TASA DE PREFERENCIA INTERTEMPORAL, EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO NEOCLÁSICOS

Jorge Iván González y Arcenio Pecha

Profesores de la Universidad Nacional, Facultad de Economía y Matemáticas respectivamente. Los autores agradecen los comentarios de un jurado anónimo.

Resumen

González, Jorge I. y Pecha, Arcenio, "Tasa de preferencia intertemporal, equilibrio y estabilidad en los modelos de crecimiento neoclásicos", *Cuadernos de Economía*, v. XIX, n. 32, Bogotá, 2000, páginas 61-76.

Este artículo analiza la consistencia intertemporal de las preferencias y la homogeneidad de la tasa de preferencia intertemporal en los modelos de ciclo real. El primer supuesto implica que las preferencias no cambian a lo largo del tiempo; el segundo, que las preferencias de las personas son iguales, independientemente de su nivel de ingreso. Cuando estos supuestos se modifican ligeramente para que el modelo sea más realista, deja de ser convergente, estable y es muy sensible a las condiciones iniciales. Las modificaciones consisten en diferenciar el consumo de los ricos y de los pobres, y suponer que la tasa de preferencia intertemporal es endógena.

Abstract

González, Jorge I. y Pecha, Arcenio, "Intertemporal preference rate, equilibrium, and stability in neoclassical growth models", *Cuadernos de Economía*, v. XIX, n. 32, Bogotá, 2000, pages 61-76.

This article analyzes the intertemporal consistency of preferences and the homogeneity of the intertemporal preference rate in real cycle models. The first assumption implies that preferences do not change over time; the second, that people's preferences are the same, independent of their income level. When these assumptions are modified slightly to make the model more realistic, it is no longer convergent or stable, and is very sensitive to initial conditions. The modifications consist of differentiating the consumption of the rich and the poor, and assuming that the intertemporal preference rate is endogenous.

En los modelos de crecimiento a la Barro y Sala-i-Martin [1995][1] se hacen dos supuestos sobre la tasa de preferencia intertemporal, o tasa de descuento.[2] Primero, que no se modifica a lo largo del tiempo y, segundo, que es idéntica para todos los agentes y, por tanto, es independiente del nivel de ingreso. Los dos supuestos son muy restrictivos. El primero desconoce que la utilidad va cambiando a lo largo del tiempo y que va afectando la tasa de preferencia intertemporal. El segundo equivale a negar la existencia de las curvas de Engel. La modificación de estos supuestos por otros más realistas impide, entre otras dificultades, la convergencia y el logro de un estado estacionario. Nuestros comentarios no se refieren exclusivamente al modelo de Barro y Sala-i-Martin, sino al conjunto de modelos de crecimiento que hacen los mismos supuesto que Barro y Sala-i-Martin.

El primer supuesto ha sido criticado desde diversas perspectivas. Por ejemplo, Shackle considera que las preferencias son muy inestables porque el individuo modifica sus planes futuros continuamente, a medida que va percibiendo las reacciones de los otros. Para Shackle la persona elige entre pensamientos alternativos, puesto que siempre es "demasiado tarde para escoger entre hechos" [Shackle 1972, 280]. Pero como los pensamientos cambian rápidamente, no hay razón para pensar que las preferencias se mantengan a lo largo del tiempo.

1 Ver, igualmente, Sala-i-Martin [1994].

2 Una crítica más global a los modelos de crecimiento contemporáneos se encuentra en Hicks [1985, 153-164], Hahn y Solow [1995].

