REVISTA DE CIENCIAS

ZUBÍA

MONOGRÁFICO

26

ier
Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja

Coordinadores
Óscar Ciaurri Ramírez y Luis Español González

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014
235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)
51:37.02 (460.21)

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423
Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

Zubía. Monográfico 26 143–164 Logroño 2014

MODELOS DE QUILLEN, ESPACIOS Y FLUJOS EXTERIORES Y ALGUNAS APLICACIONES

JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA[1],
LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO[1],
MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ[1]

RESUMEN

Este trabajo contiene algunos comentarios sobre las principales líneas de investigación y algunos avances que el Grupo de investigación de Topología de la Universidad de La Rioja ha realizado durante los comienzos del siglo XXI. Se destacan las principales aportaciones teóricas y también algunas aplicaciones prácticas.

Palabras clave: Teoría de categorías, modelos de Quillen, cohomología de grupos, grupos de homotopía con coeficientes, (co)localización, proyección recubridora, pro-grupoide fundamental, teoría de la forma, espacios topológicos, espacios exteriores, sistemas dinámicos, flujos y semi-flujos continuos, complección de flujos, flujos y semi-flujos discretos, flujos y semi-flujos exteriores, categorías de flujos, grupos categóricos, topología de datos, manejo integrado de plagas.

This work is a summary about some relevant results obtained by the Topology research group of the University of La Rioja in the beginning of XXI century. It highlights the main theoretical contributions and also some practical applications.

Key words: *Category theory, Quillen's models, group cohomology, homotopy group with coefficients, (co)localization, covering projection, fundamental progroupoid, shape theory, topological spaces, exterior spaces, dynamical systems, continuous flows and semi-flows, flow complection, discrete flows and semi-flows, exterior flows and semi-flows, categories of flows, categorical groups, datum topology, integrated pest management.*

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: `{jextremi, luis-javier.hernandez, maria-teresa.rivas}@unirioja.es`
La investigación de los autores está actualmente subvencionada por el proyecto PROFAI13/15 de la Universidad de La Rioja.

1. INTRODUCCIÓN

El Grupo de investigación de Topología de la Universidad de La Rioja (U. R.) ha realizado numerosas aportaciones en las últimas décadas del siglo XX en temas como invariantes de homotopía propia, prohomotopía, modelos para n-tipos y n-tipos propios, probando interesantes resultados sobre propiedades de los invariantes, caracterizaciones de equivalencias de homotopía, algunas clasificaciones de espacios, etc.

Sin embargo, en este trabajo queremos presentar algunas de las líneas de investigación que hemos abordado durante estos catorce primeros años del presente siglo, comentando los principales resultados conseguidos y algunas de sus aplicaciones. Haremos también alusión a ciertos avances realizados durante los últimos años del pasado siglo que están relacionados con los resultados sobre aplicaciones recubridoras y modelos de Quillen efectuados por nuestro equipo durante los primeros años del siglo XXI. Además, mencionaremos algunas aplicaciones de tipo teórico a otros ámbitos de la matemática y otras de tipo más práctico a temas científicos y tecnológicos; alguna de estas últimas de importancia en la economía de La Rioja, como el estudio de ciertas plagas en viticultura. En nuestra opinión, una de las principales aportaciones de nuestra investigación ha sido la introducción y desarrollo de la categoría de los espacios exteriores y las categorías de flujos y semiflujos exteriores discretos y continuos, los cuales son un modelo de espacio de fase para los sistemas dinámicos que describen numerosos fenómenos científicos, tecnológicos y sociales.

Aunque en este trabajo se ha intentado evitar la utilización de la notación y fórmulas matemáticas, que en general dan una descripción exacta de los conceptos y resultados conseguidos, no hemos podido evitar el uso de cierta terminología propia de cada línea de investigación. No obstante, sí se incluyen las referencias concretas de numerosas publicaciones, de manera que si algún lector desea una descripción completa de los conceptos y una formulación precisa de los resultados, puede acudir a las fuentes que se van mencionando.

Una de las líneas en las que nuestro equipo ha realizado avances significativos es la teoría de aplicaciones recubridoras. Aunque ya se conocían muchos resultados de clasificación mediante el grupo y progrupo fundamentales para espacios satisfaciendo algunas condiciones, se ha introducido una nueva noción de aplicación recubridora, de modo que, mediante el pro-grupoide fundamental, se han clasificado las aplicaciones recubridoras sobre cualquier espacio topológico.

En el marco de la teoría de categorías, recordamos que una categoría de modelos (modelos de Quillen) es un modelo categórico para el estudio de la teoría de homotopía y el álgebra homológica. En 1967, Quillen [61] introdujo estos modelos abstractos teniendo presente las propiedades comunes a la categoría de los espacios topológicos, la categoría de los conjuntos simpliciales y la categoría de los complejos de cadenas. Más aún, Quillen [62] utilizó esta estructura para construir funtores de localización para espacios 1-conexos y encontrar modelos algebraicos para la homotopía racional. El hecho de que una categoría admita una determinada

Núm. 26 (2014), pp. 143–164
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

estructura de modelo de Quillen hace que dispongamos para ella de las propiedades y construcciones que tiene una categoría de modelos: principalmente la existencia de suspensiones y lazos, sucesiones cofibración y fibración, y las correspondientes sucesiones exactas que proporcionan métodos para el cálculo de grupos de homotopía. Por tanto, con este método no es necesario que en cada contexto haya que construir invariantes y sucesiones homotópicas, ya que su existencia se desprende del hecho de que tengamos, para ese marco concreto, una estructura de categoría de modelos.

