrectos	Correctos	Total
35/70 (A y B)	113 (66%)	58 (34%)	171 (100%)
20/40 (C y D)	103 (65%)	55 (35%)	158 (100%)
Total	216 (66%)	113 (44%)	329 (100%)

Con estos datos se puede inferir que, para este problema en particular, representar las relaciones entre los datos a fin de descartar los que no sean pertinentes para el cálculo, es una actividad de mayor complejidad que el cálculo propiamente en función de las magnitudes empleadas. Sin embargo, también se sabe que las magnitudes pueden cambiar las condiciones del problema: si se emplean cantidades muy grandes o muy pequeñas, decimales o enteros y también en función del domino de la experiencia, como lo reporta Vergnaud (1994).

Los resultados anteriores indican que una parte de los estudiantes que enfrentaron el problema lo resolvió correctamente, y por lo tanto dos terceras partes no. Es de esperarse debido a que se trata de un "problema" y debe ofrecer ciertas resistencias a los estudiantes. Las dificultades propiciadas nos dan la oportunidad de analizar cuáles fueron las razones por las que prácticamente esas dos terceras partes no lo resolvieron el problema adecuadamente. Para ello, las respuestas que los estudiantes escribieron, se clasificaron en seis categorías, que de alguna manera indican la representación que se hicieron del problema y sus procedimientos de resolución.

4. Análisis de las dificultades

Resultados por categorías de respuesta

En la Tabla 11 se presenta la distribución de los resultados de las seis categorías en las que se clasificaron las 329 respuestas de los alumnos, tanto de primaria como de secundaria.

Tabla 11. Distribución de los resultados por categorías

Categoría	Frecuencia	Porcentaje
1	113	34.4%
2	23	7.0%
3	24	7.3%
4	64	19.5%
5	23	7.0%
6a	20	6.1%
6b	21	6.4%
6c	17	5.2%
6d	18	5.5%
6e	6	1.8%
Total	329	100%

Categoría 1. Respuesta correcta

En esta categoría se ubicaron las respuestas que consideramos correctas (N = 113, 34.4%) y pueden expresarse de varias maneras según el procedimiento realizado para obtenerlas; por ejemplo, quien contestó ½ metro pudo no hacer operaciones escritas y llegar a ese resultado por cálculo mental (sin descartar que pueda hacer comprobaciones escritas).

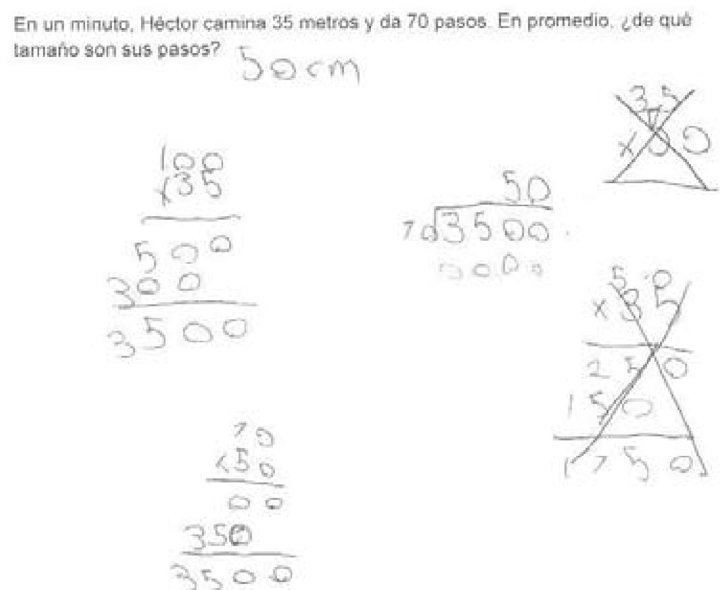


Figura 6. Problema A, Brandon de 11 años 8 meses (11,8) escuela primaria A (urbana), sin calculadora

En el ejemplo (Figura 6), Brandon llegó a la respuesta correcta, lo que implica haber coordinado varios procesos sin descuidar ninguno de ellos:

- En primer lugar cuenta con un esquema que identifica el problema como un problema de proporcionalidad, que le permite reconocer las invariantes operatorias, generar un procedimiento de resolución, controlar su desempeño.
- Este esquema le permite interpretar adecuadamente el enunciado del problema (lectura del problema). Comprendió que lo que se pide es el promedio de cada paso de Héctor, puesto que puede haber pasos de diferentes tama-