Elster [1983] tampoco cree que las preferencias se puedan mantener a lo largo del tiempo, y diferencia entre incontinencia, inconsistencia intertemporal e inconstancia. Estos comportamientos son contrarios a los supuestos básicos de la racionalidad. La teoría del crecimiento asocia la racionalidad con la estabilidad intertemporal de las preferencias y supone continencia, consistencia intertemporal y constancia. Elster muestra que el incumplimiento de uno, o de todos los postulados, no refleja un comportamiento irracional. Por el contrario, en la vida cotidiana se toman decisiones que no responden a los cánones de la racionalidad estrecha que sustenta los modelos de crecimiento. Y concluye que no es legítimo asociar la estabilidad de las preferencias con la racionalidad.[3]

Hicks también critica el supuesto de la estabilidad de las preferencias. Su argumentación tiene tres partes. Primera, pone en tela de juicio la noción de estado estacionario por ser una 'ficción' que niega la dinámica [Hicks 1939, 135]. Segunda, no considera válido aplicar la tasa marginal de sustitución —concebida originalmente para analizar la sustitución entre dos bienes en un momento dado— a los consumos intertemporales. Tercera, la tasa marginal de sustitución intertemporal supone independencia entre las utilidades de los consumos en los momentos t y $t+1$. Hicks acepta la independencia de las utilidades cuando el consumo se realiza en un mismo momento. Pero no está de acuerdo con afirmar la independencia cuando los consumos se realizan en dos momentos del tiempo. La teoría del crecimiento insiste en mantener la independencia intertemporal, porque de lo contrario no podría aplicar los principios básicos de la teoría del consumidor. Esta opción tiene un altísimo costo: la anulación de la dinámica. Y, concluye Hicks, la gran paradoja de la teoría de crecimiento neoclásico es su imposibilidad de manejar la dinámica, entendida como la concatenación de los períodos. Hay dinámica si los períodos se interrelacionan.[4] No hay dinámica si los períodos son autónomos. En los modelos de crecimiento no hay dinámica, puesto que al definir la tasa marginal de sustitución intertemporal se parte del principio de que los períodos son independientes [Hicks 1939, 1985].

---

3 Esta afirmación es válida para las dos modalidades de racional: estrecha y amplia. Elster [1983] distingue la racionalidad en sentido estrecho de la racionalidad en sentido amplio. La primera, más formal, tiene que ver, principalmente, con la consistencia. La segunda indaga por los aspectos sustantivos de las creencias de los deseos.

4 Hicks [1985, 64] toma de Lindahl esta noción acerca de la dinámica.

Uzawa también cuestiona el primer supuesto y propone que la tasa de preferencia sea endógena, de tal manera que en cada momento del tiempo esté determinada por la utilidad del consumo [Blanchard y Fischer 1990, 72-75]. En lugar de ser fija, la tasa de preferencia intertemporal (θ) depende de la utilidad del consumo,

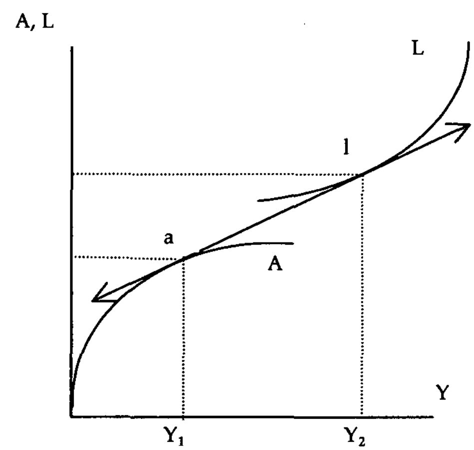
$$\theta = \theta\,(u(c)) \qquad [1]$$

Al maximizar,

$$\int_0^\infty u\,(c_t)\exp\left\{-\int_0^t \theta\left[u\,(c_v)\right]dv\right\}dt \qquad [2]$$

Al resolver el sistema, Uzawa encuentra que la estabilidad únicamente se consigue si $\theta'(\cdot) > 0$. Es decir, si la tasa de preferencia intertemporal crece a medida que aumenta la utilidad del consumo. Entonces mientras mayor sea la utilidad del consumo, la persona se vuelve menos paciente y aumenta su tasa de preferencia intertemporal. Esta condición de estabilidad del modelo Uzawa es difícil de aceptar porque en la realidad las personas ricas tienden a ser más pacientes y por eso ahorran más. En virtud de su progresiva paciencia, los ricos cada vez son más ricos. Su comportamiento sería del tipo $\theta'(\cdot) < 0$. Pero este resultado no garantiza la convergencia, puesto que va en contra de la condición de estabilidad derivada del modelo de Uzawa.

