

# ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

MONOGRÁFICO

26

*ier*

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO  
REVISTA DE CIENCIAS.  
Nº 26 (2014). Logroño (España).  
P. 1-235, ISSN: 1131-5423



## **DIRECTORA**

Purificación Ruiz Flaño

## **CONSEJO DE REDACCIÓN**

Luis Español González  
Rubén Esteban Pérez  
Rafael Francia Verde  
Juana Hernández Hernández  
Luis Miguel Medrano Moreno  
Patricia Pérez-Matute  
Enrique Requeta Loza  
Rafael Tomás Las Heras

## **CONSEJO CIENTÍFICO**

José Antonio Arizaleta Urarte  
(Instituto de Estudios Riojanos)  
José Arnáez Vadillo  
(Universidad de La Rioja)  
Susana Caro Calatayud  
(Instituto de Estudios Riojanos)  
Eduardo Fernández Garbayo  
(Universidad de La Rioja)  
Rosario García Gómez  
(Universidad de La Rioja)  
José M.ª García Ruiz  
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)  
Javier Guallar Otazua  
(Universidad de La Rioja)  
Teodoro Lasanta Martínez  
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)  
Joaquín Lasierra Cirujeda  
(Hospital San Pedro, Logroño)  
Luis Lopo Carramiñana  
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)  
Fernando Martínez de Toda  
(Universidad de La Rioja)  
Alfredo Martínez Ramírez  
(Centro de Investigación Biomédica de La Rioja –CIBIR–)  
Juan Pablo Martínez Rica  
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)  
José Luis Nieto Amado  
(Universidad de Zaragoza)  
José Luis Peña Monné  
(Universidad de Zaragoza)  
Félix Pérez-Lorente  
(Universidad de La Rioja)  
Diego Troya Corcuera  
(Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, Estados Unidos)  
Eduardo Viladés Juan  
(Hospital San Pedro, Logroño)  
Carlos Zaldívar Ezquerro  
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)

## **DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN**

Instituto de Estudios Riojanos  
C/ Portales, 2  
26071 Logroño  
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €  
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €  
Número suelto: 9 €  
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

# ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

INVESTIGACIÓN EN EL  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN  
DE LA UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Coordinadores

ÓSCAR CIAURRI RAMÍREZ Y LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ



Gobierno de La Rioja  
Instituto de Estudios Riojanos  
LOGROÑO

2014

**Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja** / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014

235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)

51:37.02 (460.21)

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse ni transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electro-óptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito de los titulares del copyright.

- © Logroño, 2014  
Instituto de Estudios Riojanos  
C/ Portales, 2  
26001-Logroño, La Rioja (España)
- © Diseño del interior: Juan Luis Varona (Universidad de La Rioja), a partir de los archivos LaTeX proporcionados por los autores.
- © Imagen de la cubierta: Composición fractal realizada por *José Pérez Valle*.
- © Imagen de la contracubierta: Fotografía de la Nebulosa Trífida (M20), en la constelación de Sagitario, tomada en Murillo de Río Leza por la *Agrupación Astronómica de La Rioja* el 25 de agosto de 2014.

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423

Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

# ÍNDICE

## PRESENTACIÓN

Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González (*Coordinadores*) ..... 7–9

---

## PRÓLOGO

José Luis Ansorena (*Director del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja*) ..... 11–12

---

## JOSÉ LUIS ANSORENA

Espacios de funciones derivables  
*Spaces of differentiable functions* ..... 13–18

---

JESÚS ARANSAY, JOSÉ DIVASÓN, CÉSAR DOMÍNGUEZ,  
FRANCISCO GARCÍA, JÓNATHAN HERAS, ARTURO JAIME,  
LAUREANO LAMBÁN, ELOY MATA, GADEA MATA, JUAN JOSÉ OLARTE,  
VICO PASCUAL, BEATRIZ PÉREZ, ANA ROMERO, ÁNGEL LUIS RUBIO,  
JULIO RUBIO, EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN

Informática para las Matemáticas, Matemáticas para la Informática,  
Informática Aplicada  
*Computer Science for Mathematics, Mathematics for Computer Science,  
Applied Computer Science* ..... 19–37

---

ALBERTO ARENAS, ÓSCAR CIAURRI, EDGAR LABARGA,  
LUZ RONCAL, JUAN LUIS VARONA

Series de Fourier no trigonométricas: una perspectiva familiar  
*Nontrigonometric Fourier series: a familiar point of view* ..... 39–54

---

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ, JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS

Aproximación racional y polinomios ortogonales  
*Rational approximation and orthogonal polynomials* ..... 55–76

---

PILAR BENITO, DANIEL DE-LA-CONCEPCIÓN, JESÚS LALIENA,  
SARA MADARIAGA, JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO

Algunos aspectos del álgebra no asociativa  
*Some aspects on nonassociative algebra* ..... 77–96

---

**ROBERTO CASTELLANOS FONSECA, CLARA JIMÉNEZ-GESTAL,  
JESÚS MURILLO RAMÓN**  
Didáctica de la Matemática: cuándo el cómo cuenta tanto (casi) como el qué  
*Mathematics Education: when how is (almost) as important as what* ..... 97–117

---

**LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ**  
Investigaciones sobre Julio Rey Pastor realizadas desde La Rioja  
entre 1982 y 2000  
*Researches about Julio Rey Pastor made from La Rioja  
between 1982 and 2000* ..... 119–141

---

**JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO,  
MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ**  
Modelos de Quillen, espacios y flujos exteriores y algunas aplicaciones  
*Quillen models, exterior spaces and flows, and some applications* ..... 143–164

---

**JOSÉ ANTONIO EZQUERRO, DANIEL GONZÁLEZ,  
JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ, MIGUEL ÁNGEL HERNÁNDEZ-VERÓN,  
ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN, NATALIA ROMERO, MARÍA JESÚS RUBIO**  
Resolución de ecuaciones no lineales mediante procesos iterativos  
*Solving nonlinear equations by iterative processes* ..... 165–200

---

**MANUEL IÑARREA, WAFAA KANAAN, VÍCTOR LANCHARES,  
ANA ISABEL PASCUAL, JOSÉ PABLO SALAS**  
Sistemas dinámicos: de los átomos al sistema solar  
*Dynamical systems: from the atoms to the solar system* ..... 201–219

---

**JAVIER PÉREZ LÁZARO**  
Regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood  
*Regularity of the Hardy-Littlewood maximal function* ..... 221–227

---

## DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: CUANDO EL CÓMO CUENTA TANTO (CASI) COMO EL QUÉ

ROBERTO CASTELLANOS FONSECA<sup>1</sup>,  
CLARA JIMÉNEZ-GESTAL<sup>1</sup>,  
JESÚS MURILLO RAMÓN<sup>1</sup>

### RESUMEN

Este artículo pretende hacer una somera revisión de la investigación realizada en el área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de La Rioja, centrada fundamentalmente en el diseño de entornos interactivos de aprendizaje apoyados en el uso de las TIC y sobre la competencia matemática y perfil emocional. Se presentan en primer lugar los aspectos generales correspondientes al diseño de un sistema interactivo y su aplicación concreta al aprendizaje de la geometría. Como continuación de la investigación se utiliza el entorno interactivo y se analiza la adquisición de competencias matemáticas presentando un modelo de análisis de las mismas, y finalmente se estudia y analiza la interactividad y atención a la diversidad en el aprendizaje de la estadística. Por otra parte, la línea de competencia matemática y perfil emocional está orientada a analizar cómo los factores afectivos influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

*Palabras clave:* Didáctica de la Matemática, interacción, TIC, aprendizaje colaborativo, competencia matemática, atención a la diversidad, creencias.