Nuestro grupo de investigación ha realizado numerosas contribuciones en este campo. Por ejemplo, ha dado estructuras de modelos de Quillen para el estudio de n-tipos de espacios y conjuntos simpliciales, para espacios $(n-1)$-conexos, espacios S-divisibles de modo único, espacios de torsión, espacios exteriores, etc. Una descripción con más detalles ha sido incluida en la subsección 2.2.

A lo largo del siglo XX se desarrollaron, por parte de muchos grupos de investigación matemática, numerosas técnicas con el fin de estudiar los espacios no compactos; mencionaremos a continuación algunas de las relacionadas con las líneas de investigación llevadas a cabo por nuestro equipo en esta área.

En 1923, B. Kerékjártó [48] encontró una clasificación de las superficies no compactas. Para ello definió «punto ideal» como invariante principal. Posteriormente, en 1931, H. Freudenthal [23] definió la noción de «punto final» de un espacio topológico, que en el caso de superficies coincide con la noción de «punto ideal» de Kerékjartó. Éstos fueron los primeros invariantes de lo que luego se denominaría teoría de homotopía propia y una de sus primeras aplicaciones en la clasificación de variedades abiertas. Estos resultados se extendieron posteriormente para desarrollar una teoría de finales de grupos, ver por ejemplo el artículo [47] de H. Hopf. En 1965, L. C. Siebenmann [64] dio condiciones necesarias y suficientes para que una n-variedad diferenciable, con $n \geq 6$, fuera el interior de una variedad compacta con borde. En dicho trabajo asoció nuevos invariantes a los finales semiestables de Freudenthal utilizando el grupo fundamental y límites inversos de grupos. Posteriormente, en el trabajo [65] de 1970, Siebenmann propuso que, para el estudio de espacios no compactos, las hipótesis de homotopía deberían darse en la categoría de las aplicaciones propias (aplicaciones continuas verificando que la preimagen de todo compacto cerrado es compacta) mejor que en la de todas las aplicaciones continuas. Esta propuesta fue recogida posteriormente por numerosos grupos de investigación, entre ellos el nuestro, y hasta finales del siglo XX se desarrollaron numerosos trabajos con aportaciones significativas en este campo (para una panorámica sobre homotopía propia, ver [59]). Sin embargo, uno de los problemas de la categoría propia es que no dispone de suficientes límites y colímites para poder desarrollar las construcciones más usuales de la teoría de homotopía, pues no admite una estructura de modelo de Quillen. Una solución a este problema encontrada por nuestro equipo de investigación ha sido la introducción de la categoría de los espacios exteriores [24, 28, 18] y el estudio de sus propiedades, llevado a cabo durante los últimos años del siglo XX y hasta la actualidad en el XXI. Una descripción más detallada de estas aportaciones aparece en la subsección 3.1, donde, además, se incluyen aplicaciones al estudio de espacios compactos, sucesiones de espacios, teorías de (co)homología, etc.

Una de las líneas de investigación que nuestro grupo ha iniciado recientemente es la aplicación de la teoría de espacios exteriores al estudio de sistemas dinámicos. En los ámbitos científicos y tecnológicos, muchos procesos y fenómenos naturales se pueden modelizar mediante ecuaciones diferenciales autónomas. Más generalmente, se puede considerar un campo de vectores tangentes a una variedad y plantear el estudio de sus curvas integrales, aunque en muchos casos es suficiente realizar el estudio en un abierto de $\mathbb{R}^m$. Existen muchos procedimientos para encontrar las soluciones o aproximaciones de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. Las soluciones de uno de estos sistemas se pueden representar como una familia de trayectorias que mueven cada punto inicial a lo largo del espacio; de este modo, un espacio con las correspondientes soluciones se suele denominar espacio de fase.

En cuanto a los inicios del estudio topológico de los espacios de fase cabe mencionar el trabajo pionero de J. H. Poincaré [57, 58] a finales del siglo XIX sobre las propiedades topológicas de las soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas. También el trabajo de A. M. Liapunov [50], quien desarrolló al inicio del siglo XX su teoría de estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer order. Mientras Poincaré estudiaba las propiedades globales del sistema, Liapunov examinaba la estabilidad local de estos sistemas dinámicos. La teoría de sistemas dinámicos alcanzó una gran desarrollo con el trabajo de G. D. Birkhoff [3], al que algunos consideran el fundador de dicha teoría, estableciendo dos líneas principales de investigación: la teoría topológica y la teoría ergódica. En general, la teoría de sistemas dinámicos es un tema transversal a muchas ramas científicas y técnicas en el que se continúa trabajando actualmente debido a su enorme potencial de aplicación.

Una aplicación inesperada, pero muy interesante y fructífera, de la teoría de espacios exteriores desarrollada por nuestro grupo de investigación ha sido la realizada para el estudio de sistemas dinámicos. Nuestro equipo ha observado que a un sistema dinámico (flujo o semi-flujo, continuo o discreto) se le pueden dar diversas estructuras de espacio exterior, de manera que todas las construcciones y propiedades desarrolladas para los espacios exteriores tienen unas aplicaciones inmediatas a la clasificación y estudio de propiedades de sistemas dinámicos. La introducción de los sistemas dinámicos exteriores [19, 29, 30] y su desarrollo y aplicaciones es una de las líneas de investigación en las que actualmente estamos trabajando.

Por último, queremos también resaltar la importancia que en nuestra investigación ha tenido y tiene la colaboración e intercambio de ideas con miembros de otros grupos de investigación nacionales e internacionales, y especialmente algunos de la Universidad de La Rioja, como los de Procesos iterativos y ecuaciones no lineales, Programación y cálculo simbólico, y Protección y mejora vegetal.

2. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Los trabajos de nuestro equipo de investigación durante el último lustro del siglo XX y los primeros catorce años del siglo XXI sobre espacios topológicos siguen dos líneas principales de investigación: El desarrollo de proyecciones recubridoras y la construcción de categorías de modelos que faciliten el estudio de varias nociones de tipos de homotopía mediante herramientas algebraicas tales como grupos de homotopía y (co)homología con coeficientes. Señalamos a continuación algunas de las técnicas introducidas y algunos de los resultados conseguidos.

2.1. Espacios recubridores

El estudio de espacios recubridores tiene importancia en muchos contextos matemáticos y se aborda desde diversos puntos de vista. El problema de la clasificación es muy complejo si el espacio es muy general, especialmente si no es localmente conexo. En lo que se refiere a nuestro equipo, en [39] se introdujo una noción nueva de proyección recubridora de un espacio topológico, de manera que cuando este espacio es localmente conexo se obtiene la noción usual. Utilizando haces localmente constantes y cribas se construyó un pro-grupoide fundamental asociado a dicho espacio y una categoría de acciones del pro-grupoide fundamental en los conjuntos. Uno de los resultados principales de dicho trabajo asegura que la categoría de proyecciones recubridoras de un espacio es equivalente a la categoría de las acciones del pro-groupoide fundamental en los conjuntos, y también que esta última categoría es equivalente a la categoría de acciones del pro-groupoide fundamental de Čech. Cuando el espacio es localmente arco-conexo y semi-localmente 1-conexo, los pro-groupoides se pueden reducir al grupoide fundamental estándar del espacio. Para un espacio basado metrizable, compacto y conexo que además sea 1-movible, el pro-groupoide fundamental se puede sustituir por el grupo fundamental de Čech provisto con la topología del límite inverso. Posteriormente, estos resultados se extendieron [1] permitiendo fibrados más generales provistos de una categoría estructural.

Debido al interés de esta línea de investigación se continuó con el desarrollo de la misma y se realizó el trabajo [43] en el que, además de introducir conceptos y notación necesarios para unificar muchos de los ámbitos en los que se han estudiado los espacios recubridores, se obtienen nuevos resultados sobre aplicaciones recubridoras con fibras finitas.

Los avances introducidos por miembros de nuestro grupo en esta línea de investigación han sido utilizados en trabajos de otros equipos sobre teoría de espacios recubridores [4], teoría de la forma [52, 53, 22, 54] y teoría de topos [8, 56, 5].

Por otra parte, la estrecha relación entre aplicaciones recubridoras y cubiertas ramificadas permite el estudio de estas últimas mediante técnicas usuales de la teoría recubridora. Utilizando esta base teórica, recientemente hemos desarrollado algoritmos e implementaciones para el cálculo de raíces de un polinomio utilizando la técnica de elevación de caminos y la aplicación local del método de Newton. La primera versión de estas técnicas y algoritmos puede verse en [45, 46].

2.2. Categorías de modelos para espacios topológicos

Los trabajos de nuestro grupo de investigación en categorías de modelos de Quillen aportaron ya a finales del siglo XX resultados de interés en el estudio de espacios topólogicos y conjuntos simpliciales. Una noción muy importante en teoría de homotopía es la de n-tipo introducida [66, 67] en 1949 por J. H. C. Whitehead. Con respecto a ella, mencionaremos las estructuras de categoría de modelos para n-tipos de espacios basados y conjuntos simpliciales desarrollada en [10]. Esto permite una comparación con diversas categorías algebraicas que modelan los n-tipos: grupos simplicales, n-grupos, módulos cruzados, complejos cruzados, etc. Por otra parte, en [13] también se dieron nuevas estructuras de modelos de Quillen a espacios y espacios basados que modelaban de forma directa la categoría homotópica de los espacios $(n-1)$-conexos, resolviendo el problema señalado por Quillen sobre la modelación indirecta realizada por él mismo para este tipo de espacios. La colocalización inducida por esta estructura es una generalización de la noción de cubierta universal. Una combinación de ambas ideas generó estructuras de modelos para m-tipos de espacios $(n-1)$-conexos, véase [14]. En [6], mediante el uso de una estructura de categoría de modelos cerrada se construyó una generalización de n-cubierta universal que es un espacio $(n-1)$-conexo cuyos grupos de homotopía son de torsión.

En los inicios del siglo XXI nuestro equipo continuó aportando resultados sobre modelos de Quillen. En [41], para cada $n > 1$ y sistema multiplicativo S de enteros no nulos, se dio una nueva estructura de categoría de modelos cerrada a la categoría de los espacios topológicos basados tal que la correspondiente categoría localizada resulta ser equivalente a la categoría homotópica de los espacios basados $(n-1)$-conexos (S, n)-divisibles de modo único (esto es, con grupos de homotopía π_k nulos para $k < n$ y S-divisibles de modo único para $k \geq n$). En particular, para $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $n = 2$, la categoría homotópica obtenida es la categoría de los espacios basados 1-conexos racionales.

En el trabajo [42], para cada $n > 1$ y cada sistema multiplicativo cerrado de enteros S, se da otra nueva estructura de modelos cerrada a la categoría de los espacios topológicos basados, de modo que se consiguen estructuras de modelos cerradas para la categoría de homotopía de CW-complejos $(n-1)$-conexos, $n > 1$, cuyos grupos de homotopía son de S-torsión; y también para la subcategoría de la anterior determinada por aquellos CW-complejos que además tienen el n-ésimo grupo de homotopía S-divisible. Cuando el sistema multiplicativo S está generado por un conjunto de primos, la correspondiente categoría localizada inducida por S es el producto de las categorías localizadas inducidas por los sistemas multiplicaticos generados por cada uno de los primos del conjunto. En particular, si el conjunto de primos generador de S es finito, esta categoría localizada es equivalente a la categoría homotópica de los CW-complejos Ext-S-completos y n-conexos.