ños cuando se camina y recorrer la misma distancia con el mismo número de pasos.
- Estableció las relaciones pertinentes entre los datos. El esquema de solución de Brandon le permite ubicar al problema dentro de las situaciones de proporcionalidad. La división que realiza tiene como base el teorema analizado más arriba:

$$f(\text{nx1}) = \text{n}f(1) \Rightarrow f(1) = f\ (\text{nx1})/\text{n}$$

Que en castellano significaría (retomando el análisis que Vergnaud, 2001, hace de esta propiedad) "el tamaño de 70 veces un paso (35 metros) es igual a 70 veces el tamaño de un paso, por lo tanto, el tamaño de un paso es igual al tamaño de 70 veces un paso (35 metros) entre 70 veces. De ahí la división de 35/70.
- Operó con los escalares, es decir, de manera vertical en el análisis de la Figura 4. En caso de operar de manera horizontal la división tendría que haber sido 1/2, procedimiento también correcto que hasta ahora no se ha encontrado en los estudiantes que han resuelto este problema.
- Logró determinar la unidad de referencia correcta para el resultado numérico, aunque se aprecia que tiene dificultades para el manejo adecuado de los números decimales en la división, opta por convertir el resultado a números enteros multiplicando el dividendo por 100 y lo escribe convencionalmente (50 cm).
- Identifica acertadamente que el dato del tiempo es irrelevante y no lo toma en cuenta en sus cálculos.
- Hace correctamente los cálculos numéricos aunque con algunos rodeos.

En el resto de las categorías se agrupan las respuestas de todos los estudiantes que no resolvieron correctamente el problema, porque enfrentaron alguna dificultad en uno o varios puntos de los anteriores.

Categoría 2. Dificultades con las unidades de medida (N = 23, 6.9%)

En esta categoría se ubican los resultados de los estudiantes que llegan al resultado numérico correcto pero que le asignan una unidad de medida equivocada.

El ejemplo prototípico es el de Miguel Ángel (11,6), de sexto grado de primaria de una localidad rural (Figura 7).

La división que elige reposa sobre el reconocimiento de las relaciones proporcionales implicadas en el problema, aplica correctamente el algoritmo con el apoyo

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

de otras multiplicaciones para ubicar el cociente y maneja adecuadamente el punto decimal en la división. Sin embargo, al final escribe "5 cm". como resultado.

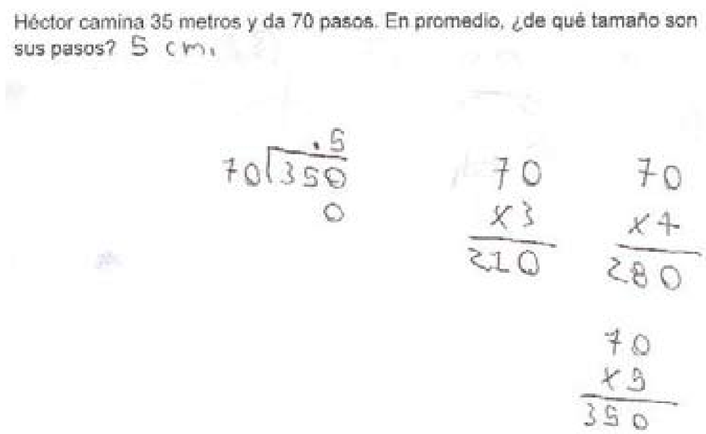


Figura 7. Ejemplo de resolución clasificado en la categoría 2

En la mayoría de las respuestas clasificadas en esta categoría se identifica un problema en la claridad conceptual de dos nociones: los números decimales y el sistema métrico decimal, que combinados producen respuestas como "5 cm", ".5 cm", "5 mm". Aunque requiere de un análisis más detallado, se puede adelantar que se trata de nociones en proceso de construcción, y por lo tanto no logran coordinarse adecuadamente.

