REVISTA DE CIENCIAS

ZUBÍA

MONOGRÁFICO

26

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja

Coordinadores
Óscar Ciaurri Ramírez y Luis Español González

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014
235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)
51:37.02 (460.21)

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423
Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

Zubía. Monográfico 26 55–76 Logroño 2014

APROXIMACIÓN RACIONAL Y POLINOMIOS ORTOGONALES

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ[1],
JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS[1]

RESUMEN

En este trabajo hacemos un compendio de los resultados fundamentales que hemos obtenido en nuestra investigación sobre aproximación racional y polinomios ortogonales; también citamos algunos artículos que dieron origen a las cuestiones que actualmente se estudian en estos temas. Señalamos, además, varias de las líneas de investigación más activas en la aproximación racional y los polinomios ortogonales.

Palabras clave: Aproximación racional, aproximantes de Padé, aproximantes simultáneos, aproximantes de Hermite-Padé, polinomios ortogonales, transformada de Cauchy, transformada de Markov, transformada de Stieltjes, sistema de Angelesco.

In this work we make a summary of the key results that we have obtained in our research on rational approximation and orthogonal polynomials; we also cite some papers that gave rise to the issues currently being studied in these subjects. Also note some of the most active research lines in the rational approximation and orthogonal polynomials.

Key words: *Rational approximation, Padé approximants, simultaneous approximants, Hermite-Padé approximants, orthogonal polynomials, Cauchy's transform, Markov's transform, Stieltjes' transform, Angelesco's system.*

1. INTRODUCCIÓN

Los principales temas de nuestra investigación son la aproximación racional y los polinomios ortogonales. Estos se enmarcan dentro de la teoría de aproxima-

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: `{mbello, jminguez}@unirioja.es`
La investigación del primer autor está subvencionada por la Dirección General de Investigación, Ministerio de Educación y Ciencia (MINCINN), con el proyecto MTM2009-14668-C02-02, mientras que la investigación del segundo autor está subvencionada por la misma entidad con el proyecto MTM2012-36732-C03-02.

ción, una rama del análisis matemático clásico. La idea básica de la teoría de aproximación es la construcción de objetos sencillos que mejor representen a otros más complejos. La aproximación racional juega un papel importante cuando se deben tener en cuenta las singularidades o imperfecciones de los objetos que intervienen. Los objetos que estudiamos son funciones y las funciones básicas son los polinomios; en particular, los polinomios ortogonales son piezas elementales que permiten reconstruir otras funciones de un modo bien articulado.

Los primeros trabajos de la teoría general de polinomios ortogonales se deben a Chebyshev, Markov y Stieltjes. Estos polinomios aparecen en numerosos estudios y tienen variedad de aplicaciones. Por ejemplo, intervienen en la solución de los problemas de Sturm-Liouville, en los desarrollos de Fourier, en la teoría espectral de operadores o en la teoría de señales. Los polinomios ortogonales surgen de manera natural al hacer el desarrollo en fracción continua de las *transformadas de Cauchy*, entre otras funciones. Estas transformadas tienen la forma

$$\widehat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x},$$

donde μ es una medida positiva de Borel finita con soporte $\operatorname{sop}(\mu)$ un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$. En efecto, se tiene

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{z}\int \frac{d\mu(z)}{1-x/z} = \frac{1}{l(z)+\widehat{\tau}(z)},$$

donde $l(z)$ es un polinomio de grado 1 y τ es otra medida positiva en el eje real. Aplicando la relación anterior reiteradamente obtenemos que el desarrollo en fracción continua de $\widehat{\mu}(z)$ es el siguiente:

$$\widehat{\mu}(z) = \cfrac{c_0}{z-b_0-\cfrac{a_1^2}{z-b_1-\cfrac{a_2^2}{z-b_2-\ddots}}}.$$

Si truncamos el algoritmo anterior en el paso n-ésimo desechando la última transformada hallada, obtenemos una función racional $H_n(z)/G_n(z)$. Los numeradores y denominadores de esta fracción satisfacen una relación de recurrencia a tres términos; así, Markov [44] observó que los denominadores corresponden a la sucesión de polinomios ortogonales respecto a la medida μ, mientras que los numeradores son las funciones de segundo tipo asociadas a μ. Esto es,

$$\int G_n(x)G_m(x)\,d\mu(x) = \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker que es igual a 0 si $n \neq m$ y 1 cuando $n = m$, y

$$H_n(z) = \int \frac{G_n(z)-G_n(x)}{z-x}\,d\mu(x).$$

Núm. 26 (2014), pp. 55–76
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

Si el soporte de μ es acotado, a $\widehat{\mu}$ se le llama *transformada de Markov* de μ, mientras que si no es acotado, $\widehat{\mu}$ es la *transformada de Stieltjes*. Estas funciones se caracterizan por ser holormorfas en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, tener parte imaginaria positiva y anularse en el infinito. Por ejemplo, si $d\mu(x) = dx$, $-1 < x < 1$, entonces

$$\widehat{\mu}(z) = \log\frac{z-1}{z+1}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1],$$

tomando la rama principal del logaritmo; y si $d\mu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$, entonces

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1],$$

con la rama principal de la raíz. Además, Markov probó que si μ tiene soporte compacto, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n(z)}{G_n(z)} = \widehat{\mu}(z),$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\mu))$, donde $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\mu))$ denota la envoltura convexa de $\mathrm{sop}(\mu)$.

En [51], Stieltjes extiende el resultado de Markov a transformadas de Cauchy para medidas con soporte no acotado. Este trabajo es más conocido porque en él Stieltjes introduce el concepto de integral que lleva su nombre, así como el llamado *problema de momentos*, que consiste en la determinación de la medida μ conocida la sucesión

$$c_n = \int x^n\, d\mu(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

El problema de momentos asociado a μ se dice *determinado* si ella es la única medida cuyos momentos coinciden con $\{c_n : n \geq 0\}$. Se habla de problemas de momentos de Haussdorff, Stieltjes o Hamburger si las medidas buscadas tienen soporte incluido en un intervalo acotado, en $[0,\infty)$ o en $\mathbb{R}$, respectivamente.

Las fracciones continuas tienen mucho interés en teoría de números, en teoría de grafos y en análisis combinatorio, entre otros. En [20] se clasifica la irracionalidad de números reales usando fracciones continuas. En ciertos casos, esta cuestión está relacionada con el hecho de si la transformada de Cauchy de una medida es una función algebraica (ver [38]). Hermite, en [35], prueba la trascendencia del número e usando una aproximación racional simultánea de funciones exponenciales. En [4] y [54] se demuestra la irracionalidad de varios números usando aproximación racional.

Otro tipo de fracciones racionales vinculadas con las fracciones continuas son los *aproximantes de Padé*. Sea

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n \tag{1}$$

un desarrollo formal en series de potencias en el punto $z = 0$. El teorema clásico de Cauchy establece que (1) define una función analítica en un entorno del punto $z = 0$ si y sólo si

$$l = \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} < \infty.$$

En este caso, la sucesión de sumas parciales de (1), que son precisamente los polinomios de Taylor de f, convergen a dicha función uniformemente sobre cada subconjunto compacto del disco

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_0\}, \quad R_0 = 1/l.$$

Además, dicha serie diverge puntualmente en cada punto de módulo mayor que R_0. Por tanto, f no puede ser aproximada por los polinomios de Taylor más allá de D_0. Para afrontar este problema surgen los llamados aproximantes de Padé. Dada la serie (1) y prefijados números enteros no negativos n y m, existen polinomios S_n y T_m que verifican:

- $\mathrm{gr}(S_n) \leq n$, $\mathrm{gr}(T_m) \leq m$, $T_m \not\equiv 0$;
- $T_m(z)f(z) - S_n(z) = A_{n+m+1}z^{n+m+1} + \cdots$; es decir, el desarrollo de Taylor de $T_m(z)f(z) - S_n(z)$ en $z = 0$ comienza en z^{n+m+1}.