Como hemos señalado en la introducción, la potencia de la estructura de categoría de modelos introducida por Quillen para el desarrollo de la teoría de homotopía estriba en el hecho de que con ella se tienen propiedades constructivas para la existencia de lazos, suspensiones, sucesiones cofibración y fibración, y las correspondientes sucesiones exactas. Para cualquier categoría de modelos cerrada con objeto cero, Quillen dio la construcción de las sucesiones de Eckman-Hilton y Puppe. Nuestro grupo de investigación abordó el problema de la construcción de este tipo de sucesiones en categorías de modelos sin objeto cero, y en [33] encontró una solución donde, utilizando categorías sobre el objeto inicial y bajo el objeto final, se han construido los análogos de las sucesiones de fibras homotópicas y de cofibras homotópicas para categorías de modelos sin objeto cero. El interés del resultado obtenido en homotopía abstracta se muestra en dicho trabajo dando aplicaciones del mismo a la teoría de grupos de homotopía exterior y a la teoría de grupos de cohomología.

3. ESPACIOS EXTERIORES Y FLUJOS EXTERIORES

3.1. Espacios exteriores

La noción de espacio exterior se desarrolló con el objetivo de disponer de un modelo de tipo topológico para estudiar los espacios no compactos y la forma de los espacios T_2 compactos. Un espacio exterior consiste en un espacio topológico provisto de un «sistema de abiertos exteriores» (esto es, un cuasi-filtro no vacío de subconjuntos abiertos) que desempeña el papel que los entornos del infinito juegan en homotopía propia.

En el trabajo [24] se introdujo la noción de espacio exterior y se dio una transformación natural fiel y plena de la categoría **P** de los espacios topológicos y aplicaciones propias en la categoría de los espacios exteriores **E**. Además se probó que la categoría exterior **E** admite una estructura de modelos de Quillen. Esta técnica ha permitido el uso de diversas construcciones homotópicas que no se pueden realizar en homotopía propia ya que la categoría propia no dispone de suficientes límites y colímites. Por otra parte, en este trabajo se muestra el interés de los espacios exteriores para el estudio de espacios metrizables compactos, pues los conjuntos de morfismos de la forma, forma discreta y forma fuerte se pueden formular en términos de conjuntos de clases de homotopía exterior. Como aplicaciones, se dio una nueva versión del teorema de Whitehead para homotopía propia, una sucesión exacta que generaliza la sucesión exacta de Quigley [60] y también una versión en teoría de la forma del teorema de comparación de Edwards y Hastings [9]. Señalamos que la teoría de pro-espacios analizada en [9] mediante los modelos de Quillen es también una técnica adecuada para el estudio de homotopía propia y teoría de la forma, y nuestro equipo ya había aportado algunos avances en la teoría de homotopía de pro-espacios y sus invariantes; en [37] se estudiaron extensiones del funtor $\mathscr{P}$ de Brown para pro-conjuntos, pro-conjuntos punteados, pro-grupos y pro-grupos abelianos. Estas extensiones se aplicaron posteriormente a pro-conjuntos simpliciales [38] dando aplicaciones a homotopía propia y teoría de la forma. Mencionaremos también que en [11] se presentó una extensión del teorema de suspensión de Freudenthal para la categoría de sistemas inversos de espacios.

En [25] se estudiaron los análogos de las teorías de homología y cohomología de pares de espacios topólogicos para pares de espacios exteriores. Una teoría de homología ordinaria para espacios exteriores asocia a cada par de espacios exteriores un grupo abeliano de manera que se verifican ciertos axiomas análogos a los de Eilenberg-Steenrod. Una interesante diferencia con respecto a la (co)homología de espacios topológicos es que, en espacios exteriores, además del espacio unipuntual, hay que tener en cuenta el espacio exterior de los números naturales $\mathbb{N}$. En dicho trabajo se mostró que para CW-complejos fuertemente localmente finitos se puede considerar una estructura de espacio exterior de modo que se obtiene la homología singular al tomar coeficientes en $\oplus_0^\infty \mathbb{Z}$, la homología localmente finita al tomar coeficientes en $\Pi_0^\infty \mathbb{Z}$, y la homología «final» al tomar coeficientes en $\Pi_0^\infty \mathbb{Z}/\oplus_0^\infty \mathbb{Z}$; en cuanto a cohomologías, se tienen, respectivamente, la cohomología con soportes compactos, la cohomología singular y la cohomogía «final». Por otro lado, asociado a un espacio métrico compacto, se puede considerar el complejo fundamental abierto de Leftchetz [49] (también llamada construcción telescópica de Milnor [55]) y el correspondiente espacio exterior asociado; entonces se tiene que la homología de Čech del espacio métrico compacto se obtiene como cierto subgrupo de la homología singular del espacio exterior asociado, la homología de Steenrod es la homología secuencial con coeficientes en $\Pi_0^\infty \mathbb{Z}/\oplus_0^\infty \mathbb{Z}$, y la homología de Steenrod reducida es la secuencial al tomar coeficientes en $\Pi_0^\infty \mathbb{Z}$. Análogamente, considerando estos tipos de coeficientes también se obtienen la cohomología y la cohomología reducida de Čech.

Más propiedades de espacios exteriores y el desarrollo de invariantes homotópicos para la categoría exterior fueron estudiados en [26] y [27].