En el ejemplo mostrado, Miguel Ángel llega al resultado numérico .5 por medio del algoritmo (pero sucede lo mismo con quienes usan la calculadora) y se enfrenta al dilema de qué unidad de medida asignar. Como seguramente ha estado trabajando con las unidades "metros y pasos", pudo pensar que pasos no, porque de eso se trata la incógnita, entonces sólo queda la posibilidad de usar metros; pero por la experiencia que han tenido con los números decimales, él sabe que representan una fracción de la unidad, entonces posiblemente considera que se trata de una contradicción escribir ".5 metros". Algunos comentarios de los estudiantes son que los metros son enteros, como cantidades discretas (posiblemente se representan un metro como las reglas de madera que usan los maestros en el pizarrón que tienen esa medida metro y que así se les llama: "metro") y por lo tanto no puede estar acompañado de un número decimal; entonces posiblemente deducen que deben ser centímetros y eso explica las respuestas ".5 cm" o, en este caso, "5 cm".

Aceptar que sí es posible escribir ".5 metros" requiere conceptualizar el metro

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

como cantidad continua y las características y lógica tanto del sistema métrico decimal como del sistema de numeración decimal.

Es importante aclarar que se buscarán confirmar las interpretaciones anteriores, y algunas de las siguientes, por medio de las entrevistas clínicas en la siguiente fase de la investigación. Para este análisis sólo se contó con las producciones gráficas de los estudiantes y, por lo tanto, la información es limitada.

Categoría 3. Resultado numérico correcto pero sin unidades de referencia

En la categoría 3 (N = 24, 7.29%) se agrupan aquellos estudiantes que posiblemente no quisieron enfrentar ese dilema y decidieron no escribir nada o no lo consideraron importante. Como Jeovany (14,0), que con algunos intentos llega al resultado numérico ".5" pero no agrega unidades al resultado final (Figura 8).

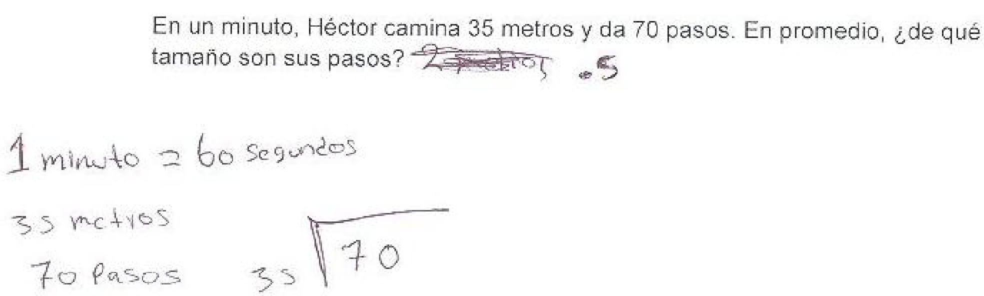


Figura 8. Ejemplo de resolución ubicado en la categoría 3

En este ejemplo se puede observar que identificó los datos del problema, descartó correctamente el tiempo e inicialmente operó con la división 70/35 y obtuvo como resultado dos metros, que también descartó; quizá consideró que no era posible dar pasos de ese tamaño y por medio de otro cálculo no representado gráficamente llegó al resultado ".5" sin definir las unidades de referencia.

Categoría 4. Inversión de los datos en la división y el resultado con unidades de referencia

En esta categoría se agrupan los resultados de los estudiantes que optan por la división 70 pasos/35 metros (N = 64, 19.45%); comprendieron el enunciado del problema, eligieron correctamente los datos y el algoritmo adecuado, obtuvieron como resultado 2, la mayoría asignó una unidad de longitud como metros (Figura 9).

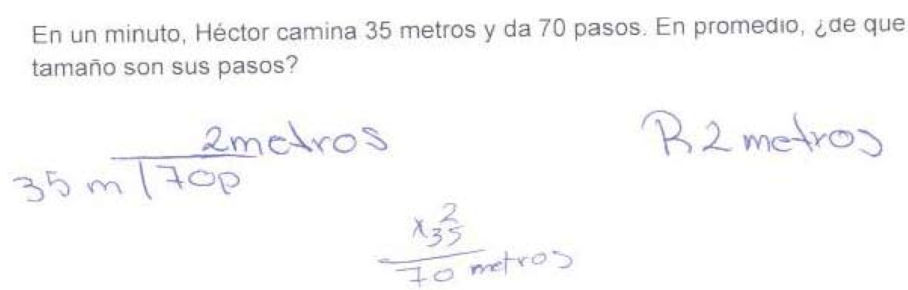


Figura 9. Ejemplo de resolución de la categoría 4

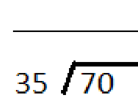
Algunos estudiantes que dieron una respuesta correcta (Categoría 1), antes pasaron por este procedimiento, como en el ejemplo anterior, pero probablemente no consideraron factible que una persona pudiera dar pasos de 2 metros; entonces piensan en otra alternativa: invierten el divisor y el dividendo o modifican la interpretación del resultado a 2 pasos por cada metro (poco frecuente) y llegan al resultado correcto.