*This paper aims to provide a brief review of the performed investigation in the area of Mathematics Education at the Universidad de La Rioja. The research is mainly focused on the design of interactive learning environments supported by the use of ICT to work in various branches of mathematics. Moreover, the line of mathematical competence and emotional profile is oriented to analyze how affective factors influence the teaching-learning process.*

*Key words:* Mathematics Education, interaction, ICT, collaborative learning, mathematical competence, attention to diversity, beliefs.

---

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)  
Correo electrónico: {roberto.castellanos, clara.jimenez, jmurillo}@unirioja.es

## 1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas forman parte de la cultura de la humanidad y por ello están integradas en el sistema educativo. En distintos momentos de la historia se ha hecho hincapié en diferentes aspectos de la matemática. Esto ha sido debido a que las capacidades matemáticas que necesita un sujeto para formar parte activa de la sociedad han ido variando a lo largo del tiempo, y con ellas han variado los contenidos enseñados y las metodologías utilizadas para ello.

Los profesionales que se dedican a la enseñanza de las matemáticas son los responsables de la transmisión del conocimiento de la materia, tanto básico como científico, así como de la capacitación de los estudiantes para seguir desarrollando sus habilidades matemáticas a lo largo de su vida, no sólo durante la etapa escolar.

El área de Didáctica de la Matemática surge en el contexto de la educación matemática, que engloba tanto los conocimientos matemáticos considerados como objeto de enseñanza-aprendizaje como el propio proceso y los condicionantes que lo determinan, y la consideración de la educación matemática como disciplina científica (Rico, Sierra y Castro, 2002). Es este último aspecto al que nos referimos cuando hablamos de Didáctica de la Matemática.

La Didáctica de la Matemática tiene su origen en la necesidad de investigar y formalizar, dotando de un marco teórico adecuado, los diferentes aspectos de la educación matemática. Cuáles son las matemáticas que se deben enseñar y aprender en los distintos niveles educativos; qué metodologías son las más adecuadas para cada situación, nivel o contenido; cómo deben estar estructurados los diferentes currículos para optimizar los aprendizajes; cómo debe ser la formación de los futuros docentes de matemáticas; qué problemas surgen a la hora de enseñar y aprender determinados conceptos; son algunos de los aspectos de los que se ocupa, además de su propia fundamentación teórica.

Es un área relativamente joven, ya que fue a partir de los años 70 del pasado siglo cuando empezó a incorporarse como disciplina en algunas universidades americanas y europeas, si bien en España no fue homologada al resto de áreas de conocimiento de la universidad hasta la Ley de Reforma Universitaria de 1983.

El área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Rioja ha estado vinculada a la formación del profesorado, tanto de educación primaria como de secundaria, desde los orígenes de la institución, si bien sus líneas de investigación se han orientado hacia el diseño y la utilización de entornos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas, educación matemática y diversidad, y actualmente a la relación entre el perfil emocional y la competencia matemática en los maestros en formación.

## 2. ENTORNOS INTERACTIVOS DE APRENDIZAJE

### 2.1. Aspectos epistemológicos

La fundamentación epistemológica de las matemáticas constituye un aspecto básico a considerar y una reflexión ineludible para el educador matemático, ya que según la posición epistemológica que adopte sobre el conocimiento matemático, así interpretará y planteará un currículum y su implementación en el aula. Se asumen las matemáticas como un producto del pensamiento humano, fuertemente influenciado por las culturas en las que se ha desarrollado y se considera la geometría como ciencia del espacio. La consideración epistemológica de las matemáticas como ciencia de los modelos se sustenta en la acepción de la geometría como punto de encuentro de la matemática como teoría y como modelo; es el enfoque geométrico el que permite ver (imaginar) los modelos.

En las propuestas curriculares oficiales españolas de los niveles obligatorios se recoge la idea de que son más importantes las habilidades matemáticas del trabajo geométrico, que una descripción técnica del vocabulario y de los conceptos abstractos.

Algunos objetivos generales, en relación con la formación geométrica, parecen claros y se consideran necesarios para nuestros alumnos al finalizar la educación obligatoria: incorporar la expresión geométrica al lenguaje y modos de argumentación habituales, a fin de comunicarse de manera rigurosa y precisa; utilizar los conocimientos geométricos para modelizar situaciones que nos permitan resolver problemas reales. . . Un asunto más delicado y complejo es la selección de unos determinados contenidos geométricos, para lo cual necesariamente se han de tener en cuenta los aspectos epistemológicos, concepciones y reflexiones planteadas anteriormente en torno a las matemáticas en general y de la geometría en particular. La idea que debería guiar el trabajo en la ESO (Educación Secundaria Obligatoria) es la de resaltar su potencial para desarrollar las capacidades de modelización, resolución, argumentación y racionalización.

### 2.2. Ecosistema de aprendizaje

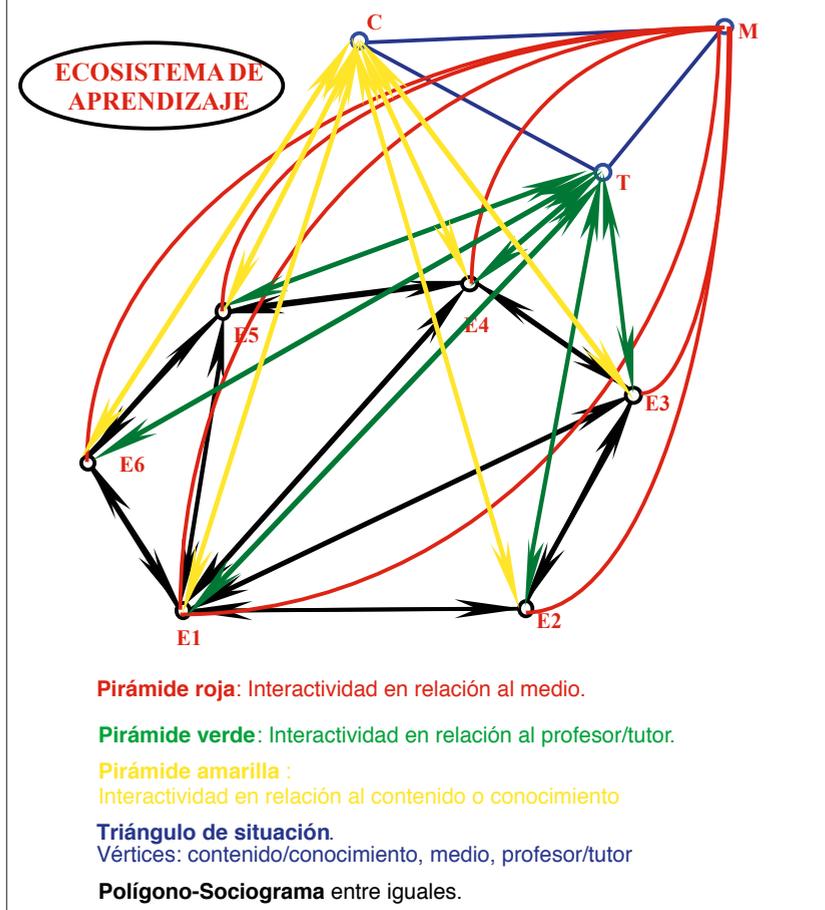
Definimos ecosistema de aprendizaje como *un entorno interactivo, constituido por los alumnos, el contenido, el profesor-tutor y el medio, cuyos procesos de funcionamiento se relacionan entre sí y se desarrollan en función de los factores físicos de un mismo ambiente. La modificación de alguno de sus componentes modifica el estado de los restantes* (Murillo, 2001). Mediante el juego interactivo emerge la identidad personal del alumno por la interacción con los restantes elementos o con sus iguales.

Este entorno de aprendizaje reúne las tres siguientes características:

- Las tareas que se plantean son situaciones problema abiertas.
- El diseño de las actividades consta de múltiples fases (resolución del problema en pequeño grupo, informe y reflexión).