Continuando con la exploración de posibles estructuras de modelos de Quillen para el estudio de espacios exteriores, en el trabajo [28] se dota, para un par de adecuados espacios exteriores $\{T, T'\}$, de una estructura inducida de categoría de modelos cerrada a la categoría de los espacios exteriores. Para cada T se definen los grupos de T-homotopía exterior, y, para diferentes T, se obtienen como casos particulares los grupos de homotopía propia de Brown-Grossman, los grupos de Čerin-Steenrod, los grupos de Baues-Quintero, los de Farrell-Taylor-Wagoner y los grupos de homotopía estándar (Hurewicz). La existencia de esta estructura de modelos tiene interesantes aplicaciones; por ejemplo, utilizando diferentes pares $\{T, T'\}$ se pueden estudiar el tipo de homotopía estándar, el tipo de homotopía en el infinito y el tipo de homotopía global propia.

El trabajo [18] creemos que es de gran interés, ya que muestra la existencia de secciones de Postnikov en la categoría de los espacios exteriores y, además, del análisis de sus propiedades se desprenden las diferencias existentes con la teoría de secciones de Postnikov para la homotopía estándar. En dicho trabajo se desarrollaron secciones de Postnikov para los grupos de homotopía de Brown-Grossman y también para los grupos de homotopía de Steenrod en la categoría de los espacios exteriores. Se comprobó que la fibra homotópica de una fibración en la factorización asociada a los grupos de Brown-Grossman es un espacio exterior de Eilenberg-Mac Lane para grupos de Brown-Grossman, pero tiene dos grupos de tipo Steenrod consecutivos no necesariamente nulos; además, para un espacio exterior que sea primero contable en el infinito, uno de estos grupos es el límite inverso de los grupos de homotopía de los «entornos» del infinito, y el otro grupo es el primer derivado del límite inverso de este sistema de grupos. En la factorización asociada con los grupos de Steenrod, la fibra homotópica de la factorización es también un espacio exterior de Eilenberg-Mac Lane para este tipo de grupo, pero tiene dos grupos de Brown-Grossman consecutivos no necesariamente triviales. También se consideró una factorización mixta que combina los dos tipos de factorización anteriores y en la que ahora las fibras homotópicas son espacios exteriores de Eilenberg-Mac Lane para ambos tipos de grupos. Además, si un espacio métrico compacto se piensa como un subespacio del cubo de Hilbert, los entornos de este subespacio proporcionan una estructura de espacio exterior al cubo de Hilbert, de modo que todas las factorizaciones anteriores se pueden aplicar para el estudio de propiedades de los espacios métrico compactos.

En [7] se consideró la clase de $\mathbb{N}$-S-equivalencias débiles, donde S es un conjunto de enteros no negativos (se trata de aquellas aplicaciones exteriores que inducen isomorfismos en los grupos de homotopía exterior de Brown-Grossman $\pi_k^{\mathbb{N}}$ para $k \in S$). La categoría de los espacios exteriores con rayo base localizada por la clase de $\mathbb{N}$-S-equivalencias débiles se denomina la categoría de $\mathbb{N}$-S-tipos exteriores. En un espacio exterior, la familia de abiertos exteriores se puede interpretar como un pro-espacio global y, bajo la condición de primero contable en el infinito, se puede considerar como una torre global. En este trabajo se prueba que la categoría de los $\mathbb{N}$-S-tipos de espacios exteriores primero contables en el infinito y con rayo base es equivalente a la categoría de S-tipos de torres globales de espacios topológicos. Una consecuencia de este resultado es que categorías de torres globales de modelos algebraicos localizados mediante equivalencias débiles son modelos adecuados para el estudio de $\mathbb{N}$-S-tipos de espacios exteriores.

Finalizamos este apartado señalando que en [12] se introdujo la categoría de espacios exteriores secuenciales, que, por un lado, extiende la teoría de homotopía propia secuencial estudiada por R. Brown, y, por otro lado, resulta ser un análogo de la categoría de espacios secuenciales que P. T. Johnstone presentó como una subcategoría de un cierto topos de Grothendieck, de modo que la inclusión de la subcategoría preserva algunos límites y exponenciales. Para los espacios exteriores primero contables en el infinito, esto permite abordar algunas construcciones y propiedades mediantes técnicas categóricas como las presentadas por P. T. Johnstone para los espacios secuenciales.

3.2. Sistemas dinámicos exteriores

La teoría de ecuaciones diferenciales y la teoría de invariantes de la topología algebraica son dos importantes técnicas matemáticas cuyas aplicaciones a los campos científico-técnicos han sido y serán fuente continua de avances e innovaciones. Nuestro trabajo de investigación en espacios y flujos exteriores ha unificado algunos aspectos de estos métodos y, además, ha diseñado herramientas algorítmicas y computacionales que permiten una transferencia más efectiva de estos avances a ámbitos científicos y tecnológicos.

La celebración de un Seminario en Dinámica Topológica en Logroño en 2010 permitió a nuestro equipo analizar conjuntamente con otros grupos de investigación el potencial de estas nuevas técnicas. Nuestro grupo, que ha contado con la estrecha colaboración del equipo de la Universidad de La Laguna dirigido por J. M. García Calcines en el desarrollo de la teoría de espacios exteriores, inició recientemente una línea de investigación relativa al uso de los espacios exteriores para el estudio de sistemas dinámicos. Para ello, se ha desarrollado un novedoso procedimiento que consiste en dotar a los flujos y semi-flujos de una estructura adicional de espacio exterior, iniciando una teoría híbrida de sistemas dinámicos exteriores. De esta forma, todos los resultados obtenidos en proyectos de investigación anteriores sobre espacios exteriores se pueden ahora aplicar de un modo muy directo al estudio de sistemas dinámicos.

3.2.1. Flujos continuos

Las principales aportaciones de nuestro equipo de investigación al estudio de flujos continuos a través de la utilización de la teoría de espacios exteriores han sido publicadas en algunos trabajos recientes [19, 29, 30] y, además, se ha elaborado una prepublicación [31] en la que se obtienen interesantes relaciones entre nociones y propiedades de espacios exteriores y de flujos continuos.