El cociente $\pi_{n,m}(z) = S_n(z)/T_m(z)$ de dos polinomios cualesquiera que cumplen las dos relaciones anteriores define una única fracción racional que recibe el nombre de *aproximante de Padé* de orden $[n, m]$ asociado a f en el punto $z = 0$. Al conjunto $\{\pi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ se le llama *tabla de Padé* de f. La diagonal principal de la tabla, $\{\pi_{n,n}\}_{n=0}^{\infty}$, se suele denotar simplemente por $\{\pi_n\}_{n=0}^{\infty}$. La estructura algebraica de la tabla de Padé fue estudiada por el matemático francés Henri Padé en su tesis doctoral (1892). No fue, sin embargo, Padé el primer matemático que estudió este tipo de funciones racionales. Por ejemplo, Hermite (1873) ya conocía las expresiones explícitas de $\pi_{n,m}$ para la función exponencial, que le sirvieron para probar la trascendencia del número e. Jacobi (1845) dio una fórmula para el denominador T_m en términos de un determinante cuyas entradas son potencias de z y los coeficientes f_i, y Frobenius (1881) encontró relaciones entre los denominadores de la tabla de Padé. Si $m = 0$, $\pi_{n,0}(z)$ es el polinomio de Taylor de grado n en $z = 0$ de la función f, que interpola a f y a sus derivadas hasta el orden n en $z = 0$ (interpolación en el sentido de Hermite).

Por supuesto, una definición análoga se tiene si el desarrollo en (1) se hace en otro punto de $\overline{\mathbb{C}}$ diferente de $z = 0$. Por ejemplo, si el desarrollo (1) corresponde al de una transformada de Cauchy en un entorno de $z = \infty$ (en potencias de $1/z$), dado un entero no negativo n existen polinomios p_n y q_n tales que:

- $\mathrm{gr}(p_n) \leq n$, $\mathrm{gr}(q_n) \leq n$, $q_n \not\equiv 0$;
- $q_n(z)\widehat{\mu}(z) - p_n(z) = A_{n+1}/z^{n+1} + \cdots$.

Es fácil comprobar que q_n satisface las relaciones de ortogonalidad

$$\int q_n(x)x^k \, d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

y el polinomio p_n puede expresarse como

$$p_n(z) = \int \frac{q_n(z) - q_n(x)}{z - x} \, d\mu(x).$$

La fracción $\pi_n(z) = p_n(z)/q_n(z)$ satisface

$$\widehat{\mu}(z) - \pi_n(z) = \frac{1}{q_n(z)} \int \frac{q_n(x)}{z - x} \, d\mu(x) = \frac{1}{q_n^2(z)} \int \frac{q_n^2(x)}{z - x} \, d\mu(x),$$

y su desarrollo en potencias negativas de z comienza en $1/z^{n+1}$. Por tanto, los aproximantes de Padé en $z = \infty$ de una transformada de Cauchy coinciden con las fracciones parciales de su desarrollo en fracción continua.

Si en lugar de interpolar en un punto se hace en una tabla de puntos, obtenemos los *aproximantes multipuntuales de Padé*. Sea f una función analítica en un entorno abierto V de un conjunto compacto $\Sigma \subset \mathbb{C}$. Fijamos una familia de polinomios mónicos

$$w_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_{n,i}), \quad n \in \mathbb{N},$$

cuyos ceros están contenidos en Σ. Es fácil verificar que para cada par de enteros no negativos n y m, con $n \geq m$, existen polinomios P_{n-m} y Q_m tales que

(i) $\operatorname{gr}(P_{n-m}) \leq n - m$, $\operatorname{gr}(Q_m) \leq m$, $Q_m \not\equiv 0$;
(ii) $(Q_m f - P_{n-m})/w_{n+1} \in \mathscr{H}(V)$, donde $\mathscr{H}(V)$ denota el espacio de funciones analíticas en V.

Cada par de polinomios P_{n-m} y Q_m define una única función racional $\Pi_{n,m}(z) = P_{n-m}(z)/Q_m(z)$ llamada aproximante multipuntual de Padé de orden $[n-m, m]$ de la función f en los ceros de w_{n+1}. Como $w_n(\alpha_{n,i}) = 0$, la condición $(Q_m f - P_{n-m})/w_{n+1} \in \mathscr{H}(V)$ equivale a que $Q_m f - P_{n-m}$ se anula en los ceros de w_{n+1} y en los ceros múltiples de w_{n+1} también se anulan las derivadas.

Los aproximantes multipuntuales de Padé aparecen de manera natural en diferentes problemas de aproximación. Son casos particulares de aproximantes multipuntuales de Padé los polinomios de interpolación de Lagrange y las fracciones racionales de mejor aproximación en la norma L^p en un intervalo de $\mathbb{R}$. Utilizando está conexión, Gonchar [30] describe la velocidad de convergencia de la mejor aproximación racional en la norma uniforme en un intervalo para una transformada de Markov. En [31], Gonchar y López obtuvieron un teorema análogo al de Markov para aproximantes multipuntuales de Padé. En [40], López demostró la convergencia de estos aproximantes para funciones de Stieltjes asumiendo que los puntos de interpolación y la medida correspondiente satisfacen una condición tipo Carleman. En esta situación, los denominadores de los aproximantes van a ser polinomios ortogonales respecto a medidas variantes.

En diversos problemas es necesario hacer una construcción similar a los aproximantes de Padé para varias funciones simultáneamente. Así definimos los *aproximantes de Hermite-Padé*. La aproximación de Hermite-Padé es una aproximación simultánea a un vector de funciones $(f_1,\ldots,f_r)$ dadas como series de potencias. Supongamos que tenemos r funciones con desarrollos de Laurent

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k,j}}{z^{k+1}}, \quad j=1,\ldots,r.$$

Sea un multi-índice $n=(n_1,\ldots,n_r)$, y denotemos $|n|=n_1+\cdots+n_r$. Entonces tenemos dos tipos de aproximación de Hermite-Padé:

- Tipo I: consiste en encontrar un vector de polinomios $(A_{n_1},\ldots,A_{n_r})$, con $\mathrm{gr}(A_{n_j})\leq n_j-1$, y un polinomio $B_{|n|}$ con $\mathrm{gr}(B_{|n|})\leq|n|$ tales que

$$\sum_{j=1}^{r}A_{n_j}f_j(z)-B_{|n|}(z)=\frac{C}{z^{|n|}}+\cdots.$$

- Tipo II: consiste en encontrar un polinomio $Q_{|n|}$, $\mathrm{gr}(Q_{|n|})\leq|n|$, y polinomios P_{n_j}, $\mathrm{gr}(P_{n_j})\leq|n|-1$, tales que

$$Q_{|n|}(z)f_j(z)-P_{n_j}(z)=\frac{B_{j,n}}{z^{n_j+1}}+\cdots, \quad j=1,\ldots,r.$$

Como ya hemos mencionado, estos aproximantes simultáneos los introdujo Hermite [35] en su famosa demostración de la trascendencia del número e. Observar que si $r=1$, los aproximantes de Hermite-Padé coinciden con los aproximantes de Padé clásicos. Sin embargo, la situación Hermite-Padé es bastante más compleja, empezando por no poder asegurar la unicidad de los aproximantes.

La aproximación de Hermite-Padé ha sido ampliamente estudiada para distintos sistemas de funciones: sistemas de Angelesco [5], sistemas de Nikishin [21, 24, 23, 26] y sistemas de funciones tipo Markov [32].