## COMUNIDAD VIRTUAL DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA:

Mediante el juego interactivo en el ecosistema de aprendizaje la identidad personal emerge por la interacción de los miembros de la comunidad



Pirámide de la situación.

- El desarrollo precisa de la utilización de herramientas informáticas.

Con la terminología utilizada por Hershkowitz (Hershkowitz y Schwarz, 1999), a un entorno que cumple las tres anteriores características lo llamamos «entorno rico» (*rich environment*).

El soporte instruccional del modelo de aprendizaje interactivo que hemos llamado *ecosistema de aprendizaje de la geometría* está constituido fundamentalmente por una red electrónica, siendo las actividades con el software de geometría CABRI, presentadas en la página web correspondiente, y el correo electrónico, el medio esencial de aprendizaje. Se utiliza además el tablero del fórum electrónico (fórum), en el que se pueden plantear preguntas, réplicas y contrarréplicas a todos los miembros, quedando reflejado y a la vista de todos el texto de las mismas. En este modelo de aprendizaje interactivo, definimos dos planos y tres pirámides. El plano intersubjetivo o polígono sociograma es en el que se producen las acciones e interacciones entre iguales durante el desarrollo del trabajo colaborativo; cada uno de los vértices del polígono representa a uno de los alumnos que participan en la actividad, las aristas y las diagonales representan las acciones e interacciones entre iguales. El plano de situación o triángulo de situación es donde tienen lugar las acciones e interacciones entre el profesor, el contenido y el medio. Y las tres pirámides representan, respectivamente, la interactividad entre alumnos y medio, entre alumnos y contenido, y entre alumnos y profesor.

Conseguir la participación activa de los alumnos en su aprendizaje y en la construcción del conocimiento supone, por una parte, replantearse el papel que juega el alumno y, por otra, desarrollar métodos de aprendizaje que produzcan interacciones más efectivas. A este nuevo planteamiento responde la llamada *enseñanza recíproca* (Brown y Palincsar, 1982; Palincsar y Brown, 1984; Jarvela, 1996), uno de cuyos métodos esenciales de aprendizaje lo constituye la herramienta del *andamiaje* (Bruner, 1978, 1984), que se refiere al soporte interactivo que ofrecen a los aprendices personas adultas o sus iguales más expertos. El andamiaje involucra al profesor que realiza parte de la tarea que el estudiante no puede manejar y, basándose en un diagnóstico correcto de las destrezas o dificultades del alumno, le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda. Es por tanto un modo *colaborativo* (Cole, 1998; Bishop, 1991) de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hacen cargo de su aprendizaje sin la ayuda del profesor. En estas situaciones, los alumnos asumen o participan de algunas de las funciones del profesor tutor, tales como aclarar, valorar, proponer, animar, etc., en su relación con otros compañeros.

### 2.3. Punto de vista interaccionista

Desde un punto de vista interaccionista del aprendizaje (Bruner, 1984; Cobb y Bauersfeld, 1995), se evalúan las interacciones a distancia y sus efectos en el aprendizaje de los alumnos y se determinan algunos aspectos beneficiosos de la integración de las TIC en el proceso educativo cuando los alumnos desarrollan trabajo colaborativo (Cole, 1998; Bishop, 1988). El procesamiento cognitivo de cada participante en la interacción está basado en el conocimiento mutuo, en compartir el significado atribuido a la situación y en el diálogo, herramienta que los alumnos utilizan tanto para desarrollar destrezas metacognitivas como habilidades más específicas de razonamiento. Para facilitar una educación matemática interaccionista, una de

las tareas fundamentales que debería llevar a cabo el profesor sería la de diseñar entornos de aprendizaje, donde a través de la interacción social se favoreciese el aprendizaje de la matemática.

Se establece una serie de categorías de las acciones: entre iguales, en relación al medio, y del alumno con el saber. En el análisis de las acciones e interacciones, se tienen en cuenta las relaciones entre iguales, alumno/medio, alumno/contenido, profesor-tutor/alumno, profesor-tutor/medio, y profesor-tutor/contenido. Esto permite determinar su naturaleza y efectividad, atendiendo a los cuatro elementos de la interacción electrónica y a los indicadores.

Respecto al papel del profesor como gestor del trabajo, se considera que se deben llevar a cabo como mínimo las siguientes categorías de actividades: de organización, de interrogación, de explicación, de valoración y de advertencia (Gairín, 1998). Esta clasificación de categorías permite controlar las interacciones entre las variables profesor/tutor y medio. Un análisis de dicho tipo de actividades permitirá estudiar la forma en que se ha organizado la enseñanza y tener los datos de cómo funciona el sistema que se ha diseñado. Esto hará posible conocer si el medio y la organización que le acompaña son correctos o presentan deficiencias.

#### **2.4. Los entornos informáticos de aprendizaje humano**

La utilización de los entornos informáticos permite a sus usuarios manipular de una forma más directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos matemáticos abstractos. Lo que los diferencia fundamentalmente de otros materiales pedagógicos utilizados en la enseñanza de las matemáticas es su naturaleza intrínsecamente cognitiva (Balacheff y Kaput, 1996). Los entornos informáticos de aprendizaje se construyen a partir de una representación del conocimiento para un sistema de objetos y relaciones; esta representación se hace accesible al usuario en la interacción, de una forma más o menos significativa, en relación al conocimiento (Balacheff, 1994). El aprendizaje es el resultado de una construcción de conocimientos en el curso de la interacción con el entorno. El trabajo realizado con el conocimiento para que resulte manejable por el sistema —transposición informática— determina fuertemente la interacción entre el usuario y el sistema, y por tanto el conocimiento que emerge de esta interacción (Balacheff, 1994).

#### **2.5. Sistemas de educación a distancia**

Los sistemas de educación a distancia pueden dar respuesta a una serie de demandas sociales y potenciar el aprendizaje autónomo y la iniciativa personal, de manera que el alumno adquiera actitudes, intereses, valores y hábitos formativos que pueda utilizar en un futuro en su lugar de trabajo. Para ello es fundamental un cambio cultural en el mundo educativo y el paso de entornos caracterizados por un «profesor-dominante» y «estudiante-pasivo» a otros más centrados en el estudiante, donde éste comparta la responsabilidad del cómo y cuándo tiene lugar

el aprendizaje y trabajo de forma colaborativa con otros estudiantes, comunicando, analizando de forma crítica las tareas que están realizando, reconociendo los propios errores, la falta o dominio de conocimientos, y defendiendo sus planteamientos.

### 3. UN ENTORNO INTERACTIVO DE APRENDIZAJE CON CABRI-ACTIVIDADES APLICADO A LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN E.S.O.

La tesis doctoral de Jesús Murillo (Murillo, 2001) se enmarca en la línea del diseño de entornos interactivos. En ella se diseña un proyecto de intervención cuyo objetivo es analizar y clasificar las interacciones que se producen en un entorno interactivo de aprendizaje —«ecosistema de aprendizaje de la Geometría»— cuando los alumnos resuelven las tareas que se les proponen mediante el trabajo colaborativo. El alumno pasa a ser el centro del proceso de aprendizaje y el sujeto activo de su formación. A este planteamiento se responde con la llamada enseñanza recíproca, en la que, en las situaciones de andamiaje, los estudiantes deben asumir progresivamente la responsabilidad de su aprendizaje y, en la medida en que es un modelo colaborativo de resolución de problemas, en su relación con otros compañeros ejercen algunas de las funciones del profesor. Se estudia y evalúa asimismo la influencia de las interacciones electrónicas sobre los participantes, haciendo uso de indicadores que determinan la efectividad de la interacción. Finalmente se determinan algunos aspectos beneficiosos de la integración de las TIC en el proceso educativo.