En [19] y [29] se desarrollan las primeras nociones y técnicas de estos nuevos métodos. Se ha introducido la noción de subconjunto abierto absorbente de un sistema dinámico continuo (abierto tal que contiene la «parte futura de todas las trayectorias») y la familia de los abiertos absorbentes conforma un cuasi-filtro, lo que dota al sistema dinámico de una estructura de flujo exterior continuo. Por un lado, las construcciones espacio límite y bar-límite desarrolladas para espacios exteriores se pueden aplicar a un flujo exterior para obtener los espacios límite y bar-límite de dicho flujo exterior, lo que nos ha permitido estudiar las relaciones de estos espacios con subespacios relevantes de un sistema dinámico (por ejemplo, subespacios de puntos periódicos, de puntos estables de Poisson y subespacios omega-límite del flujo). Por otro lado, se han asociado a flujos continuos diferentes espacios de puntos finales con la propiedad de que toda semi-trayectoria positiva tiene un punto final, lo que permite descomponer un flujo continuo como la reunión de cuencas de puntos finales.

En el trabajo [30], para cada flujo exterior se han construido completaciones a izquierda y a derecha que, bajo algunas condiciones topológicas y dinámicas, son también compactificaciones. Estas completaciones están relacionadas con la compactificación de Freudenthal y permiten aplicar algunos resultados de flujos compactos a flujos topológicos más generales. Además, existe una importante interrelación entre las propiedades topológicas de la completación del flujo y las propiedades dinámicas (puntos periódicos, omega-límites, atractores, repulsores, etc.) del flujo inicial.

El trabajo [31] tiene como principal objetivo la búsqueda de relaciones entre nociones y construcciones asociadas a espacios exteriores y las nociones y subflujos básicos de los sistemas dinámicos continuos. En este trabajo hemos asociado diversas estructuras exteriores a un flujo continuo y, a través de las mismas, podemos aplicar construcciones, resultados y propiedades de los espacios exteriores para obtener nuevos resultados sobre sistemas dinámicos continuos.

Uno de nuestros objetivos futuros es desarrollar nuevas aplicaciones a los flujos continuos de los invariantes de homotopía de orden superior de espacios exteriores, especialmente en temas sobre estabilidad local y sistemas caóticos.

3.2.2. Flujos discretos

Teniendo en cuenta los resultados señalados en el apartado anterior sobre la relación entre los espacios exteriores y los sistemas dinámicos continuos, nuestro grupo de investigación se ha planteado también averiguar las relaciones entre los espacios exteriores y la dinámica de los flujos discretos. Se sabe que algunos procesos de discretización (como la aplicación de primer retorno) y de antidiscretización (como la suspensión) determinan una interdependencia entre las propiedades de los sistemas dinámicos discretos y las de los continuos. Como consecuencia, muchas de las propiedades, resultados y aplicaciones que figuran en [29, 30] deberían tener una contrapartida de nociones y resultados a desarrollar para los sistemas dinámicos discretos. En el trabajo [32] se analizan precisamente algunas de las relaciones entre los espacios exteriores y los semi-flujos discretos, introduciendo y desarrollando la noción de semi-flujo discreto exterior.

Cabe señalar que algunas diferencias entre los flujos continuos y los semi-flujos discretos son esenciales para su manejo técnico. Por ejemplo, un semi-flujo consiste en un semi-grupo de aplicaciones continuas en lugar de un grupo de homeomorfismos, y esto implica que la construcción y propiedades de omega-límites a izquierda y a derecha sean muy diferentes. Un flujo continuo tiene la propiedad de que todos los puntos de una trayectoria están en la misma componente conexa; sin embargo, esto no se puede garantizar para semi-flujos discretos. Estas diferencias deben ser tenidas en cuenta cuando se analizan las interrelaciones entre la teoría de espacios exteriores y la teoría de semi-flujos discretos. En consecuencia, en el trabajo [32] se tienen algunas similitudes con los resultados y las herramientas dadas en [29], pero nuevas técnicas (no análogas) han tenido que ser desarrolladas para un mejor análisis de los semi-flujos discretos.

Por un lado, para el estudio de los semi-flujos exteriores discretos hemos introducido, en [32], la noción de región de atracción de una externología, el límite y el bar-límite de una externología, y diferentes nociones de puntos finales: al menos, se pueden estudiar tres tipos de puntos finales análogos de los invariantes de homotopía 0-dimensionales de tipo Borsuk-Čech, de tipo Steenrod y de tipo Brown-Grossman. Por otro lado, en sistemas dinámicos discretos es frecuente considerar la noción de región de atracción de un subconjunto invariante a derecha, el omega-límite de un punto, puntos periódicos, cuencas de n-ciclos, etc. Las técnicas presentadas en este trabajo dan una conexión muy interesante entre las nociones asociadas a un espacio exterior y nociones dinámicas asociadas a un semi-flujo discreto. Las regiones de atracción de una externología están relacionadas con las regiones de atracción de un adecuado subconjunto invariante, la noción de límite está relacionada con la de subconjunto de puntos periódicos, la noción de bar-límite está conectada con la noción de omega-límite, la cuenca de un punto final de Borsuk-Čech se relaciona con la cuenca de un punto fijo, y la cuenca de un punto final de tipo Brown-Grossman está relacionada con la cuenca de un punto periódico y la cuenca de un n-ciclo.