Quienes dan por respuesta *dos metros*, significa que dividieron 70/35 en lugar de 35/70 como correspondería según el cálculo relacional por medio de operadores escalares descrito en el análisis de las relaciones representadas en la Figura 3.

¿Cuál es la razón por la que los estudiantes en lugar de dividir 35/70 dividen 70/35?

Se considera que hay al menos tres posibilidades:

- Hay una coordinación entre el sistema de representación de la escritura alfabética que influye en la escritura del algoritmo; de tal manera que los estudiantes escriben la división en el orden y direccionalidad de la escritura alfabética. Es decir, si deciden dividir 35/70 y lo escriben en el orden en que se expresa oralmente y de izquierda a derecha, producen una representación gráfica como la siguiente: escriben en primer lugar el 35, luego a la derecha de éste escriben la galera y, al final, dentro de ella, el 70. Con lo anterior queda representado de manera gráfica (la flecha indica la direccionalidad de la escritura):



- Operan bajo el terorema-en-acto “en la división el número mayor toma el rol de dividendo y el número menor el de divisor”.

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

- En ambas posibilidades también se puede inferir que no hay dominio cabal del algoritmo y el significado de cada uno de sus elementos que les ayude a determinar cómo colocar los datos dentro de la división de acuerdo con las relaciones entre las medidas.

Las tres posibilidades no son excluyentes entre sí y se requiere profundizar a través de las entrevistas clínicas para confirmarlas. Sin embargo, los resultados obtenidos por el estudio de Fischbein, Deri, Sainatiy Sciolis (1985) muestran que efectivamente los estudiantes operan bajo el modelo tácito de las características de los números en la operación para decidir su rol en la operación y, por lo tanto, explica por qué, en este grupo de respuestas y el de la siguiente categoría, en total forman un poco más de una cuarta parte de las respuestas (26.35%).

Por supuesto que este planteamiento también puede ser interpretado en términos del contrato didáctico y seguramente interviene en función de las relaciones establecidas entre el maestro, los estudiantes y la división, puesto que durante la enseñanza del algoritmo se emplean tipos de problemas con estas características que son el primer acercamiento de los estudiantes para desarrollar invariantes que siguen dirigiendo su actividad hasta que enfrenten nuevas situaciones que las pongan a prueba. Estas invariantes son las que desde la perspectiva de Vergnaud se denominan teoremas y conceptos-en-acto.

Quien acepta este resultado como correcto, generalmente tampoco evalúa la viabilidad de dar pasos de dos metros en el mundo real y, por lo tanto, no le causa ningún problema. Sin embargo, hay quien sí lo hace y aun así mantiene su resultado y resuelve el conflicto asimilando el texto del problema al resultado obtenido. Por ejemplo, Juan Pablo (12, 3) de la escuela primaria C (rural), quien dice: "No camina, brinca y da saltos de dos metros" (Figura 10).

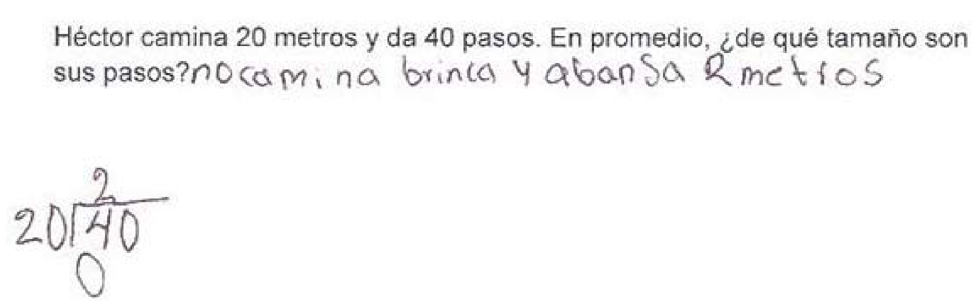


Figura 10. Modificación del texto del problema por un resultado incorrecto

Categoría 5. Inversión de los datos de la visión sin unidades de referencia

Los resultados de esta categoría tienen las mismas características de la anterior, la diferencia radica en que sólo dan el valor de la magnitud pero sin unidades de referencia (N = 3, 6.9%). Puede significar que los estudiantes no tuvieron claridad en el resultado que obtuvieron y prefirieron no escribir unidades o no las consideraron como parte de la respuesta. Por ejemplo, Jaqueline (13, 11) de la secundaria urbana (Figura 11), obtiene como resultado 2 y de esa manera lo escribe, sin que necesite una unidad de referencia.