Se pretende, en este caso, que el entorno interactivo de aprendizaje diseñado y las actividades desarrolladas por los estudiantes, apoyadas por los medios tecnológicos utilizados, den lugar a conexiones de auto-referencia para el estudiante que le permitan:

- Aprender técnicas de comunicación e interacción utilizando las TIC.
- Adquirir técnicas de autoaprendizaje.
- Utilizar herramientas informáticas para el aprendizaje de la geometría.
- Adquirir, como mínimo, determinados conocimientos de geometría (establecidos en el currículo correspondiente).

En el desarrollo del proyecto, gran parte de las funciones del profesor convencional se llevan a cabo mediante el diálogo establecido a través del correo electrónico, aunque la enseñanza presencial no se elimina del todo. Esto da lugar a un sistema bimodal (Yabar et al., 1998) de enseñanza/aprendizaje, en el que conviven dos sistemas didácticos distintos, la enseñanza a distancia y la presencial, en unas determinadas proporciones. En este modelo de aprendizaje aparecen dos tipos de espacios: el espacio real, donde se desarrollan las actividades presenciales, que es el aula informática de clase, y el ya mencionado entorno interactivo. La enseñanza presencial queda limitada casi exclusivamente a los aspectos técnicos: aprendizaje

básico de utilización del software de geometría CABRI, manejo del correo electrónico, fórum, navegación. . .

El análisis que se realiza de los fórums se lleva a cabo utilizando una doble metodología. En unos casos se plantea previamente un problema en la página web de actividades y, una vez que han respondido a la cuestión propuesta, se solicita, a través de un mensaje general de correo electrónico, una justificación de por qué se da una determinada propiedad relacionada con las primeras respuestas enviadas y con la cuestión previamente planteada, para que sea discutida en el fórum por todos los miembros integrantes del proyecto. En otros casos, se plantea mediante un mensaje de correo electrónico una pregunta a todos los integrantes, que sirve de base de discusión y en torno a la cual se desarrolla el fórum. Se estudian las interacciones que se han producido, los elementos que intervienen en ellas y se fijan indicadores para hacer su clasificación.

Es interesante destacar que los medios informáticos presentan especiales ventajas en relación con otros recursos. En general, reducen el tiempo necesario para aprender una tarea, mantienen la atención del estudiante más tiempo que otro tipo de recursos y facilitan al estudiante avanzar a su propio ritmo, ya que permiten al alumno interactuar con el material, es decir, practicar cada paso de su aprendizaje.

### 3.1. Diseño de las Cabri-actividades. Estructura

El proyecto de intervención se desarrolla en el Taller de Matemáticas, cuyo currículum se establece de acuerdo los planteamientos epistemológicos contemplados en el apartado 2.1. Partimos de una hipótesis general constructivista sobre el aprendizaje: el que aprende construye su propio significado de los conocimientos. Esta construcción hace intervenir sus adquisiciones anteriores. Los significados que se elaboran en el transcurso de un aprendizaje dependen de la situación en la que se encuentra un sujeto y de la interacción social en la que está inmerso. La efectividad en los procesos de aprendizaje se alcanza si se especifican, estructuran e instrumentalizan los conceptos y los procedimientos de interpretación, interacción y reflexión metacognitiva.

Se diseña una serie de actividades formativas con una doble finalidad; por una parte, que sean casi autosuficientes para conseguir los objetivos planteados en cuanto al aprendizaje de los contenidos geométricos y, por otra, que desarrollen un espíritu de confianza alumno-profesor y de colaboración y ayuda entre alumnos. Todas las actividades, cuestiones y problemas planteados se proponen en la *página web principal del proyecto*. Las actividades constan de varias cuestiones de distintos niveles de dificultad y profundidad, y llevan incorporadas ayudas progresivas, que facilitan al alumno su realización utilizando el programa CABRI II. Los alumnos pueden solicitar otro tipo de ayuda a los profesores o a sus compañeros a través del correo electrónico. Por esto aparece un enlace, en todas las actividades, con la lista de las *direcciones electrónicas* de los participantes en la investigación.

Las actividades responden básicamente a la siguiente estructura:

1. Enunciado de la actividad. Si para responder a la actividad es necesario construir con CABRI II algún tipo de figura y el alumno no sabe cómo hacerlo, en el propio texto de la actividad aparecen enlaces que permiten hacer la construcción.
2. Planteamiento de cuestiones relacionadas con la actividad. Si el alumno no encuentra respuesta o solución a la cuestión planteada, se le da la opción de consultar sucesivos enlaces-ayuda. Si finalmente no encuentra la respuesta, puede solicitar ayudas, aclaraciones, a otros compañeros o al tutor utilizando el correo electrónico.
3. Envío de una respuesta o solución:
  - Al profesor (virtual) que evalúa la misma y, en su caso, el correspondiente archivo de CABRI. Esto da pie a un diálogo, mediante el correo electrónico, sobre la validez, claridad, argumentos...
  - Al foro. Esto posibilita la interacción del resto de alumnos participantes.

En el diseño de las actividades con CABRI se señalan distintos puntos de interacción que se corresponden con diversas acciones de tutorización:

- *Palabras clave.* Son enlaces insertados en el propio texto de la actividad que permiten acceder a archivos gráficos de CABRI que muestran la construcción efectiva de determinadas figuras necesarias para su desarrollo.
- *Ayuda.* Enlace con un texto que sugiere al alumno alguna línea general de actuación de cara a realizar la actividad propuesta, por ejemplo establecer algún tipo de relación entre los elementos constitutivos del problema, particularizar, generalizar...
- *Más ayuda.* Enlace con un texto que informa al alumno sobre alguna línea más concreta de actuación o da algún dato complementario, como por ejemplo el valor de una determinada constante.
- *Ayuda en línea.* Envío de un mensaje de correo al profesor o a alguno de los compañeros. El entorno muestra el texto: «Si todavía no has encontrado una respuesta, puedes solicitar alguna ayuda enviando un mensaje por correo electrónico a algún compañero o a tus profesores, solicitando alguna aclaración».
- *Sugerencias.* El entorno pide al alumno particularizar para algún caso concreto, generalizar alguna situación conocida.
- *Facilitar.* Proporciona algún tipo de instrucción: planificación, secuenciación...
- *Consultar.* Muestra las respuestas dadas por otros compañeros en el fórum.
- *Ampliación.* El entorno da al participante la instrucción: «El problema está abierto, sigue pensando en su posible desarrollo hasta que des con alguna respuesta que te guste y que merezca la pena de recibir el nombre de TEO-REMA DE TU NOMBRE».

- *Ayudas técnicas.* Facilita algún tipo de instrucción o ayuda en relación con el soporte técnico utilizado: «Para enviar la respuesta y el archivo de CABRI que te ha servido para encontrarla, haz click en el texto “profesores”, resaltado en azul, que te llevará directamente al editor de correo donde podrás enviar tu mensaje».

### 3.2. Influencia de los modelos interactivos. Discusiones y conclusiones

En el desarrollo de la investigación se han diseñado actividades para los alumnos que les han permitido encontrar modelos conceptuales propios, colaborando a despertar un mayor interés por las matemáticas y a elaborar, en algunos casos, teoremas propios. El análisis de las acciones realizadas en el fórum, utilizando el soporte diseñado en la realización de las actividades propuestas, confirma la idea de que el trabajo colaborativo, la construcción social del conocimiento, constituye un método valiosísimo de enseñanza y reafirma la importancia del medio y de los procesos que se ponen en juego en la institución escolar para conseguir el aprendizaje. La efectividad de las interacciones es patente, pues según el análisis realizado en el fórum han resultado positivas.