A continuación describimos la estructura de este trabajo. La sección 2 está dedicada a la aproximación racional. En el primer apartado de esa sección presentamos resultados sobre la aproximación de Padé de funciones meromorfas, que se obtienen al sumar una transformada de Cauchy y una función racional. En el segundo apartado exponemos resultados para aproximantes multipuntuales de Padé con un número acotado de polos, que interpolan funciones analíticas en un compacto del plano complejo, en una tabla arbitraria de puntos. En la subsección 2.3 exponemos un resultado probado en [15] para aproximantes de Fourier-Padé análogo al teorema de Stieltjes. En la última parte de la sección 2 presentamos teoremas análogos al de Markov y estimaciones de la velocidad de convergencia para aproximantes de Fourier-Padé para sistemas de Angelesco, extendiendo así la teoría en el caso de Hermite-Padé. La sección 3 tiene dos partes; en la primera se presentan extensiones de los teoremas de Szegő-Geronimus-Kolmorov sobre la relación entre la medida de ortogonalidad y el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales respecto a medidas variantes en la circunferencia unidad y en un arco. En la subsección 3.2 exponemos varios resultados sobre ceros de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad. Cada notación quedará completamente especificada en la sección en la que se encuentra, pero la misma letra puede tener significados diferentes en secciones distintas.

2. APROXIMACIÓN RACIONAL

2.1. Aproximantes de Padé

Una de las limitaciones de los aproximates de Padé es su no linealidad respecto a la función cuyo desarrollo es considerado. No obstante, cuando esta función es la suma de una transformada de Cauchy y una fracción racional, y la medida que define la transformada no tiene lagunas en su soporte (la derivada de Radon-Nikodym de la medida es positiva en todo este intervalo), los aproximantes de Padé son asintóticamente lineales. Este resultado fue probado por Gonchar [29] cuando la medida está soportada en un intervalo acotado; cuando el soporte no es acotado, López [41] probó la referida propiedad asumiendo que los momentos de la medida satisfacen la condición de Carleman; esta condición se debilitó en [9] exigiendo que el problema de momentos asociado a la medida que define la transformada estuviese determinado. Allí se probó que si $f(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z)$, donde r es una función racional con polos fuera de $[0,\infty)$ y π_n es el aproximante de Padé de f de orden $[n,n]$ en $z=\infty$, entonces es válido el siguiente resultado:

Teorema 1. *Si μ es una medida positiva de Borel con soporte incluido en $[0,\infty)$, cuyo problema de momento de Stieltjes está determinado y $\mu' > 0$ en casi todo punto de $(0,\infty)$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(z) = f(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus ([0,\infty) \cup \{z : r(z) = \infty\})$.

La línea de investigación más activa actualmente en los aproximantes de Padé es la que se refiere a su estudio para funciones multiformes. Nuttall [46] y Stahl [49] probaron que la diagonal de los aproximantes de Padé de una función holomorfa (univalente) en un entorno de infinito, multivaluada en $\mathbb{C}$ excepto en un conjunto polar (su capacidad logarítmica es cero), converge a la rama cuya región tiene frontera de capacidad mínima; probaron la convergencia en capacidad de dicha sucesión. Para mejorar estas estimaciones se ha estudiado la asintótica fuerte (de Szegő) de los denominadores de dichas fracciones (ver [45] y las referencias que allí aparecen).

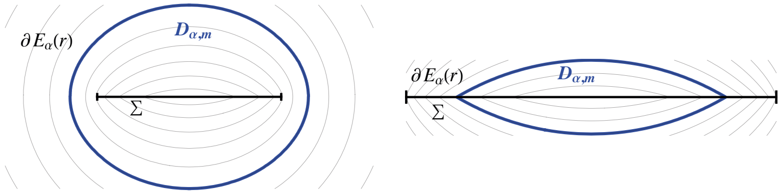

Figura 1: En el primer dibujo $D_{\alpha,m}$ contiene a Σ, mientras en el segundo no lo contiene.

2.2. Región de convergencia y ceros de aproximantes multipuntuales de Padé

En trabajos recientes hemos estudiado propiedades de aproximantes multipuntuales de Padé con un número acotado de polos, para funciones analíticas en un abierto del plano complejo y cuando la tabla de los puntos de interpolación es arbitraria. Sea f una función analítica en un entorno abierto V de un conjunto compacto $\Sigma \subset \mathbb{C}$. Fijamos una familia de polinomios mónicos

$$w_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_{n,i}), \quad n \in \mathbb{N},$$

cuyos ceros están contenidos en Σ. Sea $\Pi_{n,m} = P_{n-m}/Q_n$ el aproximante multipuntual de Padé de orden $[n-m, m]$ de la función f en los ceros de w_{n+1}. Denotamos por α la medida límite de los puntos de interpolación. Esto es,

$$\nu_{w_n} = \frac{1}{n} \sum_i \delta_{\alpha_{n,i}} \xrightarrow[n\to\infty]{*} \alpha,$$

donde $\delta_{\alpha_{n,i}}$ representa la medida de probabilidad que asigna el valor 1 al conjunto $\{\alpha_{n,i}\}$ y la convergencia anterior se toma en la topología débil-$*$. El potencial logarítmico y la energía de α se definen como

$$P(\alpha; z) = -\int \log|z - \zeta| \, d\alpha(\zeta), \quad I(\alpha) = \int P(\alpha; z) \, d\alpha(z).$$

Sea

$$E_\alpha(r) = \{z \in \mathbb{C} : \exp(-P(\alpha; z)) < r\}.$$

Para cada compacto K denotamos

$$\rho_\alpha(K) = \max_{z \in K} \exp(-P(\alpha; z)).$$

Definimos $R_{\alpha,m}$ como el supremo de los números r tales que f admite continuación meromorfa con a lo más m polos en $E_\alpha(r)$. Al conjunto $E_\alpha(R_{\alpha,m})$ lo denotaremos por $D_{\alpha,m}$. En la Figura 1 vemos dos casos diferentes; en el primero, el conjunto Σ está contenido en $D_{\alpha,m}$ mientras que, en el segundo, $D_{\alpha,m}$ no contiene a todo el conjunto Σ.

En [10] se prueba el siguiente resultado que caracteriza la región de continuación meromorfa de la función f con a lo más m polos.

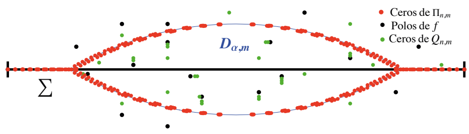

Figura 2: Un ejemplo de la relación de los ceros de $\Pi_{n,m}$ (puntos en rojo) y la región $D_{\alpha,m}$, así como de los polos de f y $\Pi_{n,m}$.

Teorema 2. *Sea K un conjunto compacto regular tal que $\rho_\alpha(K)$ se alcanza en un punto que no pertenece al interior de Σ. Supongamos que la función f está definida en K y existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} ||f - \Pi_{n,m}||_K^{1/n} \leq \frac{\rho_\alpha(K)}{R} < 1.$$

Entonces, $R_{\alpha,m} \geq R$; es decir, f admite continuación meromorfa con a lo más m polos en $E_\alpha(R)$.

En el teorema anterior la regularidad del compacto K significa que el problema de Dirichlet tiene solución única en la componente no acotada del complementario de K. En [25], se hace un estudio de la distribución de los ceros de estos aproximantes, generalizando los teoremas de Jentzsch (ver [36]) y de Szegő (ver [53]) para polinomios de Taylor de funciones analíticas en el origen. Jentzsch y Szegő probaron que los ceros de los polinomios de Taylor se acercan a la circunferencia donde la serie de Taylor converge y la distribución límite es la medida de Lebesgue de dicha circunferencia (la medida de equilibrio de dicha circunferencia).