FIGURA 1
CURVAS DE ENGEL PARA DOS BIENES: ALIMENTOS (A) Y LUJO (L)



Si la paciencia aumenta a medida que crece el nivel de ingreso, la condición $\theta'(\cdot) > 0$ no es realista. La paradoja a la que llega Uzawa pone en evidencia la naturaleza restrictiva de los modelos de crecimiento, ya que si se quiere garantizar la convergencia y la estabilidad, no hay más remedio que introducir un supuesto que desvirtúa el comportamiento de los consumidores de altos ingresos. En las páginas siguiente dejaremos de lado las críticas de Shackle, Elster y Hicks, con el fin de analizar algunas de las conclusiones que se derivan de la ecuación [1].

El eje horizontal representa el ingreso (Y) y el vertical la cantidad de los bienes alimentos (A) y lujo (L). La flecha es tangente a ambas curvas.

El segundo supuesto de los modelos de crecimiento es que la tasa de preferencia es constante, independientemente del nivel de ingreso. La figura 1 refleja las implicaciones que se derivan de tal supuesto en términos de las curvas de Engel.[5] La curva inferior, cóncava desde el origen, corresponde a alimentos y la superior, convexa, a los bienes de lujo. El eje horizontal representa el ingreso (Y). A medida que éste aumenta, la demanda de alimentos va siendo marginalmente decreciente, mientras que la de bienes de lujo será creciente. Engel tuvo el mérito de explicitar este principio que es elemental e intuitivamente claro. No obstante su evidencia y su aceptación generalizada, la teoría del crecimiento lo niega al suponer que la tasa de preferencia es la misma independientemente del ingreso. La flecha de la figura presenta un punto de tangencia con cada una de las dos curvas: "a" para A, "l" para L. Sólo en estos dos puntos coinciden las elasticidades de la demanda de cada bien con respecto a los dos niveles de ingreso. En el resto de puntos las elasticidades son diferentes. Así que sólo en casos excepcionales las elasticidades son iguales. En la gráfica ilustramos el caso de dos bienes y dos niveles de ingreso. Cuando se considera el mismo bien y diferentes niveles de ingreso la elasticidad es igual sólo si las sendas de consumo de las personas son idénticas. Así que con un ingreso Y_1 y Y_2 ambos individuos consumirían exactamente la misma cantidad de alimentos y de bienes de lujos, respectivamente.

Preocupado por la simplificación que hace la teoría del consumidor, Varian advierte:

---

5 Los bienes son superiores, normales o inferiores, dependiendo de si la elasticidad ingreso de la demanda es, mayor que la unidad, menor que la unidad pero positiva, o negativa [Ferguson 1966, 49, Kreps 1990, 61].

> Hemos visto que la teoría del consumidor puede contribuir a la especificación y estimación de los sistemas de ecuaciones de demanda. Sin embargo, deben mantenerse ciertas reservas acerca de la entidad de esta aportación. *El problema reside, de nuevo, en el hecho de que las preferencias pueden variar de forma significativa entre los diversos agentes* [Varian 1992, 219-220, cursivas nuestras].

Los modelos de crecimiento ignoran esta dificultad. Y sin más, suponen que la tasa de preferencia es la misma para todos los individuos.

Ya mostramos —refiriéndonos al trabajo de Uzawa— que los supuestos tan restrictivos que hacen los modelos de crecimiento sobre la tasa de preferencia intertemporal, impiden incorporar comportamientos endógenos. Tampoco admiten ligeras modificaciones que permitan diferenciar las tasas de preferencia de los ricos y de los pobres.