Las interacciones entre iguales han jugado un papel fundamental para facilitar y acelerar ciertas adquisiciones de destrezas, habilidades y conocimientos. El acceso a la web ha posibilitado la mentorización y el trabajo colaborativo y ha sido clara la influencia de las características físicas y sociales del entorno diseñado, que ha facilitado el aprendizaje. Así pues, la utilización de este soporte —entorno interactivo de aprendizaje de la geometría— ha potenciado el aprendizaje y una actitud más positiva hacia la geometría y, en consecuencia, que nuestros alumnos tengan un mayor éxito en sus estudios.

El papel de los alumnos ha cambiado, convirtiéndose en parte activa en la construcción de su conocimiento y en el de sus iguales. También ha cambiado el del profesor, en el sentido de que ya no es la única fuente de conocimiento, sino que más bien actúa como guía de las discusiones de los alumnos, facilitando y ayudándoles a lo largo del proceso de aprendizaje, mediante las sugerencias y ayudas oportunas. El control y gestión del entorno de aprendizaje se ha mostrado como un aspecto también fundamental del papel del profesor.

En relación con los aspectos funcionales de los alumnos, un hecho muy interesante y positivo ha sido el cambio de actitud en la clase, y el desarrollo de un vocabulario de especial cortesía en todos los niveles de comunicación. Cabe destacar el ascendente que adquiere sobre los alumnos la figura virtual del profesor de la Universidad que acusa recibo, corrige y hace sugerencias acerca de las tareas. También es importante la información recogida (la totalidad de los mensajes emitidos puede ser guardada de una forma bastante cómoda), el dominio por parte de los alumnos de la web, que les acerca más al perfil de los alumnos del siglo XXI, y sobre todo el aprendizaje de una serie de técnicas de comunicación que les pueden ser útiles a los estudiantes en su posterior inserción laboral y profesional.

La actitud general es muy positiva con esta nueva forma de trabajar, aunque ahora deben esforzarse mucho más para dar una respuesta que inexcusablemente debe ser por escrito. Además, puede ser examinada y contestada en el fórum por sus compañeros y, sobre todo, por el profesor virtual que da respuestas a todo lo que envían, solicita muchas aclaraciones a las respuestas e incluso llama la atención sobre la ortografía utilizada. Es cierto que el trabajo se hace aparentemente más lento, pero a cambio las preguntas hay que contestarlas con mayor rigor, observar las respuestas de los compañeros y replicar, aspecto que ha permitido alcanzar otros objetivos de la enseñanza de las matemáticas como comunicación, institucionalización de los resultados obtenidos, aprendizaje colaborativo. . .

Se han utilizado dos tipos de actividades: unas, al comienzo, muy dirigidas y organizadas, en las que se detallaban de manera precisa las tareas a desarrollar por los alumnos y que básicamente tenían como misión el aprendizaje del programa y del entorno informático en el que se desenvolvía; y otras, con posterioridad, mucho más abiertas. Se considera que estos dos tipos de actividades deben coexistir. Las primeras enseñan el manejo de la herramienta, deben estar diseñadas de modo que se puedan resolver con muy poca ayuda exterior, deben ser lo suficientemente interesantes como para mantener la atención del alumno; además deben permitir que su gran imaginación se manifieste, es decir, no deben buscar un único resultado para todos igual, sino que deben dar salida a ese enorme caudal de creatividad de nuestros alumnos, dejando que se ponga de manifiesto, bien en la originalidad de la respuesta o en el método para llegar a ella. Las segundas, una vez conocido el manejo del programa informático y después de saber utilizar adecuadamente el entorno de la red, deben plantearse a fin de poner en contacto al alumno con la genuina actividad matemática de creación y búsqueda de soluciones utilizando todos sus conocimientos, habilidades y capacidades, echando mano en muchísimos casos de la imaginación, de la creatividad y de la libertad que el entorno les permite.

En relación al programa informático CABRI GÉOMÈTRE II, hay que señalar que se considera un medio adecuado para que el alumno maneje los conceptos geométricos de una forma muy intuitiva, que le permite comprobar propiedades, descubrir coincidencias que más tarde hay que demostrar, utilizar sus propias construcciones (macros) para resolver distintos problemas y que, en definitiva, da una enorme libertad al alumno para que formule conjeturas, las compruebe, las defina, e incluso les ponga nombre.

Las actividades abiertas suponen un esfuerzo importante a nuestros alumnos —a veces están desorientados, no saben qué camino elegir y solicitan bastantes indicaciones—, pero los resultados obtenidos, y la satisfacción encontrada al responder, muestran que son necesarias y útiles. En una encuesta realizada a los alumnos se refleja que se han divertido haciendo matemáticas, y que son conscientes de que han utilizado de una manera diferente sus conocimientos y han desarrollado la imaginación y la creatividad.

Un aspecto metodológico a destacar es la insistencia, a lo largo de todo el curso, en la comprobación de los resultados de una construcción con los recursos que el programa proporciona. Se pide a los estudiantes que deformen la figura, mo-

viendo alguno de los elementos primarios, que observen y anoten los resultados, y comprueben las posibles coincidencias que se puedan producir.

La actitud hacia el programa es, en general, positiva, y todos los alumnos se esfuerzan de acuerdo con sus capacidades en resolver los problemas planteados y en tratar de descubrir algo nuevo. El profesor tiene que insistir mucho para conseguir que los alumnos expliquen con sus propias palabras los resultados obtenidos. Normalmente encuentran la solución del problema, pero les cuesta mucho esfuerzo poner las conclusiones por escrito en su hoja de trabajo. En los mensajes de correo y en el fórum se sigue insistiendo en la necesidad de expresar y justificar todo por escrito. El profesor virtual les hace repetir los envíos, con mensajes tipo «*no entiendo lo que quieres decir*», hasta conseguir que los alumnos se expresen de un forma más correcta.

Se han notado cambios muy significativos en la conducta de los alumnos según su tipología. Es digno de señalar que los alumnos más tímidos y reservados se comunicaban mejor con el profesor a través de la red que en directo con el profesor real. No les importa mandar correos largos en los que explican sus problemas y dudas; sin embargo, en directo su timidez les impide en muchos casos tener una comunicación fluida con profesores y compañeros. A la hora de debatir una solución a un problema, estos alumnos casi no participan en la discusión; en cambio, con la web es diferente, ellos controlan el medio, se sienten desinhibidos y se expresan bastante bien.

Los alumnos más capaces se esmeran en expresar con más claridad los resultados de los problemas, las respuestas a las preguntas o la forma de describir una construcción geométrica. Podemos decir que se establecen unas relaciones distintas gracias al trabajo a través de la web. Llevar a cabo un intercambio de mensajes en estas condiciones puede ser muy útil para mejorar actitudes, formas y maneras en el trato profesor-alumno y entre alumnos entre sí, aspectos éstos que tanto se echan en falta en los actuales centros de educación secundaria.

En esta investigación se ha producido un contacto con la realidad de la enseñanza en la ESO, con un grupo específico por supuesto, que reafirma la idea de que la utilización de los entornos interactivos, en los que los alumnos trabajan de forma colaborativa, favorece el aprendizaje y el desarrollo de las técnicas de comunicación.

Consideramos que el entorno diseñado, centrado en el alumno, con las actividades abiertas que se les plantean y con la metodología utilizada, es idóneo para el desarrollo y la formación geométrica de los alumnos de la ESO. Con este entorno se consigue que la resolución de las actividades propuestas tenga significado para ellos, favorezca su aprendizaje y les ayude a hacerse copartícipes del mismo, desarrollando sus capacidades de modelización, argumentación y racionalización. Se puede considerar, por tanto, que una de las tareas fundamentales del profesor es la de diseñar y/o utilizar entornos de este tipo.