Hay otras relaciones interesantes entre espacios exteriores y semi-flujos discretos que todavía no han sido analizadas. Pero el uso de externologías adecuadas también nos permitirá, en un futuro próximo, estudiar cuestiones relacionadas con la sensibilidad a las condiciones iniciales, problemas de estabilidad y otras propiedades dinámicas que, como hemos comentado también para el caso de los flujos continuos, se corresponden con los grupos de homotopía de dimensión superior de los espacios exteriores.

3.3. Relaciones entre flujos continuos y flujos discretos

Las ecuaciones diferenciales autónomas inducidas por campos vectoriales continuos aparecen en numerosos contextos científicos. Para este tipo de ecuaciones, dada una condición inicial, se tienen teoremas de existencia, pero en general la unicidad de la solución no puede asegurarse. Para campos vectoriales continuos las soluciones de una ecuación no tienen en general la estructura de un flujo continuo; un caso particular interesante es cuando, para alguna condición inicial, sólo podemos asegurar la existencia y unicidad de soluciones a tiempo futuro, obteniendo en este caso un semi-flujo continuo.

Como hemos indicado anteriormente, algunos de los orígenes de los sistemas dinámicos y teoría de flujos se pueden establecer en el trabajo pionero de Poincaré [57, 58] sobre las propiedades topológicas de las soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas. Uno de los métodos que Poincaré introdujo para el estudio de propiedades fue la aplicación del primer retorno: Si consideramos una solución periódica (una curva compacta y cerrada) de una ecuación diferencial en $\mathbb{R}^2$ y x_0 es un punto inicial, podemos tomar una transversal T en x_0 y, dado un punto $x \in T$, considerar la única solución con punto inicial x y buscar el primer retorno $f(x)$ de la trayectoria a la transversal. De este modo se obtiene un procedimiento de discretización que asocia al flujo continuo el flujo discreto determinado por la aplicación del primer retorno en la transversal. La técnica de retorno de Poincaré y otros métodos de discretización inducen los correspondientes flujos y semi-flujos discretos, y algunos métodos inversos como la suspensión pueden construir un sistema dinámico continuo asociado a partir de uno discreto.

Uno de los temas de trabajo de nuestro grupo de investigación ha consistido en la búsqueda de modelos categóricos para la descripción de los espacios de fase de flujos y semi-flujos, tanto discretos como continuos, y las relaciones entre estos diferentes espacios de fase [21]. Con este objetivo hemos introducido nuevas construcciones como la prolongación de semi-flujos, discretos y continuos, y funtores telescopio, y hemos estudiado categorías débilmente enriquecidas sobre la categoría de los espacios topológicos. Cada monoide topológico determina una de estas categorías débilmente enriquecidas. En particular, el monoide de los enteros no negativos, el de los enteros, el de los números reales no negativos y el de los reales determinan categorías pequeñas débilmente enriquecidas sobre los espacios topológicos. Hemos tomado como modelos para los sistemas dinámicos (que incluyen a flujos y semi-flujos, continuos y discretos) categorías de Top-funtores continuos de una Top-categoría pequeña asociada a los monoides topológicos (mencionados previamente) en la categoría de los espacios topológicos. Un funtor entre Top-categorías pequeñas determina un funtor de olvido entre las correspondientes categorías de Top-funtores continuos. La inclusión de espacios de tiempos discretos en espacios de tiempos continuos determina funtores de olvido que modelizan los procesos de discretización mediante técnicas funtoriales. Una de las aportaciones de nuestro equipo en [21] es la introducción de un producto tensor asociado a un funtor entre Top-categorías pequeñas. De este modo, procesos de anti-discretización como la construcción suspensión, procesos de interpolación, y otros métodos de prolongación a tiempos pasados, aparecen ahora como casos particulares del producto tensor construido.

Esta línea de investigación abierta recientemente tiene numerosos objetivos pendientes de ser alcanzados en un futuro, como puede ser la caracterización de sub-flujos relevantes mediante construcciones categóricas y la aplicación de técnicas de teoría de categorías para obtener nuevas propiedades y clasificaciones de sistemas dinámicos, tanto topológicos como exteriores. Esto sería muy interesante puesto que, en muchas áreas, gran parte de los problemas se modelan con sistemas de ecuaciones diferenciales cuya solución se expresa mediante flujos y semi-flujos.

4. ALGUNAS APLICACIONES DE LA TEORÍA DE FLUJOS A MÉTODOS ITERATIVOS

Con el fin de estudiar las cuencas de puntos finales asociados a la dinámica de ciertos procesos iterativos, nuestro equipo ha implementado en Sage y en Mathematica [44] diversos algoritmos que permiten visualizar las cuencas de atracción de los puntos finales de un semi-flujo discreto asociado a una función racional definida en la esfera de Riemman utilizando su geometría y estructura compleja. Estos algoritmos permiten dar una visión global de las cuencas frente a otras implementaciones habituales que ofrecen visualizaciones parciales en rectángulos. Para cada entero $p \geq 1$, con nuestras implementaciones se obtiene una descomposición de la esfera como la reunión de cuencas de puntos p-cíclicos y su complementario, y, además, se calculan las áreas de dichas cuencas. Los algoritmos de visualización y cálculo de áreas se basan en procedimientos de subdivisión consecutiva de una estructura cúbica de la 2-esfera. En la Figura 1 puede verse la esfera subdividida en pequeños cuadriláteros esféricos donde los diferentes colores corresponden a las diferentes cuencas de atracción. Calculando el área de estos cuadriláteros y sumando se calcula también el área de cada cuenca.