El consumidor microeconómico del modelo de Ramsey [1928] es un agente representativo. En vez de un sólo tipo de consumidor representativo, introducimos dos: uno pobre y otro rico. Sean dos funciones de utilidad, u_R, u_P. La primera representa la utilidad de las personas ricas y la segunda la de los pobres. De acuerdo con el uso común, la utilidad depende del consumo. La utilidad de los ricos es función del consumo de los ricos (c_R). De la misma manera, la utilidad de los pobres depende del consumo de éstos (c_P). A cada grupo corresponde una tasa de preferencia intertemporal (θ_R y θ_P).

El ejercicio que proponemos a continuación tiene dos características que lo diferencian de los modelos convencionales. Primero, en lugar de utilizar una sola tasa de preferencia para todos los consumidores (θ), nosotros usamos dos (θ_R y θ_P). Segundo, en vez de suponer que dichas tasas son fijas y exógenas, las endogenizamos. Y con respecto a la propuesta de Uzawa, el modelo que presentamos se diferencia en que no endogeniza una tasa de preferencia, igual para todos los agentes, sino que endogeniza las dos tasas de preferencia relevantes, la de los pobres y la de los ricos.

En los modelos que siguen la línea de Barro y Sala-i-Martin [1995] no se considera de manera explícita la forma de escoger la tasa de preferencia intertemporal; que es un aspecto neurálgico de la teoría de la elección social. Simplemente, se opta por la vía de suponer que la decisión la toma un dictador benevolente. Nosotros tampoco profundizamos en este tema y recurrimos a otra simplificación: la tasa de preferencia intertemporal de cada grupo es determinada por un líder que la va modificando a medida que el consumo del grupo va cambiando. Este supuesto que es fuerte desde la perspectiva de la elección colectiva, es menos restrictivo que el de los modelos que estamos criticando.

Al distinguir la utilidad de los pobres y de los ricos, la función objetivo es

$$\int_0^\infty u_R(c_R(t))\exp\left[-\int_0^t \theta_R(c_R(z))dz\right]dt + \int_0^\infty u_P(c_P(t))\exp\left[-\int_0^t \theta_P(c_P(z))dz\right]dt \qquad [3]$$

En esta presentación, la función de utilidad varía con el nivel de ingreso, lo que es consistente con las curvas de Engel. Y, adicionalmente, la tasa de preferencia intertemporal es endógena, porque va cambiando con el nivel de consumo. La función objetivo está sometida a la restricción

$$\dot{k} = y(k) - (c_R + c_P) - \eta k \qquad [4]$$

Representa los cambios en el tiempo del *stock* de capital *per cápita* (dk/dt). Así que las variaciones del *stock* de capital *per cápita* son iguales al ingreso *per cápita* (y), menos el consumo total ($c_R + c_P$) *per cápita,* menos la tasa de crecimiento de la población (η) multiplicada por el *stock* de capital *per cápita.* y (k) representa la función de producción. Como es usual, $y'>0$, $y''<0$. La función de producción cumple las condiciones de Inada, $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$, $y'(\infty) = 0$.

Después de resolver el hamiltoniano.[6]

$$y^* = c_P^* + c_R^* + \eta k^* \qquad [5]$$

La igualdad corresponde a una situación de equilibrio. Los asteriscos indican que la variable respectiva está en equilibrio. De acuerdo con la identidad, el producto *per cápita* es igual al consumo total *per cápita* más la tasa de crecimiento de la población por el capital *per cápita.*

Por [19], las primeras ecuaciones de [23] se satisfacen si y sólo si

$$\theta_R, \theta_P > 0$$
$$u'_R, u'_P > 0 \qquad [6]$$

Estas condiciones son las usuales. La tasa de preferencia intertemporal es positiva, porque sin desconocer el altruismo intergeneracional, las

6 El anexo matemático explica, paso a paso, la solución del hamiltoniano.

personas prefieren más el consumo propio que el de las siguientes generaciones. La primera derivada de la utilidad también es positiva porque la utilidad crece con el consumo.