Es de destacar finalmente la flexibilidad del sistema en cuanto al tiempo, materias de enseñanza, niveles educativos y tipos de alumnos; quizás uno de los co-

lectivos más beneficiados serían los alumnos con necesidades educativas especiales, pues aunque en el trabajo desarrollado no se ha hecho un seguimiento específico, sí que hemos comprobado un aumento de su independencia a la hora de elaborar la respuesta, a la vez que el sistema no ha sido discriminatorio con ellos.

#### 4. UN MODELO DE ANÁLISIS DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN UN ENTORNO INTERACTIVO

Como resultado de la investigación acerca del aprendizaje colaborativo cabe destacar la tesis doctoral desarrollada por Guillermina Marcos (Marcos, 2008), en la que se implementó y analizó un modelo para potenciar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas por parte de alumnos de Educación Secundaria, cuando desarrollan trabajo colaborativo en un entorno virtual de aprendizaje (EVA) que utiliza soportes informáticos. Se analizó la eficacia del entorno interactivo relativa al desarrollo de determinadas competencias matemáticas, relacionadas con el aprendizaje de la geometría y con la competencia comunicativa matemática, estableciendo relaciones entre las dos dimensiones de análisis.

En el desarrollo de la investigación se implementaron ciertas estrategias para el diseño de las actividades que permiten atender a la diversidad. Estas estrategias, que consisten básicamente en un sistema de «ayudas progresivas» y «diversificaciones», constituyeron una potente herramienta para dar una respuesta estratégica al problema de la atención a la diversidad, posibilitando que cada alumno desarrollase al máximo sus potencialidades, y que es posible aplicar a otros entornos de aprendizaje.

Para realizar el análisis del aprendizaje de la geometría y del desarrollo de la competencia comunicativa matemática a lo largo del proceso, se diseñaron y aplicaron dos instrumentos de análisis específicos.

En relación al aprendizaje de la geometría, se diseñó y utilizó un instrumento de análisis con sus correspondientes indicadores que permite estudiar el «itinerario de resolución» recorrido por cada alumno, y aporta información muy relevante para el estudio del proceso, estableciendo la complejidad de la actividad resultante para cada enunciado en cada caso, y evaluando la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

Respecto al desarrollo de la competencia comunicativa, se diseñó y aplicó un instrumento de análisis, compuesto por ciertas componentes con sus correspondientes indicadores, que resultaron adecuados para el estudio de la competencia comunicativa. Se consideró el análisis de los «discursos académicos geométricos» producidos por los alumnos como parte integrante de la resolución de los problemas, estableciendo el nivel general del alumno en cada momento y evaluando la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

## 5. INTERACTIVIDAD Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD EN EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA

En el marco de la «sociedad de la información», donde los conocimientos necesarios para desarrollar la actividad profesional se renuevan continuamente, parece claro que la escuela no puede proporcionar a todos los estudiantes todos los saberes que integran la cultura actual, en especial con alumnos que asisten a las clases de forma irregular y que presentan problemas de aprendizaje y de conducta. En este sentido, las competencias básicas constituyen unos «mínimos» que proporcionan referencias sobre los principales aspectos donde es preciso centrar los esfuerzos, sin pretender suplantar el diseño curricular escolar para los alumnos con un rendimiento más deficitario, sino que pretenden hacer reflexionar y promover la inclusión de estas habilidades o aprendizajes claves en todos los currículos de la enseñanza obligatoria; pero, más allá de estas competencias básicas, debemos intentar alcanzar con cada uno de nuestros estudiantes los «máximos» posibles (Marqués, 2006).

De acuerdo con los planteamientos anteriores, la estructura de las actividades y las medidas que tomamos de atención a la diversidad están orientadas a responder a las necesidades educativas de nuestros alumnos y a conseguir las competencias y objetivos básicos marcados por el currículo correspondiente. En definitiva, pretendemos que alumnos con dificultades de aprendizaje (en primer lugar de diversificación curricular, alguno de ellos alumnos con necesidades educativas especiales, y más tarde de grupos ordinarios), a través de un sistema tutorial interactivo de aprendizaje de la estadística (STIAE), desarrollen una serie de competencias matemáticas y destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información, para adquirir, con sentido crítico, nuevos conocimientos y preparación en el campo de las tecnologías de la información y comunicación, y comprender y expresar con corrección textos y mensajes.

Cada una de las actividades diseñadas «se adapta» al nivel de competencia estadística que tiene el alumno en cada instante gracias al sistema de ayudas progresivas al que tiene acceso. Los mensajes de ayuda, suministrados al alumno por el sistema de ayudas del sistema tutorial, se han elaborado atendiendo a una clasificación jerarquizada (mensajes relacionados con el modo de realizar los procesos de cálculo en la hoja electrónica, especialmente en la forma de escribir las fórmulas; mensajes generales que no incluyen contenidos matemáticos implicados en la resolución de la actividad; mensajes que únicamente incluyen el nombre de los contenidos matemáticos; y mensajes que contienen ayuda sobre los contenidos matemáticos implicados en la resolución de la actividad).

Las actividades que forman parte de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden de complejidad creciente de manera que también resultan adecuadas a las competencias, contenidos y objetivos que se desean conseguir, aunque se intercalan entre ellas otras actividades en las que están involucrados otros contenidos estadísticos; es decir, las actividades seleccionadas para el desarrollo de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva.

La razón de esta decisión radica en el hecho conocido de que los alumnos «aprenden» a tipificar las actividades durante su permanencia en las aulas, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se les proponen a continuación; y, de la misma manera, a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución (Marcos, 2008, pp. 89–90).

Se quiere evitar con esto que los alumnos, antes de leer el enunciado de una serie de cuestiones, problemas o actividades, puedan hacer afirmaciones tales como «éstos se hacen con la mediana», «éstos se hacen con la media aritmética», «estos otros con la desviación típica», etc., ya que consideramos que parte de la competencia estadística se relaciona tanto con la disposición de los conceptos y procedimientos que se necesitan para resolver una situación, como con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en todo tipo de contextos.

## 5.1. Objetivos

La investigación planteada en la tesis doctoral de Roberto Castellanos (Castellanos, 2011) tiene como objetivos:

- Diseñar e implementar un sistema tutorial interactivo y colaborativo de enseñanza-aprendizaje en la ESO con unas actividades en cuyo diseño y estructura se tenga en cuenta la atención a la diversidad del alumnado.
- Comparar la competencia estadística conseguida por los alumnos que usen el sistema interactivo con la de otras muestras de alumnos que no sigan esta metodología.
- Analizar los errores estadísticos cometidos por los alumnos y ver su evolución tras usar el entorno interactivo de aprendizaje.
- Estudiar el grado de satisfacción de los alumnos participantes en este nuevo modelo de enseñanza.

## 5.2. Conclusiones y aportaciones

Durante la investigación se diseñó, implementó y analizó un modelo para potenciar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas por parte de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria cuando trabajan en un entorno interactivo y colaborativo de enseñanza-aprendizaje. Se analizó la eficacia del sistema tutorial interactivo en relación al desarrollo de determinadas competencias matemáticas, en concreto aquéllas que tienen que ver con el aprendizaje de la estadística.

Esta herramienta metodológica, el STIAE, cuenta con unas actividades en cuyo diseño y estructura se ha tenido muy en cuenta, por una parte, las características de los alumnos y, por otra, la incorporación progresiva de ayudas, planteando también propuestas de distintos niveles de exigencia en torno al problema o actividad

inicial planteada. El planteamiento anterior resulta fundamental para responder a las necesidades educativas de los alumnos y para conseguir las competencias y objetivos básicos marcados por el currículo correspondiente.

Así mismo se han recopilado una serie de gráficos erróneos que han aparecido en prensa, desde dos puntos de vista, primero como constatación de que es necesario hacer más hincapié en la enseñanza de la estadística en todos los niveles educativos, y, segundo, como fuente de creación de actividades para los alumnos.