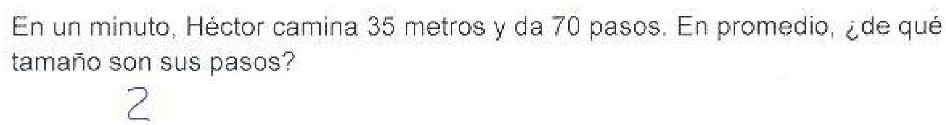

En un minuto, Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?
2

Figura 11. Ejemplo de resolución de la categoría 5

Categoría 6. Incomprensión de las relaciones entre los datos

En esta categoría se agruparon los resultados que nos hacen inferir que los alumnos no comprendieron la relación entre las cantidades expresadas en el enunciado del problema o no se comprometieron en su resolución (N = 82, 25%). No establecieron esa relación proporcional y, por lo tanto, sus procedimientos de resolución se orientan a realizar alguna o varias operaciones con los datos del problema, agregando o no unidades de medida, o deciden realizar alguna aproximación intuitiva del tamaño de los pasos. Es necesario destacar que una cuarta parte de los estudiantes son los que podríamos decir que no comprendieron el problema o que en esa situación específica no contaban con los esquemas necesarios para enfrentarlo adecuadamente. De ese 25%, más de la mitad son estudiantes de primaria (65.8%).

Los estudiantes que dieron su respuesta clasificada en esta categoría, posiblemente no han enfrentado situaciones problemáticas diversas que les ayuden a construir las nociones involucradas en el problema y, por lo tanto, los procedimientos de resolución.

Esta categoría se dividió en 5 subcategorías, por las características de los resultados (Tabla 12).

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Tabla 12. Distribución de las subcategorías de la categoría 6

Subcategorías	Primaria	Secundaria	Total	%
6 a	16	4	20	24
6 b	16	5	21	26
6 c	11	6	17	21
6 d	6	12	18	22
6 e	5	1	6	7
Total	54	28	82	100

Subcategoría 6a. Aquí se agruparon los resultados que nos permiten inferir que los estudiantes tratan de cumplir con la expectativa de la situación, y consideran que lo que se espera de ellos ante un problema matemático es que hagan alguna operación y den una respuesta, pero como no tienen claridad al establecer las relaciones entre los datos del problema, entonces algunos optan por multiplicarlos, otros por sumarlos o restarlos y dan un resultado al que le asignan alguna unidad de medida (N = 20, 24%).

Ernesto (11,9), de la escuela primaria A, nos da un ejemplo típico de esta clase de resolución (Figura 12).

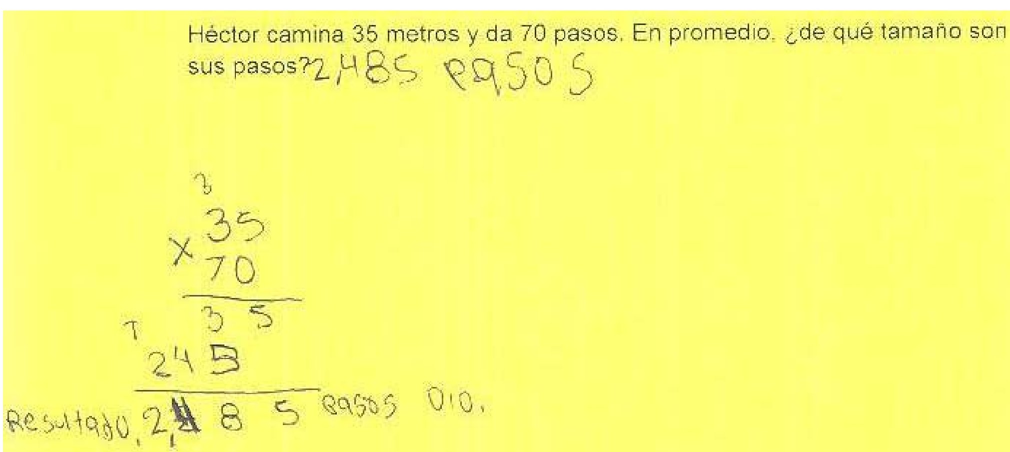


Figura 12. Resolución prototípica de la sub-categoría 6a

Subcategoría 6b. Si los estudiantes no agregan unidades, se clasificaron en este grupo (N = 21, 26%). Estos datos, junto con los correspondientes a las categorías en las que no agregan unidades, nos permiten inferir que la asignación de unidades es una de las principales dificultades que los estudiantes experimentan al resolver un problema, y por lo tanto un tema importante para considerar por parte de los maestros.