$$y' = \eta + \dot{\theta}_R = \eta + \dot{\theta}_P \qquad [7]$$

Se sigue, entonces, que

$$\dot{\theta}_R = \dot{\theta}_P = \theta \qquad [8]$$

En el punto de equilibrio las tasas de preferencia intertemporal de los pobres y de los ricos son iguales. El modelo que hemos propuesto sólo es consistente con tasas de preferencia intertemporal homogéneas. Como señalamos antes, esta condición es muy restrictiva porque rechaza de plano la existencia de las curvas de Engel. Pero, en el contexto del modelo de crecimiento que estamos examinando, sin esta identidad no se consigue el equilibrio. Así que la formulación que hicimos en [3], únicamente es consistente con el equilibrio en el momento en que las tasas de descuento se igualan.

A partir del punto de equilibrio se han definido las condiciones de estabilidad del sistema.[7] Algunos de los signos resultantes son:

$$\overset{-}{y}''\left(L_k + G_k - \overset{+}{\theta}\overset{-}{y}''\right)\left[\overset{-}{L}_k G_k + \left(\overset{+}{L}_k + \overset{+}{G}_k\right)(\overset{+}{y}'')^2 - \overset{+}{\theta}\right] - (\overset{+}{y}'')^2 L_k G_k\left(2\overset{-}{y}'' - \overset{+}{\theta}\right) \qquad [9]$$

que es igual a

$$(y'')^2\left(L_k^2 + G_k^2\right) + \left[L_k + G_k\right]\left[L_k G_k - \theta\left(1 + (y'')^3\right)\right] - \theta^2 y'' \qquad [10]$$

Los signos finales son indeterminados. Al analizar la relación [29] dijimos que no era posible precisar el signo de la fracción. El comentario también es válido en el caso de [30]. Por [35] sabemos que los signos de L_R y de L_K son iguales. Y, por [36], que los de G_P y G_K también son iguales. Para conocer el signo final de la expresión [42], debemos tener en cuenta que:

— Si L_K y G_K son positivos, es claro que $(L_K + G_K - \theta y'')>0$, que $y'' (L_K + G_K - \theta y'')<0$, que $(L_K+G_K) (y'')^2> 0$. El signo final es indeterminado y depende del comportamiento de $(L_k G_k + (L_k+G_k)(y'')^2 - \theta)$ y del resultado de la diferencia $(2y''- \theta)$.

7 Estos desarrollos también se presentan en el anexo.

— Si L_K y G_K son negativos, los signos de $(L_K+G_K - \theta y'')$ y de $y'' (L_K+G_K - \theta y'')$ son indeterminados.

— $L_K G_K$ es mayor que cero. Pero el signo de $[(L_k G_k+(L_k+G_k) (y'')^2 - \theta)]$ es indeterminado.

— El signo de $(y'')^2 L_k G_k$ es positivo. Y el de $(2y'' - \theta)$ es indeterminado.

A priori no conocemos el signo de [42] y, por tanto, no podemos precisar si el equilibrio definido en [8] es estable o inestable. Desde el punto de vista de la teoría no hay ninguna razón para saber si

$$[(L_k G_k + (L_k + G_k) (y'')^2 - \theta)] > 0$$

$$[(L_k G_k + (L_k + G_k) (y'')^2 - \theta)] < 0 \qquad [11]$$

o si

$$y'' (L_k + G_k - \theta y'')[(L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta)] > (y'')^2 L_k G_k (2y'' - \theta)$$

$$y'' (L_k + G_k - \theta y'')[(L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta)] < (y'')^2 L_k G_k (2y'' - \theta) \qquad [12]$$

De tal manera que no se sabe con certeza si el equilibrio de [8] es estable o inestable. Por consiguiente, el modelo fácilmente llega a una situación que no es de estado estacionario. De las reflexiones anteriores se derivan varias conclusiones.

— El modelo de crecimiento convencional no admite tasas de preferencias diferentes para ricos y pobres, ya que el equilibrio únicamente se consigue cuando éstas son iguales. Esto significa que el único supuesto consistente con el equilibrio es la tasa de preferencia intertemporal homogénea. La igualdad de las tasas de descuento en el punto de equilibrio significa que los ricos y los pobres modifican sus respectivas tasas de preferencia intertemporal de la misma manera. Si este postulado se rechaza, el modelo se aleja del equilibrio.