Por otro lado, se han seleccionado una serie de problemas históricos en los que aparecen términos estadísticos, que de nuevo han sido usados en la creación de actividades para nuestros alumnos.

El análisis de los resultados iniciales y finales a lo largo de las distintas fases de la investigación muestra que la metodología utilizada, a través de la herramienta metodológica en la que el profesor ha actuado fundamentalmente como moderador y facilitador del aprendizaje, en la que el discurso instruccional ha sido un diálogo entre profesor y alumnos y con la participación activa de los alumnos en la adquisición del conocimiento, ha proporcionado resultados globales mejorados de forma apreciable para todos los alumnos, incluido un alumno con necesidades educativas especiales.

Se realizó un análisis sobre la evolución de los errores en los alumnos en relación a la estadística tras trabajar con el entorno interactivo. Se comprueba que el uso del entorno interactivo STIAE reduce sustancialmente su número.

Se elaboraron distintos cuestionarios que pueden ser de utilidad para otros profesores de enseñanza secundaria a la hora de impartir docencia en relación a la estadística, cuando necesiten elaborar pruebas de evaluación que midan la competencia estadística de los alumnos.

Se evaluó la competencia estadística de los alumnos de 4.º de ESO escogiendo una muestra de 509 alumnos de La Rioja, obteniendo unos resultados estadísticamente significativos.

Los resultados de la encuesta de satisfacción mostraron claramente que la utilización de esta herramienta metodológica constituye un *elemento motivador para el aprendizaje*.

### 5.3. Problemas abiertos

A pesar de que se ha diseñado una prueba específica para valorar la competencia estadística de los alumnos que han utilizado el STIAE frente a los que no lo han hecho, la muestra de alumnos que han usado el STIAE es pequeña (incluso aunque ha sido el total de la población de esos grupos en el IES donde se ha utilizado nuestro entorno interactivo). Sería interesante investigar sobre los resultados que se obtendrían si el número de alumnos que utilizan el STIAE fuera más grande. Cuando comenzamos la investigación, el currículo de los programas de Diversificación Curricular podía ser diferente en cada centro educativo, ya que se establecía

un programa con el visto bueno de la Inspección Educativa, sin embargo, a partir de la Resolución n.º 3149, de 3 de septiembre (BOR del 13 de septiembre de 2007) de la Dirección General de Educación, el currículo de los Programas de Diversificación Curricular en los cursos tercero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria es el mismo para todos los centros de La Rioja, por lo que sería más factible usar el STIAE en distintos centros educativos en 3.º de ESO, que es donde aparecen los contenidos de estadística en el currículo.

Sería importante investigar el uso de este entorno interactivo por alumnos pertenecientes al primer ciclo de la ESO (1.º y 2.º de ESO), con alumnos de 4.º de ESO que tengan la opción B como materia optativa de matemáticas, y también en los cursos de Bachillerato, especialmente en 1.º de Bachillerato, aunque, eso sí, modificando el entorno para adecuarlo a las características de estos alumnos. También podría estudiarse su uso en el último curso de la Educación Primaria, ya que en 6.º de primaria también hay un gran número de alumnos con problemas de enseñanza-aprendizaje a los que un entorno interactivo como el nuestro podría resultarles beneficioso. Recordemos que en la Educación Primaria sólo se puede repetir curso una vez, por lo que creemos que el último curso sería el idóneo para usar el STIAE en primaria.

Se podría aplicar el entorno interactivo aplicado a otras partes de las matemáticas (álgebra, análisis...) y ver si se obtienen también resultados tan positivos como los obtenidos en el tema de estadística.

## 6. COMPETENCIA MATEMÁTICA Y PERFIL EMOCIONAL

Desde 2010, el área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de La Rioja ha estado involucrada en el proyecto «El reto de la formación matemática del futuro maestro. Competencias y afectos en el grado de maestro», liderado por Tomás Ortega del Rincón, de la Universidad de Valladolid.

Se trata de un proyecto que continúa una línea de trabajo iniciada a finales de los 90, centrada en el análisis de los factores implicados en el rendimiento en matemáticas de alumnos de los distintos niveles educativos. En etapas anteriores, la investigación se ha centrado en Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato, y en esta última fase se está analizando el nivel universitario.

La investigación se ha orientado a analizar algunos factores relacionados con aspectos cognitivos (conocimientos, destrezas, competencias...) y ver cómo se relacionan con el perfil emocional matemático (ansiedad, miedos, creencias...), para tratar de comprender cómo los factores afectivos influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De este modo podremos tratar de mejorar el rendimiento de los futuros maestros y, por extensión, de sus futuros alumnos.

El estudio de las competencias matemáticas de los estudiantes comenzó a partir de que, en 1988, el National Council of Teachers of Mathematics estableciera, en un primer borrador, los estándares curriculares, sentando las bases de lo que

debían saber y lo que debían saber hacer los individuos en relación con las matemáticas. Desde ese momento, muchos son los investigadores que han dedicado sus esfuerzos a describir tanto las componentes de la competencia matemática, como la situación al respecto en los diferentes países involucrados.

Podemos entender la Competencia Matemática como la capacidad para detectar las matemáticas presentes en la vida cotidiana y saber resolver los problemas que se nos presentan, recogiendo la información pertinente, ejecutando los cálculos necesarios y razonando de forma adecuada. Según la definición que aparece en MECD (2012), la competencia matemática es: *La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.*

El adecuado desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes queda, en gran medida, en manos de los docentes. Éstos son los encargados de diseñar y organizar las tareas que aquéllos han de resolver en función de los objetivos buscados, y de verificar si las acciones que llevan a cabo para resolverlas ejercitan y mejoran sus capacidades.

Es por ello que resulta importante evaluar la competencia matemática de los futuros maestros, ya que si no son capaces de reconocer un problema en la vida cotidiana, difícilmente serán capaces de proponer a sus futuros alumnos problemas más allá de los que vengan en un libro de texto; si no son capaces de resolver un problema de múltiples formas no podrán discernir si una posible solución presentada por un alumno es correcta o no; si no son capaces de analizar adecuadamente un gráfico, será raro que puedan explicar por qué una determinada información está contada sesgadamente. . .

Tradicionalmente se ha considerado que las creencias del profesor acerca de cómo se producen los aprendizajes condicionan las decisiones que toma a la hora de impartir las clases y de algún modo determina la eficacia de las mismas.

En la actualidad se están realizando investigaciones acerca de otro aspecto, el dominio afectivo, ya que existe la fundada sospecha de que las percepciones del alumno acerca de sí mismo, y de la materia a la que se enfrenta, determinan en gran medida la capacidad de aprendizaje.

En el caso de los alumnos de los Grados de Educación es especialmente importante detectar, y, en su caso, establecer pautas para modificar, las concepciones y emociones acerca de las matemáticas, ya que formarán parte de su perfil como docentes y serán transmitidas en gran medida a futuras generaciones de aprendices de matemáticas.

El tercer aspecto que se evalúa en los maestros en formación, dentro de este proyecto, es su competencia profesional y cómo evoluciona a lo largo de los

estudios de magisterio, así como sus creencias acerca de sus capacidades como profesores de matemáticas.

En el VI Congreso Internacional de Psicología y Educación se presentó una comunicación (Escolano et al., 2011) que mostraba la relación entre la competencia matemática de los estudiantes del Grado de Educación Primaria, su perfil emocional y sus creencias sobre el desempeño de su trabajo como profesor de matemáticas.