Estos teoremas de Jentzsch y Szegő han sido extendidos a distintas familias de polinomios y funciones racionales, pero todas ellas satisfaciendo propiedades extremales. Así, se han demostrado teoremas tipo Jentzsch-Szegő para polinomios maximalmente convergentes [55, 34], polinomios de mejor aproximación uniforme [18, 19], polinomios asintóticamente extremales [39], funciones racionales de mejor aproximación [17, 19] y aproximantes de Padé [27]. En [22], el autor prueba teoremas de este tipo para polinomios que interpolan a una función f en una tabla arbitraria de puntos. Los resultados obtenidos en [25] para aproximantes multipuntuales de Padé con las hipótesis establecidas en el inicio de esta subsección son (ver la Figura 2):

Teorema 3. *Sea U un entorno abierto de la envoltura polinomial convexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{D}_{\alpha,m} \cup \Sigma)$. Sea $\Psi_n(U)$ el número de ceros de $\Pi_{n,m}$ en el conjunto U. Entonces existe una subsucesión de índices $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_{n\in\Lambda} \frac{\Psi_n(U)}{n} = 1.$$

Teorema 4. *Supongamos que f no es equivalente a cero en ninguna componente conexa de V y no es meromorfa en $\mathbb{C}$ con a lo más m polos. Supongamos, además, que*

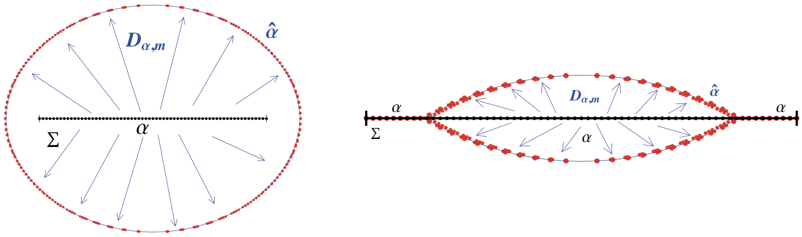

Figura 3: Ceros de $\Pi_{n,m}$ (puntos en rojo) según diferentes relaciones entre Σ y $D_{\alpha,m}$.

$\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{D}_{\alpha,m} \cup \Sigma)$ es conexo con $\partial\Omega = (\overline{D}_{\alpha,m} \cup \Sigma) \setminus D_{\alpha,m}$. Entonces, existe una subsucesión $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\nu_{P_{n-m}} \xrightarrow[n\in\Lambda]{*} \widehat{\alpha},$$

donde $\widehat{\alpha}$, en este contexto, es la medida balayage de α en $\partial D_{\alpha,m}$.

El primer dibujo de la Figura 3 muestra el caso en que Σ está contenido en $D_{\alpha,m}$. La medida balayage $\widehat{\alpha}$ coincide con la medida de equilibrio del conjunto $\partial D_{\alpha,m}$. Notar que los polinomios de Taylor son un caso particular de esta situación, en este caso el origen juega el papel de Σ. En el segundo dibujo de la Figura 3, Σ no está totalmente contenido en $D_{\alpha,m}$; aquí la medida balayage generalizada es

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha_{|_{D_{\alpha,m}}}} + \alpha_{|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{\alpha,m}}}.$$

2.3. Aproximantes multipuntuales y aproximantes de Fourier-Padé para funciones de Stieltjes

En esta sección consideramos la función a aproximar la transformada de Stieltjes $\widehat{\rho}$ de una medida ρ con soporte incluido en $[0,\infty)$ y el conjunto de polos de los aproximantes no acotado. En este caso, los denominadores de los aproximantes serán polinomios ortogonales respecto a medidas variantes. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{z_{n,j} : j = 1,\ldots,2n\}$ un subconjunto de $2n$ puntos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus (0,\infty)$, simétrico respecto al eje real. Ver la Figura 4. Sea $w_n(z)$ el polinomio cuyos ceros son esos puntos

$$w_n(z) = \prod_{|z_{n,i}|<1} (z - z_{n,i}) \prod_{|z_{n,i}|\geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_{n,i}}\right).$$

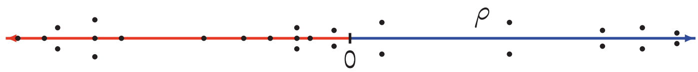

Figura 4: Los puntos negros son los puntos de interpolación. La medida ρ tiene soporte incluido en $[0,\infty)$.

Sea Π_n el aproximante multipuntual de Padé de $\widehat{\rho}$ de orden $[n,n]$ en los puntos de A_n. Dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $I_{n,\epsilon}(z_0)$ la cantidad de puntos de A_n que están en $\{z : |z - z_0| < \epsilon\}$ y por $I_{n,\epsilon}(\infty)$ la cantidad de puntos de A_n que están en $\{z : |z| > \epsilon\}$. En [15] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 5. *Supongamos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no tiene puntos de acumulación en* $(0,\infty)$. *Se cumple*

$$\lim_{n\in\Lambda} \Pi_n(z) = \widehat{\rho}(z),$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$, *si cualquiera de las siguientes condiciones es cierta:*

(i) *Existe* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ *y una sucesión de índices* Λ *tal que para todo* $\epsilon > 0$, $\lim_{n\in\Lambda} I_{n,\epsilon}(z_0) = \infty$. *Esta situación se ilustra en la Figura 5.*

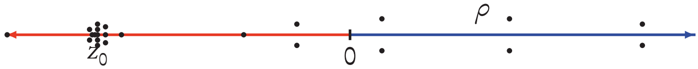

Figura 5: Los puntos de interpolación (puntos negros) tienen un punto de acumulación z_0 alejado de $[0,\infty)$.

(ii) *El problema de momentos de Stieltjes para* ρ *está determinado, existe* $K > 0$ *tal que, para cada* j, $1 \leq j \leq 2n$,

$$\left|1 - \frac{x}{z_{n,j}}\right| \geq K \quad \text{para todo } x \in (0,\infty),\ n \in \Lambda, \tag{2}$$

y, para todo $\epsilon > 0$, $\lim_{n\in\Lambda} I_{n,\epsilon}(\infty) = \infty$. *Ver la Figura 6.*

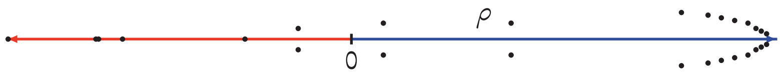

Figura 6: Muchos puntos de interpolación (puntos negros) se van a ∞ de forma no tangencial.

(iii) *El problema de momentos de Stieltjes para* $x\, d\rho(x^{-1})$ *está determinado, existe* $L > 0$ *tal que, para cada* j, $1 \leq j \leq 2n$,

$$\left|1 - \frac{z_{n,j}}{x}\right| \geq L \quad \text{para todo } x \in (0,\infty),\ n \in \Lambda, \tag{3}$$

y, para todo $\epsilon > 0$, $\lim_{n\in\Lambda} I_{n,\epsilon}(0) = \infty$. *Ver la Figura 7.*

(iv) *El problema fuerte de momentos de Stieltjes para* ρ *está determinado, para todo* $\epsilon > 0$ *se tiene que* $\lim_{n\in\Lambda} I_{n,\epsilon}(0) = \infty$ *y* $\lim_{n\in\Lambda} I_{n,\epsilon}(\infty) = 0$, *y se cumplen las condiciones* (2) *y* (3). *Ver la Figura 8.*

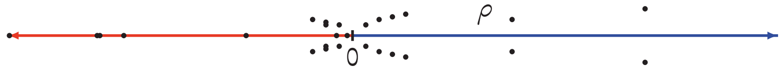

Figura 7: Muchos puntos de interpolación (puntos negros) se van a 0 de forma no tangencial.