— El equilibrio es inestable, así que ni siquiera con tasas de preferencia iguales hay garantía de estabilidad. Aunque la identidad de las tasas de preferencia es un supuesto muy fuerte, no alcanza a ser suficiente para garantizar la estabilidad.

— Los modelos de crecimiento propuestos por la nueva macroeconomía clásica desconocen principios elementales de la microeconomía convencional, como la curva de Engel y, aún así, continúan siendo muy frágiles desde el punto de vista de la estabilidad.

ANEXO MATEMÁTICO

El hamiltoniano correspondiente es

$$H = u_R \exp\left[-\int_0^t \theta_R(c_R(z))dz\right] + u_P \exp\left[-\int_0^t \theta_P(c_P(z))dz\right] +$$

$$\lambda[y(k) - c_R - c_P - \eta k] \qquad [13]$$

λ es la variable de coestado, relacionada con la variable de estado k. λ representa, en cada momento del tiempo, el precio sombra de k. Así que $\lambda > 0$, porque el precio es positivo.

Las condiciones de primer orden toman la forma

$$\lambda = u'_R \exp\left(-\int_0^t \theta_R dz\right) - u_R \theta_R \exp\left(-\int_0^t \theta_R dz\right)$$

$$\lambda = u'_P \exp\left(-\int_0^t \theta_P dz\right) - u_P \theta_P \exp\left(-\int_0^t \theta_P dz\right) \qquad [14]$$

y

$$\dot{\lambda} = \lambda(\eta - y') \qquad [15]$$

Que se convierten en

$$\lambda \exp\left(\int_0^t \theta_R dz\right) = u'_R - \theta_R u_R$$

$$\lambda \exp\left(\int_0^t \theta_P dz\right) = u'_P - \theta_P u_P \qquad [16]$$

$$\dot{\lambda} = \lambda(\eta - y')$$

De la última ecuación

$$\lambda = A \exp\left(\int_0^t (\eta - y')dz\right) \qquad [17]$$

dado que $\lambda > 0$, $A > 0$.

Remplazando λ en [16],

$$A \exp\left(\int_0^t (\eta - y' + \theta_R)dz\right) = u'_R - \theta_R u_R$$

$$A \exp\left(\int_0^t (\eta - y' + \theta_P)dz\right) = u'_P - \theta_P u_P \qquad [18]$$

De aquí,

$$u'_R - \theta_R u_R > 0$$

$$u'_P - \theta_P u_P > 0 \qquad [19]$$

Derivando con respecto a t

$$u''_R \dot{c}_R - (\theta'_R \dot{c}_R u_R + \theta_R u'_R \dot{c}_R) = A \exp\left(\int_0^t (\eta - y' + \theta_R)\right)(\eta - y' + \theta_R)$$

$$u''_P \dot{c}_P - (\theta'_P \dot{c}_P u_P + \theta_P u'_P \dot{c}_P) = A \exp\left(\int_0^t (\eta - y' + \theta_P)\right)(\eta - y' + \theta_P) \qquad [20]$$

Remplazando [18] en [20], se llega al sistema

$$\dot{c}_R = \frac{\eta - y' + \theta_R}{\frac{d}{d c_R}(\ln(u'_R - \theta_R u_R))} \equiv L(c_R, k)$$

$$\dot{c}_P = \frac{\eta - y' + \theta_P}{\frac{d}{d c_P}(\ln(u'_P - \theta_P u_P))} \equiv G(c_P, k) \qquad [21]$$

Los cambios en el consumo de los ricos y de los pobres depende de la productividad marginal de k, de las respectivas tasas de preferencia intertemporal y de la utilidad marginal.