Es el caso de Jaqueline (14,4), de secundaria urbana, quien como proceso de resolución aplica una división y una multiplicación a los datos del problema y no asigna unidades de referencia al resultado numérico (Figura 13).

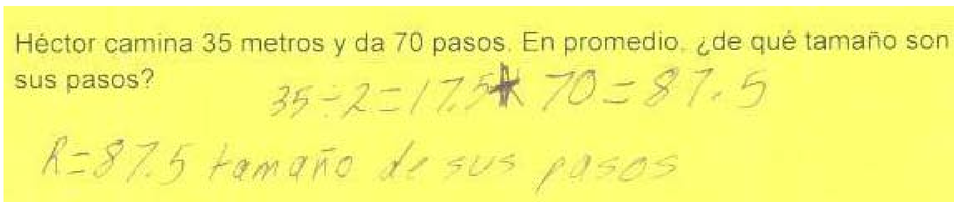


Figura 13. Ejemplo de resolución de la subcategoría 6b

Subcategoría 6c. En esta sub-categoría se agrupan los resultados de los alumnos que hacen una aproximación del tamaño de los pasos, pero que aparentemente no tomaron en cuenta los datos del problema o, en caso de haberlos considerado, no los emplearon para operar aritméticamente, y dan respuestas basadas en una aproximación intuitiva usando unidades de longitud del sistema métrico decimal para expresar la medida de los pasos (N = 17, 21%).

Viviana (14, 6), de la secundaria urbana, da dos opciones de resultado sin que medie alguna operación escrita, aparentemente por aproximación (Figura 14).

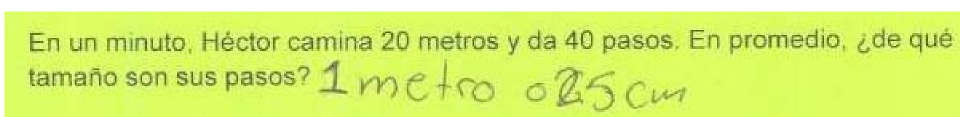


Figura 14. Ejemplo de resolución de la sub-categoría 6c

Subcategoría 6d. Aquí se ubicaron los resultados de quienes hacen la misma aproximación pero sin usar unidades de longitud del sistema métrico decimal como referente para sus respuestas, y dan respuestas como “chicos”, “medianos”, “normales” (N = 18, 22%). Estos resultados se obtienen tanto en primaria como secundaria; por ejemplo, Ángel (14,9), de la secundaria urbana, primero piensa que deben ser pequeños y luego corrige y se decide por grandes (Figura 15).

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308


En un minuto, Héctor camina 20 metros y da 40 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos? Grandes.

Figura 15. Ejemplo de resolución de la sub-categoría 6d

Laura (15, 4) de la secundaria Rural decide que los pasos son chicos (Figura 16).


En un minuto, Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos? chicos

Figura 16. Otro ejemplo de resolución de la sub-categoría 6d

Subcategoría 6e. En este grupo se clasificaron aquellas respuestas que no pueden incluirse en las anteriores y que muestran una franca incomprensión del problema; en este caso sólo son seis estudiantes que representan el 7% de esta categoría y cerca del 1% de los 329 resultados. Puede tratarse también de respuestas dadas sin reflexionar o como una muestra de rechazo a la actividad.

Como José Alfredo (15,4), de la secundaria urbana, quien responde con una aproximación del número de pasos y no de sus medidas (Figura 17).

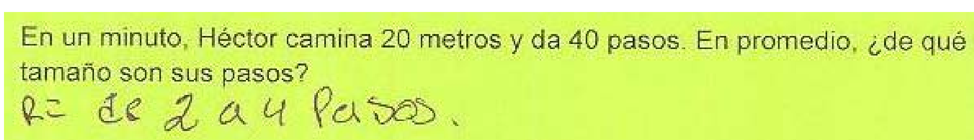

En un minuto, Héctor camina 20 metros y da 40 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?
R= de 2 a 4 Pasos.