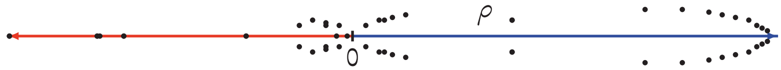

Figura 8: Muchos puntos de interpolación (puntos negros) se van a ∞ o a cero de forma no tangencial.

Los aproximantes multipuntales de Padé juegan un papel fundamental en el estudio de los aproximantes de Fourier-Padé. Estos aproximantes extienden las definiciones de los aproximantes de Padé clásicos de series de potencias al caso de series de polinomios ortogonales. En [8], Barrios, López y Saff estudian este tipo de aproximantes en la circunferencia unidad. Nosotros estudiamos la convergencia de aproximantes de Fourier-Padé, lineales y no lineales, a funciones de Stieltjes.

Sea σ una medida positiva de Borel en $(-\infty,0)$, cuyo soporte contiene infinitos puntos, con momentos finitos, y $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortonormales respecto a σ.

Sea $\Phi_n = \frac{s_n}{t_n}$ el *aproximante lineal de Fourier-Padé* de orden $[n-1,n]$ de la función de Stieltjes $\widehat{\rho}$; es decir, $\mathrm{gr}(s_n)\le n-1$, $\mathrm{gr}(t_n)\le n$, $t_n\not\equiv 0$,

$$c_i(t_n\widehat{\rho}-s_n)=\int (t_n(z)\widehat{\rho}(z)-s_n(z))\varphi_i(z)\,d\sigma(z)=0, \quad i=0,\ldots,2n-1,$$

y sea $F_n = \frac{S_n}{T_n}$ el *aproximante no lineal de Fourier-Padé* de orden $[n-1,n]$ de la función de Stieltjes $\widehat{\rho}$; es decir, $\mathrm{gr}(S_n)\le n-1$, $\mathrm{gr}(T_n)\le n$, $T_n\not\equiv 0$,

$$c_i(\widehat{\rho})=c_i(F_n), \quad i=0,\ldots,2n-1.$$

Con la ayuda del Teorema 5, obtenemos el siguiente resultado para los aproximantes de Fourier-Padé para funciones de Stieltjes.

Teorema 6. *Si los problemas de momentos de Stieltjes para las medidas ρ y $x\,d\rho(x^{-1})$ están determinados, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z)=\widehat{\rho}(z) \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_n(z)=\widehat{\rho}(z),$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

2.4. Aproximantes de Fourier-Padé para sistemas de Angelesco

En [12], estudiamos los aproximantes lineales y no lineales de Fourier-Padé para sistemas de Angelesco. Realmente los podríamos denominar aproximantes de Hermite-Fourier-Padé, ya que son una generalización de los aproximantes de Hermite-Padé cuando, en vez de tomar series de potencias, tomamos series de polinomios ortogonales.

Los aproximantes lineales y no lineales de Fourier-Padé para una función de Markov fueron estudiados por Gonchar, Rakhmanov y Suetin en [33]. Ellos describen la velocidad de convergencia de los aproximantes lineales y no lineales de Fourier-Padé en términos de medidas extremales para determinados problemas de teoría de potencial. Nosotros generalizamos este tipo de resultados para sistemas de Angelesco.

Si $\mu_1, \ldots, \mu_r$ son r medidas positivas finitas de Borel, tales que cada μ_i está soportada en un intervalo acotado $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, r$, con los intervalos $[a_i, b_i]$ disjuntos dos a dos, entonces al vector de funciones de Markov $(\widehat{\mu}_1, \ldots, \widehat{\mu}_r)$ se le llama *sistema de Angelesco*.

Sea σ una medida positiva finita de Borel cuyo soporte contiene infinitos puntos y está contenido en un intervalo cerrado $[c, d]$ disjunto con cada intervalo $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, r$. Ver la Figura 9. Denotamos por $\{\varphi_n\}_n$ la sucesión de polinomios ortonormales respecto a σ. Sea un multi-índice

$$n = (n_1, \ldots, n_r), \text{ con } |n| = n_1 + \cdots + n_r,$$

tal que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_j}{|n|} \in (0, 1), \quad j = 1, \ldots, r.$$

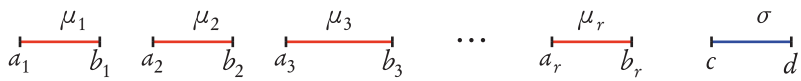

Figura 9: Una posible distribución de los soportes de las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_r$ del sistema de Angelesco y de la medida σ respecto a la que se considera el desarrollo de Fourier.

Llamaremos *sistema de aproximantes lineales de Fourier-Padé* del sistema de Angelesco al vector de fracciones racionales $\left(\frac{P_{n_1}}{Q_{|n|}}, \ldots, \frac{P_{n_r}}{Q_{|n|}}\right)$, donde $\mathrm{gr}(Q_{|n|}) \leq |n|$, $\mathrm{gr}(P_{n_i}) \leq |n| - 1$, $i = 1, \ldots, r$, $Q_{|n|} \not\equiv 0$ y

$$Q_{|n|}(z)\widehat{\mu}_i(z) - P_{n_i}(z) = A_{n,i}\varphi_{|n|+n_i}(z) + \cdots, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Hemos obtenido un resultado sobre «velocidad de convergencia» de estos aproximantes simultáneos a un sistema de Angelesco, en el caso en que las medidas σ, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ son regulares en el sentido de Stahl y Totik, [50, pág. 61], en los correspondientes intervalos donde se han elegido los soportes de estas medidas. El resultado, probado en [12], es el siguiente:

Teorema 7. *Sea $(\widehat{\mu}_1,\ldots,\widehat{\mu}_r)$ un sistema de Angelesco. Sea $\left(\frac{P_{n_i}}{Q_{|n|}}\right)_{i=1}^{r}$ su sistema de aproximantes lineales de Fourier-Padé con respecto a la medida σ. Si las medidas satisfacen las condiciones citadas más arriba, entonces*

$$\lim_{|n|\to\infty}\left|\widehat{\mu}_i(z)-\frac{P_{n_i}(z)}{Q_{|n|}(z)}\right|^{1/|n|}=G_i(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus(\cup_{j=1}^{r}[a_j,b_j]\cup[c,d])$, donde las funciones $G_i(z)$, $i=1,\ldots,r$, se expresan en términos de potenciales de las componentes de la medida (vectorial) de equilibrio para cierto problema de teoría de potencial.

Hemos obtenido resultados análogos para aproximantes no lineales de Fourier-Padé. Es decir, $T_{|n|}$, $S_{n_1},\ldots,S_{n_r}$ tales que:

(i) $\mathrm{gr}(T_{|n|})\leq|n|$, $\mathrm{gr}(S_{n_j})\leq|n|-1$, $j=1,\ldots,r$, $T_{|n|}(z)\neq 0$, $z\in[c,d]$,

(ii)
$$\widehat{\mu}_i(z)-\frac{S_{n_i}(z)}{T_{|n|}(z)}=B_{n,i}\varphi_{|n|+n_i}(z)+\cdots,\quad i=1,\ldots,r.$$

En la aproximación racional, la línea de investigación más activa actualmente es el estudio de los aproximantes Hermite-Padé. Las cuestiones que más interesan son: su aplicación en la teoría de números, la aproximación de sistemas de funciones de Markov generadas por un grafo que incluyen los sistemas de Nikishin, los aproximantes de Hermite-Padé para funciones multiformes y su más reciente conexión con la teoría de matrices aleatorias. Una buena referencia para ver todas estas cuestiones es [6].