En Escolano et al. (2012) se presentan unos primeros resultados de la investigación para valorar la relación entre el perfil emocional del futuro graduado en Educación Primaria y sus creencias sobre el desempeño de su trabajo como profesor de matemáticas. En la primera parte del artículo se indaga sobre la competencia matemática de estudiantes de primer curso de cuatro universidades españolas, utilizando como instrumento de la competencia matemática dos cuestionarios elaborados con las pruebas liberadas del Informe PISA 2003. En la segunda parte del artículo se estudian las relaciones entre la competencia matemática de los futuros maestros, las creencias de estos estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, y sus creencias sobre su competencia como profesores de matemáticas, utilizando unas escalas elaboradas y validadas en proyectos I+D anteriores.

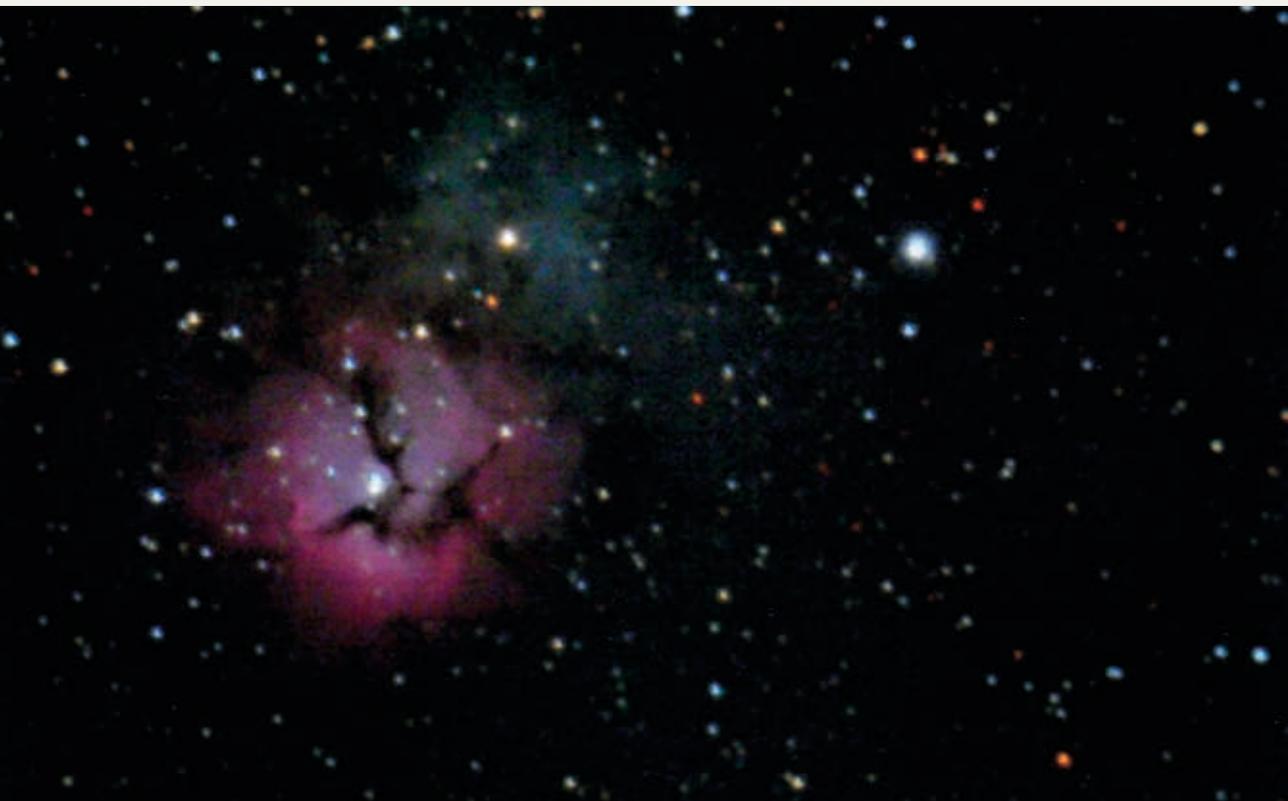
En esta línea de investigación se ha llevado a cabo una prospectiva acerca de las creencias de los estudiantes del Grado de Educación Infantil de la Universidad de La Rioja, y cómo evolucionan a lo largo de su formación. El objetivo es detectar posibles rechazos y establecer mecanismos para solucionarlos, ya que si la afectividad de los maestros influye, positiva o negativamente, en los sentimientos y creencias de sus alumnos en cualquier etapa educativa, tanto más lo hará en las etapas iniciales de la formación, cuando se produce el primer contacto de los estudiantes con las matemáticas institucionalizadas.

## REFERENCIAS

- N. BALACHEFF Y J. KAPUT (1996), Computer-Based Learning Environments in Mathematics, *International Handbook of Mathematics Education*, Springer, pp. 469–501.
- N. BALACHEFF (1994), Didactique et intelligence artificielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14, n.º 12, 9–42.
- A. BISHOP (1991), *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*, Springer.
- A. L. BROWN Y A. S. PALINGSAR (1982), Inducing strategic learning from text by means of informed, self-control training, *Topics in learning and Learning Disabilities* 2, 1–17.
- J. BRUNER (1978), The role of dialogue in language acquisition, *The child's conception of language*, Springer-Verlag, New York.

- J. BRUNER (1984), *La intención en la estructura de la acción y de la interacción, Acción, pensamiento y lenguaje* (J. Linaza, compilador), Alianza Editorial, Madrid.
- R. CASTELLANOS (2011), *Interactividad y atención a la diversidad en el aprendizaje de la estadística*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja.
- P. COBB Y H. BAUERSFELD (EDS.) (1995), *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, Psychology Press.
- M. COLE (1998), *Cultural Psychology. A once and future discipline*, Harvard University Press.
- R. ESCOLANO, J. M. GAIRÍN, C. JIMÉNEZ-GESTAL, J. MURILLO Y L. RONCAL (2011), *Competencias matemáticas del futuro maestro y perfil emocional, Educación, aprendizaje y desarrollo en una sociedad multicultural* (Román, Carbonero y Valdivielso, compiladores), Ediciones de la Asociación de Psicología y Educación y el Colegio Oficial de Psicólogos de Castilla y León, Madrid, pp. 3661–3677.
- R. ESCOLANO, J. M. GAIRÍN, C. JIMÉNEZ-GESTAL, J. MURILLO Y L. RONCAL (2012), *Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del Grado de Educación Primaria, Contextos Educativos 15*, 107–134.
- J. M. GAIRÍN (1998), *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.
- R. HERSKOWITZ Y B. SCHWARZ (1999), *The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of socio-mathematical norms, Educational Studies in Mathematics 39*, 149–166.
- S. JARVELA (1996), *New models of teacher-student interaction: A critical review, European Journal of Psychology of Education 11*, n.º 3, 249–268.
- G. MARCOS (2008), *Modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja.
- P. MARQUÉS (2006), *Nueva cultura, nuevas competencias para los ciudadanos. La alfabetización digital. Roles de los estudiantes hoy*, Departamento de Pedagogía Aplicada, Universidad Autónoma de Barcelona.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2012), *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Disponible en <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>
- J. MURILLO (2001), *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-Actividades, aplicado a la enseñanza de la Geometría en la E.S.O.*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Barcelona.
- A. S. PALINCSAR Y A. L. BROWN (1984), *The reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities, Cognition and Instruction 1*, n.º 2, 117–175.

- L. RICO, M. SIERRA Y E. CASTRO (2002), El área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, *Revista de Educación* **328**, 35–58. Disponible en [http://www.mecd.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/2002/re328/re328\\_03.html](http://www.mecd.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/2002/re328/re328_03.html)
- J. M. YABAR, P. BARBARA Y E. ALAÑOS (1998), *Desarrollo de un campus virtual de la comunicación en el marco de una educación bimodal*, Autónoma Interactiva Docente, Universidad Autónoma de Barcelona.



# ZUBÍA

26



Gobierno de La Rioja  
[www.larioja.org](http://www.larioja.org)



**Instituto  
de Estudios  
Riojanos**