Figura 17. Ejemplo de resolución de la subcategoría 6e

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

5. Discusión

Con base en los resultados analizados se pueden identificar tres grandes clases en las cuales agrupar las respuestas dadas por los estudiantes: la que integra las respuestas correctas, la que integra las respuestas en las que se puede inferir que reconocieron una relación proporcional pero, por problemas con las unidades o con el algoritmo, no dieron una respuesta adecuada, y la tercera, que incluye las respuestas que indican que los estudiantes no comprendieron las relaciones proporcionales en el problema o no se involucraron lo suficiente en su resolución.

Si se asume que los que resolvieron adecuadamente el problema (34%) han logrado construir las nociones involucradas en la situación problemática y también han logrado coordinar tanto el cálculo numérico como la determinación de las unidades de referencia, entonces los estudiantes que dieron una respuesta de la segunda clase (41%), aunque probablemente hayan construido las nociones involucradas, no resulta suficiente para dar una respuesta correcta; además requieren consolidar y coordinar los conocimientos sobre temas como el sistema de numeración y los algoritmos, que a su vez requieren el dominio de las tablas de multiplicar, cuya memorización es fundamental, los números decimales y el sistema métrico decimal. Además deben expresar adecuadamente sus resultados de la manera convencional.

Las respuestas de la tercera clase pueden sugerir que a los estudiantes aún les falta construir las nociones implicadas y que, como plantea la teoría de los campos conceptuales, la construcción de conceptos no se da a partir de una sola situación, sino a través de muchas y variadas situaciones y a largo plazo; al mismo tiempo, una situación involucra siempre varios conceptos formando sistemas y no conceptos aislados. Se trata de una cuarta parte de la población y donde la mayoría son estudiantes de primaria que precisamente se encuentran desarrollando esas nociones.

De manera más específica, se puede concluir que con relación a las localidades, estadísticamente no hubo diferencias significativas entre la rural y la urbana. Con respecto a las hipótesis inicialmente planteadas, la presencia de un dato irrelevante como distractor es un elemento que provoca mayores dificultades en los estudiantes para hacerse una representación adecuada del problema, a diferencia de la variación en las magnitudes del problema que no generó diferencias significativas en los resultados. Por otro lado, la calculadora no es un recurso que dé ventajas importantes a los estudiantes, por lo menos para este problema.

Finalmente, se hace evidente que hay diferencias en los sistemas de representación y el grado de consolidación de los conceptos matemáticos implicados en el problema; sin embargo, dada la metodología empleada para esta fase, los datos no permi-

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

ten confirmar la naturaleza de estas relaciones entre los sistemas de representación; tampoco permiten explorar la existencia de otros teoremas-en-acto que pueden estar determinando los procedimientos de resolución que impiden a los estudiantes dar una respuesta correcta.

Para profundizar en lo anterior se requiere de la observación directa durante la resolución del problema, así como de entrevistas clínicas y el análisis de los procedimientos.

Lista de referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chain, R., Ortega, J., Vaca, J. E., Bustamante, A. J., Ojeda, M., Velasco, F., Hernández, M., & López, J. (2009). *Sistema de consulta CONAFE. ENLACE 2008*. Manuscrito inédito, Instituto de Investigaciones en Educación, Universidad Veracruzana, Xalapa, México.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M., & Sciolis, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2013). *Reactivos liberados PISA 2003*. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/index.php/servicios/pisa/reactivos-liberados-pisa-2003

Rockwell, E. (Coord.). (2005). *La escuela cotidiana*. México: Fondo de cultura económica.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). New Jersey: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM.

Secretaría de Educación Pública. (2012). *Hacia PISA 2009*. Recuperado de http://www.pisa.sep.gob.mx/pisa_en_mexico.html

Vaca, J. E., Bustamante, A. J., Gutiérrez, F. M., & Tiburcio, C. (2010). *Los lectores y sus contextos*. Recuperado de http://www.uv.mx/bdie/files/2012/10/Lectores_marcoteorico.pdf

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en didactique des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why? En *The Deve-*

enero-junio, 2014 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

lopment in Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics (pp. 41-61). Albany: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (2001). Problemas aditivos y multiplicativos. En E. Fernández (Coord.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 189-228). España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Vergnaud, G. (2004). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52(2), 83-94.