3. POLINOMIOS ORTOGONALES

3.1. Teoremas de Szegő-Geronimus-Kolmogorov

Sean σ una medida boreliana de probabilidad en $[0,2\pi)$ y los números complejos $z_{n,j}$, $j=1,\ldots,n$, $n\in\mathbb{N}$, en el disco unidad $\overline{\mathbb{D}}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$. Sea $W_n(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-z_{n,j})$, $n=1,2,\ldots$, y $W_0(z)=1$. Asumimos que las fracciones racionales de orden n con polos $z_{n,j}$, $j=1,\ldots,n$, son densas en $L^2(\sigma)$; es decir, dichas fracciones racionales están en $L^2(\sigma)$ y dada $f\in L^2(\sigma)$ existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|f(e^{i\theta})-\frac{p_n(e^{i\theta})}{W_n(e^{i\theta})}\right|^2 d\sigma(\theta)=0.$$

Sea

$$c_{n,k}=\int\frac{d\sigma(\theta)}{\prod_{j=1}^{k}|e^{i\theta}-z_{n,j}|^2}.$$

Para que se cumpla esta condición de densidad es suficiente que se satisfaga una de las dos afirmaciones siguientes:

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}(1-|z_{n,j}|)=\infty$.
2. Existe una sucesión de números reales positivos $\{M_k\}$ tales que

$$c_{n,k} \le M_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}^{1/(2k)} < \infty.$$

En cualquiera de estas situaciones existe una única sucesión de polinomios $\varphi_n(z) = \varkappa_n z^n + \cdots$, $n \ge 0$, con coeficiente principal positivo $\varkappa_n > 0$, ortonormales respecto a las medidas $d\sigma_n = d\sigma/|W_n(z)|^2$; i. e. para $0 \le k \le n-1$,

$$\int \varphi_n(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\, d\sigma_n(\theta) = 0, \qquad \int \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\sigma_n(\theta) = 1.$$

Los polinomios $\{\varphi_n\}$ reciben el nombre de *polinomios ortogonales variantes* respecto a σ_n. Cuando $z_{n,j} = 0$ para todo n, j, se obtienen los llamados *polinomios ortogonales en la circunferencia unidad* (OPUC) respecto a la medida σ, que están relacionados con los polinomios ortogonales respecto a una medida con soporte en un intervalo en el eje real. Esta relación se puede establecer con el cambio de variable $x = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$. Cuando $z_{n,j} = 1$, con la transformación anterior se obtienen polinomios ortogonales cuya medida asociada tiene soporte no acotado.

Así, si $z_{n,j} = 0$ para todo n, j, los polinomios $\{\varphi_n\}$ son ortogonales respecto a la medida σ y satisfacen las relaciones de recurrencia

$$\varkappa_n \varphi_{n+1}(z) = \varkappa_{n+1} z \varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\varphi_n^*(z), \quad n \ge 0, \tag{4}$$

donde $\varphi_n^*(z) = z^n \overline{\varphi_n(1/\overline{z})}$. Los OPUC fueron introducidos por Szegő [52] en su estudio de formas de Toeplitz y de la teoría general de polinomios ortogonales en el eje real. Los resultados de Szegő, conjuntamente con los obtenidos por Kolmogorov y Geronimus, quedan planteados en el siguiente resultado. Son equivalentes las afirmaciones siguientes:

1. Se tiene que $\log \sigma'$ es una función integrable respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi)$; i. e.,

$$\int |\log \sigma'(\theta)|\, d\theta < \infty. \tag{5}$$

2. El espacio de los polinomios trigonométricos no es denso en $L^2(\sigma)$.
3. La función $e^{-i\theta}$ no está en la clausura en $L^2(\sigma)$ del espacio de los polinomios trigonométricos.
4. Existe (es finito) $\lim_{n\to\infty} \varkappa_n$.
5. Existe, para algún $z \in \mathbb{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(z). \tag{6}$$

La función σ' representa la derivada de Radon-Nykodym de σ respecto a la medida de Lebesgue $d\theta$ en $[0,2\pi)$. El límite en (6) se describe en términos de la función de Szegő; más exactamente, si se cumple (5), entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(z) = \frac{1}{D(\sigma,z)},$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, donde

$$D(\sigma,z) = \exp\left(\frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log\sigma'(\theta)\,d\theta\right), \quad |z|\neq 1.$$

Esta es una función de $\mathscr{H}^2(\mathbb{D})$ cuyo valor frontera en la circunferencia unidad satisface $|D(\sigma,e^{i\theta})|^2 = \sigma'(\theta)$ c.t.p. de $[0,2\pi)$.

Para polinomios ortogonales respecto a medidas variantes las implicaciones $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$ fueron probadas por López (ver [42] y [43]). Las equivalencias en el otro sentido, es decir, $5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$, fueron probadas en [16]; en ese artículo también se demuestra un teorema similar al de Szegő-Geronimus-Kolmogorov para polinomios ortogonales respecto a una medida que está soportada en un arco de la circunferencia unidad. La idea de relacionar polinomios ortogonales respecto a una medida que está soportada en un arco de la circunferencia unidad con otros respecto a medidas variantes también fue utilizada en [11] para obtener un teorema sobre asintótica del cociente para polinomios ortogonales consecutivos respecto a una medida cuyo soporte es un arco de la circunferencia unidad.

Los polinomios ortogonales respecto a una medida cuyo soporte es un arco de la circunferencia unidad tienen gran interés en el estudio de matrices aleatorias (ver [37]). Una clase particularmente interesante de polinomios ortogonales respecto a medidas con soporte en un arco de la circunferencia unidad son los llamados polinomios de Akhiezer $\varphi_n(z)$ (ver [28]); i. e.,

$$\varphi_n(z) = K_n\left\{\frac{\Omega(1/v)}{1-\beta v}w^n(v) + \frac{v\Omega(v)}{v-\beta}w^n(1/v)\right\}, \quad z = \frac{(v-\beta)(\beta v-1)}{(v+\beta)(\beta v+1)}, \tag{7}$$

donde $\beta = i\tan((\pi-\alpha)/4)$, $\alpha\in(0,\pi)$, $K_n = K_n(\Omega)$ es una sucesión de números complejos no nulos, Ω es una fracción racional de la forma

$$\Omega(v) = \frac{P(v)}{v^{\epsilon_0}(v-1)^{\epsilon_-}(v+1)^{\epsilon_+}(v^2-\beta^2)^q},$$

con $\epsilon_0,\epsilon_\pm$ iguales a 0 o 1 y P un polinomio tal que $\mathrm{gr}(P)\leq 2q+\epsilon_0+\epsilon_-+\epsilon_+$, de modo que

$$\Omega(v)\neq 0 \text{ para } |v|\geq 1, \quad \Omega(x) = \overline{\Omega(x)}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Los polinomios en (7) para $n\geq n_0(\Omega)$ son ortogonales respecto a la medida en el arco $\Delta_\alpha := [e^{i\alpha}, e^{i(2\pi-\alpha)}]$ cuyo peso está dado por

$$W(e^{i\theta},\Omega) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{2\operatorname{sen}(\theta/2)\sqrt{\cos^2(\alpha/2)-\cos^2(\theta/2)}|\Omega(e^{i\omega})|^2}, \quad \theta\in[\alpha,2\pi-\alpha],$$

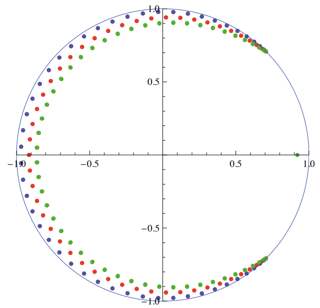

Figura 10: Los ceros de φ_n'' están en verde; en rojo están los ceros de φ_n'; en azul, los ceros de los polinomios φ_n para $\Omega = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $n = 50$.

y $n_0(\Omega)$ es un número natural que depende de Ω. Además, una propiedad muy interesante de los polinomios (7) es que satisfacen las ecuaciones de segundo grado

$$A(z,n)\varphi_n''(z) + \cos(\alpha/2)B(z,n)\varphi_n'(z) + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}C(z,n)\varphi_n(z) = 0,$$

donde

$$A(z,n) = z(z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha}),$$

$B(z,n), C(z,n)$ son polinomios en z y en n. Esta ecuación diferencial permite probar que la distribución asintótica de los ceros de las derivadas de los polinomios en (7) es la medida de equilibrio del arco, como ocurre con los ceros de los propios polinomios (ver [2] y la Figura 10).