Las dos ecuaciones de [21] y la ecuación [4], proporcionan el sistema 3x3,

$$\dot{c}_R = L(c_R, k)$$

$$\dot{c}_P = G(c_P, k) \qquad [22]$$

$$\dot{k} = y(k) - (c_P + c_R) - \eta k$$

El punto de equilibrio se presenta donde,

$$0 = (u'_R - \theta_R u_R)(\eta - y' + \theta_R)$$

$$0 = (u'_P - \theta_P u_P)(\eta - y' + \theta_P) \qquad [23]$$

$$0 = y - (c_R + c_P) - \eta k_t$$

en la última ecuación, por [8],

$$\theta^*_R = \theta^*_P \qquad [24]$$

Linealizando [22] alrededor del punto de equilibrio del sistema,

$$\begin{aligned} \dot{c}_R &= L_{c_R}(c_R^*, k^*)(c_R - c_R^*) + L_k(c_R^*, k^*)(k - k^*) \\ \dot{c}_P &= G_{c_P}(c_P^*, k^*)(c_P - c_P^*) + G_k(c_P^*, k^*)(k - k^*) \\ \dot{k} &= (y'(k^*) - \eta)(k - k^*) - (c_P - c_P^*) - (c_R - c_R^*) \end{aligned} \qquad [25]$$

Los subíndices de L y G representan derivadas parciales con respecto a c_R, c_P y k.

Por simplicidad,

$$L_{c_R}(c_R^*, k^*) = \frac{1}{\left.\dfrac{d(\ln(u'_R - \theta_R u_R))}{d c_R}\right|_{(c_R^*, k^*)}} \equiv L_R \qquad [26]$$

$$G_{c_P}(c_P^*, k^*) = \frac{1}{\left.\dfrac{d(\ln(u'_P - \theta_P u_P))}{d c_P}\right|_{(c_P^*, k^*)}} \equiv G_P \qquad [27]$$

La relación entre L_R y G_P es

$$\frac{L_R}{G_P} = \left.\frac{\dfrac{d}{d c_P}(\ln(u'_P - \theta_P u_P))}{\dfrac{d}{d c_R}(\ln(u'_R - \theta_R u_R))}\right|_{(c_R^*, c_P^*, k^*)} \qquad [28]$$

Como

$$\frac{d}{d c_P}(\ln(u'_P - \theta_P u_P)) = \frac{1}{u'_P - \theta_P u_P}(u''_P - \theta_P u'_P - \theta'_P u_P)$$

y

$$u''_P < 0, \theta_P > 0, u'_P > 0 \qquad [29]$$

los signos de la fracción son indeterminados y lo mismo sucede con

$$\frac{d}{d c_R}(\ln(u'_R - \theta_R u_R)) = \frac{1}{u'_R - \theta_R u_R}(u''_R - \theta_R u'_R - \theta'_R u_R) \qquad [30]$$

Es razonable pensar que los ricos y los pobres establecen relaciones similares entre las segundas y las primeras derivadas de sus respectivas funciones de utilidad.

$$- u''_P > (\theta_P u'_P - \theta'_P u_P) \leftrightarrow - u''_R > (\theta_R u'_R - \theta'_R u_R) \qquad [31]$$

Los comportamientos son equivalentes. Así que

$$L_R/G_P > 0 \qquad [32]$$

También por simplicidad

$$L_k(c_R^*, k^*) = \frac{-y''(k^*)}{\left.\dfrac{d(\ln(u'_R - \theta_R u_R))}{d c_R}\right|_{(c_R^*, k^*)}} \equiv L_k \qquad [33]$$

$$G_k(c_P^*, k^*) = \frac{-y''(k^*)}{\left.\dfrac{d(\ln(u'_P - \theta_P u_P))}{d c_P}\right|_{(c_P^*, k^*)}} \equiv G_k \qquad [34]$$

En ambos casos el numerador es positivo, puesto que $y''(k^*) < 0$. Así que los signos de la fracción siguen las mismas pautas explicadas a partir de [29].