Teorema 8. *Si σ es una medida regular en el sentido de Stahl y Totik cuyo soporte es un arco de la circunferencia unidad, entonces para todo número k entero no negativo se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{\varphi_n^{(k)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\chi_{[\alpha,2\pi-\alpha]}(\theta)\operatorname{sen}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos^2(\alpha/2) - \cos^2(\theta/2)}},$$

donde $\chi_{[\alpha,2\pi-\alpha]}(\theta)$ es la función indicadora del intervalo $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.

En [13] se demostró que la equivalencia $1 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ está directamente relacionada con la convexidad estricta de $\mathscr{H}^2(\sigma)$, la clausura en $L^2(\sigma)$ del espacio de los polinomios algebraicos. Aunque en [13] y [14] se probaron resultados más generales, para no introducir demasiadas notaciones, a continuación formulamos un teorema probado allí que indica la cuestión fundamental tratada y que extiende un resultado de Newman:

Teorema 9. *Sean $f_n \in \mathscr{H}^p$ y $f \in \mathscr{H}^p$, $0 < p < \infty$. Si $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_p = ||f||_p$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0.$$

3.2. Sobre los ceros de OPUC

Los polinomios ortogonales respecto a una medida en la circunferencia unidad es un tema que ha recibido mucha atención en los últimos años. El enfoque moderno de esta teoría se considera a partir de los trabajos de Rakhmanov y Nevai, Máté y Totik a finales de la década de 1980. Un nuevo impulso a esta teoría ha tenido lugar con la publicación de los libros de Simon [47, 48]. Con los trabajos de Simon se establece una conexión de beneficio mutuo entre los OPUC y la teoría espectral de las ecuaciones de Schrödinger.

La relación (4), junto con un teorema de Verblunsky, dice que una familia de OPUC es una familia uni-paramétrica, que queda determinada por la sucesión $\Phi_n(0) \in \mathbb{D}$, $n = 1, \ldots$; es decir, dada una sucesión $\{a_n : n \geq 1\}$ en $\mathbb{D}$, existe una única medida boreliana de probabilidad σ en $[0, 2\pi)$ tal que los polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n : n \geq 1\}$ tienen valor en 0 igual a a_n para todo $n \geq 1$. En particular, si se conoce una sucesión $\{w_n : n \geq 1\}$ de números complejos en el círculo unidad abierto, $w_n \in \mathbb{D}$, $\forall n \geq 1$, existe una única medida boreliana de probabilidad σ en $[0, 2\pi)$ tal que los polinomios ortonormales satisfacen

$$\Phi_n(w_n) = 0, \quad \forall n \geq 1. \tag{8}$$

Es decir, conociendo un cero de cada uno de los polinomios $\{\Phi_n : n \geq 1\}$, se tiene información suficiente para determinar toda la familia de polinomios ortogonales. En los trabajos [1] y [3] hemos obtenido resultados que describen propiedades de los OPUC a partir de propiedades de una sucesión $\{w_n : n \geq 1\}$ que satisface (8). En [3] se prueba el siguiente resultado:

TEOREMA 10. *Supongamos que Φ_n tiene un cero en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ para todo n suficientemente grande. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(0)|^{1/n} \leq \min\{2r, 1\}.$$

El valor $\limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(0)|^{1/n}$ determina, si es menor que 1, el radio de la circunferencia donde se distribuyen los ceros de los OPUC (ver la Figura 11). El teorema anterior responde a una cuestión planteada por V. Totik sobre densidad de ceros de los polinomios en el círculo unidad.

En [1] se consideran OPUC que comparten ceros; por ejemplo, se estudia la situación cuando Φ_n y Φ_{n+2} o Φ_n y Φ_{n+3} comparten un cero para todo n suficientemente grande. Este hecho determina propiedades asintóticas de los OPUC como muestra el siguiente resultado:

TEOREMA 11. *Supongamos que Φ_n y Φ_{n+3} tienen un cero común para todo n suficientemente grande; esto es, existen $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \subset \mathbb{D}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\Phi_n(\zeta_j) = 0, \quad n \equiv j \pmod 3, \quad n \geq n_0,$$

y sea $r = \max\{|\zeta_j| : j = 1, 2, 3\}$. Se cumple:

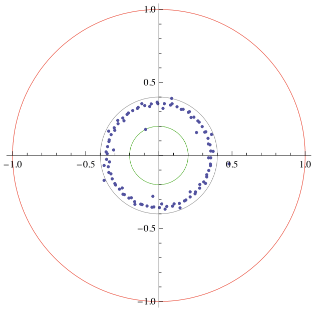

Figura 11: Se fija un cero de Φ_n con módulo 0.2, el resto (puntos en azul) se acerca a la circunferencia de radio 0.4. Aquí $n = 100$.

(i) *Si* $r \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(0) = 0$.

(ii) *Si, además,* $r < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, *entonces* $\limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(0)|^{1/n} \leq \dfrac{r^2}{1-r} < 1$.

El estudio de las propiedades de los polinomios ortogonales está determinado actualmente por sus aplicaciones. Además de su conexión con la aproximación racional, ya mencionada anteriormente, otra de las líneas de investigación más activa está relacionada con las matrices aleatorias y el estudio de sus propiedades asintóticas a través de problemas de valores frontera de Riemann-Hilbert; ver [6, 45] y las referencias que en esos trabajos aparecen. Motivado por la teoría espectral de operadores, el estudio de las propiedades de los ceros de polinomios ortogonales es un tema de actualidad, como muestra uno de los ganadores de la medalla Fields de este año junto a otros autores en el artículo [7].

REFERENCIAS

[1] M. P. Alfaro, M. Bello-Hernández y J. M. Montaner, On the zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **170** (2013), 134–154.

[2] M. P. Alfaro, M. Bello-Hernández y J. M. Montaner, On differential properties of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, pendiente de publicación.

[3] M. P. Alfaro, M. Bello-Hernández, J. M. Montaner y J. L. Varona, Some asymptotic properties for orthogonal polynomials with respect to varying measures, *J. Approx. Theory* **135** (2005), 22–34.

[4] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, *Astérisque* **61** (1979), 11–13.

[5] A. Aptekarev, Asymptotics of polynomials of simultaneous orthogonality in the Angelescu case, *Math. USSR-Sb.* **64** (1989), 57–84.

[6] A. I. Aptekarev y A. B. J. Kuijlaars, Hermite-Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles, *Uspekhi Mat. Nauk* **66** (2011), 123–190.

[7] A. Avila, Y. Last y B. Simon, Bulk universality and clock spacing of zeros for ergodic Jacobi matrices with absolutely continuous spectrum, *Anal. PDE* **3** (2010), 81–108.