De [26] y [33] se sigue que:

$$L_k = -y''(k^*)\, L_R(c^*, k^*) \qquad [35]$$

y de [27] y [34],

$$G_k = -y''(k^*)\, G_P(c^*, k^*) \qquad [36]$$

que equivale a

$$\frac{L_k}{L_R} = \frac{G_k}{G_P} \qquad [37]$$

o

$$\frac{L_k}{G_k} = \frac{L_R}{G_P}$$

En [32] se mostró que el miembro derecho de la igualdad es positivo. Así que $L_k/G_k > 0$.

Y la forma matricial del sistema linealizado [25] es

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_R \\ \dot{c}_P \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_R & 0 & L_k \\ 0 & G_P & G_k \\ -1 & -1 & y'(k^*) - \eta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_R - c_R^* \\ c_P - c_P^* \\ k - k^* \end{pmatrix} \right] \qquad [38]$$

Los valores propios de la matriz son las soluciones de la ecuación

$$\tau^3 - (L_R + G_P + \theta)\tau^2 + (\theta(L_R + G_P) + L_R G_P + L_k + G_k)\tau$$
$$-(L_k G_P + L_R G_k + L_R G_P \theta) = 0 \qquad [39]$$

Por [35] y [36], equivale a solucionar la ecuación

$$(y'')^2 \tau^3 + y'' (L_k + G_k - \theta y'') \tau^2 + (L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta)\tau + L_k G_k (2y'' - \theta) = 0 \qquad [40]$$

y determinar el comportamiento de las raíces.

De acuerdo con el teorema de Liénard-Chipart [Sengupta y Fanchon 1997, 22], el sistema dinámico es estable si la matriz

$$\begin{pmatrix} y''(L_k + G_k - \theta y'') & L_k G_k (2y'' - \theta) & 0 \\ (y'')^2 & L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta & 0 \\ 0 & y''(L_k + G_k - \theta y'') & L_k G_k (2y'' - \theta) \end{pmatrix} \qquad [41]$$

tiene menores principales de order par o impar, todos positivos. Por lo tanto, basta con analizar el determinante

$$\begin{vmatrix} y''(L_k + G_k - \theta y'') & L_k G_k (2y'' - \theta) \\ (y'')^2 & L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta \end{vmatrix} =$$

$$y'' (L_k + G_k - \theta y'') [L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta] - (y'')^2 L_k G_k (2y'' - \theta) \qquad [42]$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barro, Robert y Sala-I-Martin, Xavier. 1995. *Economic Growth*, McGraw-Hill.

Blanchard, Olivier y Fischer, Stanley. 1990. *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, Massachusetts.

Elster, Jon. 1983. *Sour Grapes. Studies in the Suversion of Rationality*, Cambridge University Press.

Ferguson, C. 1966. *Microeconomic Theory*, Irwin Inc., 1972.

Hahn Frank., Solow Robert. 1995. *A Critical Essay on Modern Macroeconomic Theory*, The MIT Press, 1997.

Hicks, John. 1939. *Valor y capital*, Fondo de Cultura Económica, México, 1977.

Hicks, John. 1985. *Métodos de economía dinámica*, Fondo de Cultura Económica, 1989.

Kreps, David. 1990. *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, Nueva York.

Ramsey, Frank. 1928. "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal* 38, 152, diciembre, 543-559. Reimpreso como "El crecimiento óptimo", Sen [1979, 457- 474].

Sala-I-Martin Xavier. 1994. *Apuntes de crecimiento económico*, Antoni Bosch.

Sen, Amartya, editor. 1979. *Economía del crecimiento*, Fondo de Cultura Económica, México.

Sengupta, Jati y Fanchon, Phillip. 1997. *Control Theory Methods in Economics*, Kluwer Academic Publishers.

Shackle, George L. 1972. *Epistemics and Economics. A Critique of Economic Doctrines*, Cambridge University Press, Cambridge; reimpreso por Transaction Publishers, New Brunswick, New Jersey, 1992.

Varian, Hal. 1992. *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*, Norton.