[8] D. Barrios Rolanía, G. López-Lagomasino y E. B. Saff, Asymptotics of orthogonal polynomials inside the unit circle and Szegő-Padé approximants, *J. Comput. Appl. Math.* **133** (2001), 171–181.

[9] M. Bello-Hernández, Convergence of Padé approximants of Stieltjes-type meromorphic functions and the relative asymptotics of orthogonal polynomials on the real line, *J. Approx. Theory* **162** (2010), 363–381.

[10] M. Bello-Hernández y B. de la Calle Ysern, Meromorphic continuation of functions and arbitrary distribution of interpolation points, *J. Math. Anal. Appl.* **403** (2013), 107–119.

[11] M. Bello-Hernández y G. López-Lagomasino, Ratio and relative asymtotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle, *J. Approx. Theory* **92** (1998), 216–244.

[12] M. Bello-Hernández, G. López-Lagomasino y J. Mínguez-Ceniceros, Fourier-Padé approximants for Angelesco systems, *Constr. Approx.* **26** (2007), 339–359.

[13] M. Bello-Hernández, F. Marcellán y J. Mínguez-Ceniceros, Pseudouniform convexity in H^p and some extremal problems on Sobolev spaces, *Complex Var. Theory Appl.* **48** (2003), 429–440.

[14] M. Bello-Hernández y J. Mínguez-Ceniceros, Strong asymptotic behavior for extremal polynomials with respect to varying measures on the unit circle, *J. Approx. Theory* **125** (2003), 131–144.

[15] M. Bello-Hernández y J. Mínguez-Ceniceros, Convergence of Fourier-Padé approximants for Stieltjes functions, *Canad. J. Math.* **58** (2006), 249–261.

[16] M. Bello-Hernández y E. Miña-Díaz, Strong asymptotic behavior and weak convergence of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle, *J. Approx. Theory* **111** (2001), 233–255.

[17] H.-P. Blatt y R. K. Kovacheva, Groth behavior and zero distribution of rational approximants, *Constr. Approx.* **34** (2011), 393–420.

[18] H.-P. Blatt y E. B. Saff, Behavior of zeros of polynomials of near best approximation, *J. Approx. Theory* **46** (1986), 323–344.

[19] H.-P. Blatt, E. B. Saff y M. Simkani, Jentzsch-Szegő type theorems for the zeros of best approximants, *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 307–316.

[20] E. Bombieri, Continued fractions and the Markoff tree, *Expo. Math.* **25** (2007), 187–213.

[21] J. Bustamante y G. López-Lagomasino, Hermite-Padé approximation for Nikishin systems of analytic functions, *Acad. Sci. Sb. Math.* **77** (1994), 367–384.

[22] B. de la Calle Ysern, The Jentzsch-Szegő theorem and balayage measures, *Constr. Approx.*, por aparecer.

[23] B. de la Calle Ysern y G. López-Lagomasino, Strong asymptotics of orthogonal polynomials with varying measures and Hermite-Padé approximants, *J. Comput. Math.* **99** (1998), 91–103.

[24] B. de la Calle Ysern y G. López-Lagomasino, Weak convergence of varying measures and Hermite-Padé orthogonal approximants, *Constr. Approx.* **15** (1999), 553–575.

[25] B. de la Calle Ysern y J. Mínguez-Ceniceros, Rate of convergence of row sequences of multipoint Padé approximants, sometido a evaluación.

[26] K. Driver y H. Stahl, Simultaneous rational approximants to Nikishin systems II, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **61** (1995), 261–284.

[27] A. Edrei, Angular distribution of the zeros of Padé polynomials, *J. Approx. Theory* **24** (1978), 251–265.

[28] L. Golinskii, On Akhiezer's orthogonal polynomials and Bernstein-Szegő method for a circular arc, *J. Approx. Theory* **95** (1998), 229–263.

[29] A. A. Gonchar, On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions, *Math. USSR-Sb.* **26** (1975), 555–575.

[30] A. A. Gonchar, On the speed of rational approximation of some analytic functions, *Math. USSR-Sb.* **34** (1978), 131–145.

[31] A. A. Gonchar y G. López-Lagomasino, Markov's theorem for multipoint Padé approximants, *Math. USSR-Sb.* **34** (1978), 449–459.

[32] A. A. Gonchar, E. A. Rakhamanov y V. N. Sorokin, Hermite-Padé approximants for systems of Markov type functions, *Sb. Math.* **188** (1997), 671–696.

[33] A. A. Gonchar, E. A. Rakhamanov y S. P. Suetin, On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, 1990), 169–190, Springer Ser. Comput. Math. **19**, Springer, New York, 1992.

[34] R. Grothmann, Distribution of interpolation points, *Ark. Mat.* **34** (1996), 103–117.

[35] C. Hermite, Sur la fonction exponentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **77** (1873), 18–24. 74–79, 226–233, 285–293; publicado también en sus «Oeuvres», Tome III, Gauthier-Villars, Paris, 1912, 150–181.

[36] R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, *Acta Math.* **41** (1918), 219–251.

[37] I. V. Krasovsky, Gap probability in the spectrum of random matrices and asymptotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle, *Int. Math. Res. Not.* **25** (2004), 1249–1272.

[38] S. Krushchev, The Euler-Lagrange theory for Schur's Algorithm: Algebraic exposed points, *J. Approx. Theory* **139** (2006), 402–429.

[39] H. N. Mhaskar y E. B. Saff, The distribution of zeros of asymptotically extremal polynomials, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 279–300.

[40] G. López-Lagomasino, Conditions for convergence of multipoint Padé approximants for functions of Stieltjes type, *Math. USSR-Sb.* **35** (1979), 363–376.

[41] G. López-Lagomasino, Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics of orthogonal polynomials, *Math. USSR-Sb.* **64** (1989), 207–227.

[42] G. López-Lagomasino, On Szegő's Theorem for Polynomials Orthogonal with Respect to Varying Measures on the Unit Circle, *Lecture Notes in Math.* **1329**, 255–260, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[43] G. López-Lagomasino, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.* **5** (1989), 199–219.

[44] A. A. Markov, Deux démonstrations de la convergence de certains fractions continues, *Acta Math.* **19** (1895), 93–104.

[45] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov y S. P. Suetin, Heine, Hilbert, Padé, Riemann, and Stieltjes: John Nuttall's work 25 years later, *Contemp. Math.* **578** (2012), 165–193.

[46] J. Nuttall, Asymptotics of generalized Jacobi polynomials, *Constr. Approx.* **2** (1986), 59–77.

[47] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1: Classical Theory*, AMS Colloquium Publications **54**, AMS, Providence, RI, 2005.

[48] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2: Spectral Theory*, AMS Colloquium Publications **54**, AMS, Providence, RI, 2005.

[49] H. Stahl, Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **6** (1996), Special issue «100 ans après Th.-J. Stieltjes», 121–193.

[50] H. Stahl y V. Totik, *General orthogonal polynomials*, Encycl. Math. **43**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[51] T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1894), 1–47. También en *Oeuvres completes* **2**, 402–566, Noordhoff, Groningen, 1918.

[52] G. Szegő, Beitrage zur Theorie der Toeplitzschen Formen, II, *Mathematische Zeitschrift* **9** (1921), 167–190.

[53] G. Szegő, Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreis gleichmäßig konvergieren, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **21** (1922), 59–64.

[54] W. Van Assche, Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcedence, *Contemp. Math.* **236** (1999), 325–342.

[55] J. L. Walsh, The convergence of sequences of rational functions of best approximation, *Math. Annalen* **155** (1964), 252–264.

ZUBÍA

26

9 771131 542004 00026

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto de Estudios Riojanos