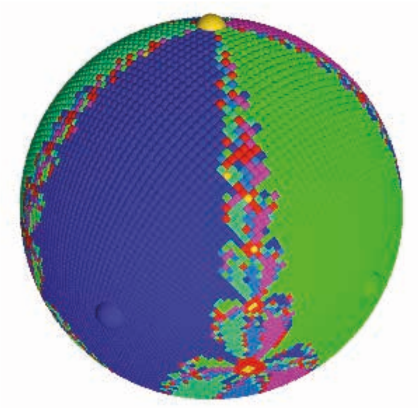


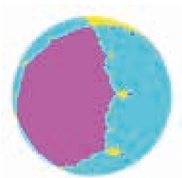
Figura 1: Esfera subdivida en pequeños cuadriláteros esféricos de diferentes cuencas.

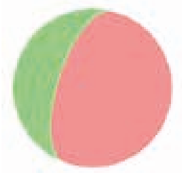
Algunas aplicaciones de estos algoritmos para la visualización gráfica y para la medida de áreas de cuencas se han concretado en el análisis de la influencia de la multiplicidad de las raíces de un polinomio complejo en el área de las correspondientes cuencas obtenidas por el método de Newton. Un estudio sobre este tema realizado por nuestro equipo y miembros del Grupo de investigación de Procesos iterativos y ecuaciones no lineales de la U. R. puede verse en [34].

El método de Newton amortiguado (o relajado) depende de un parámetro complejo h tal que cuando $h = 1$ se obtiene el método de Newton. La principal propiedad de este método amortiguado es que, cuando se toma como parámetro la multiplicidad de una raíz de un polinomio, se tiene un mejor orden de convergencia para esa raíz. Para polinomios de grado mayor o igual que tres, el método de Newton amortiguado puede tener p-ciclos atractores con $p > 1$. La existencia de estos ciclos es un obstáculo inicial para encontrar las raíces de un polinomio, ya que muchos puntos iniciales pueden converger a un punto p-cíclico con $p > 1$.

En el reciente trabajo [35] hemos perfeccionado algoritmos previos desarrollados en [44] y [34], de modo que, ahora, para una función racional cualquiera, y dado un entero $n \geq 1$, se puede descomponer la esfera de Riemann como la reunión de cuencas de todos los puntos p-cíclicos no repulsores y su complementario, para cada $p \leq n$. También se calcula la medida (área o probabilidad) de las cuencas cuando perturbamos el parámetro h, cuantificando como consecuencuencia la eficiencia inicial del método de Newton amortiguado y su dinámica en la 2-esfera. Además, se puede aproximar gráficamente el conjunto de Julia pintando en la esfera los puntos cíclicos repulsores y, mediante funciones de tipo Lyapunov, se pueden encontrar representaciones gráficas de entornos del conjunto de Julia en la 2-esfera. Teniendo en cuenta que en la cuenca inmediata de un ciclo atractor siempre hay un punto crítico, se ha utilizado un algoritmo que calcula los puntos críticos y después encuentra los ciclos atractores a los que éstos convergen.

Como ejemplo de los cálculos que realizan estos algoritmos incluimos el Cuadro 1 en el que, para el valor del parámetro de amortiguamiento $h = 1.5$, la esfera de Riemann se divide en tres cuencas de puntos fijos atractores y además se calcula el área de dichas cuencas, y, para $h = 3$, la esfera aparece dividida en dos hemisferios que son las cuencas de dos puntos 2-cíclicos superatractores. En este último caso, el conjunto de Julia es la circunferencia que separa estos hemisferios y contiene a todos los puntos p-cíclicos repulsores.

$h = 1.5$			Puntos cíclicos no repulsores	Áreas
	Complemento			0.
	$p = 1$		$\{0.5, \{0, 1\}\}$	8.76
			$\{0.5, \{-i, 1\}\}$	1.90
			$\{0.5, \{i, 1\}\}$	1.90
	$p = 2$		$\{\}$	
	$p = 3$		$\{\}$	
	$p = 4$		$\{\}$	

$h = 3$			Puntos cíclicos no repulsores	Áreas
	Complemento			0.
	$p = 1$		$\{\}$	
	$p = 2$		$\{0., \{-0.57, 1\}\}$	6.28
			$\{0., \{0.57, 1\}\}$	6.28
	$p = 3$		$\{\}$	
	$p = 4$		$\{\}$	

Cuadro 1: Cuencas en la esfera de Riemann de p-ciclos no repulsores para $1 \leq p \leq 4$ obtenidas al aplicar el método de Newton amortiguado, para valores del parámetro de relajación $h \in \{1.5, 3\}$, al polinomio $z^3 + z$. Los puntos cíclicos se representan en coordenadas homogéneas precedidos por el valor de su multiplicador esférico.

Nuestro grupo de investigación tiene como uno de sus objetivos futuros seguir explorando en esta línea con el fin de analizar, a través de algoritmos computacionales desarrollados en la 2-esfera u otras variedades compactas, la dinámica asociada a procesos iterativos utilizados para abordar distintos problemas en numerosos campos científicos.

5. ALGUNAS APLICACIONES DE MÉTODOS TOPOLÓGICO-GEOMÉTRICOS AL ANÁLISIS DE DATOS Y MANEJO INTEGRADO DE PLAGAS

El análisis de datos es una área de investigación muy activa y tiene diferentes aplicaciones industriales y científicas. La primera aproximación de nuestro grupo de investigación a esta línea de trabajo puede verse en [16], donde se presentan los elementos básicos de una técnica para el estudio y clasificación de datos fundamentada en estructuras poliedrales cúbicas con la que se obtiene una herramienta versátil aplicable al cálculo de la homología y cohomología de subcomplejos asociados a conjuntos de datos y a funciones de densidad cúbicas.

Otra contribución de nuestro grupo en esta línea de investigación es el trabajo [36], en el que se realizó un estudio sobre el cálculo en paralelo de la homología cúbica con gridMathematica enfocado a la mejora de tiempos de ejecución de cálculos en álgebra homológica.

En nuestra opinión, la principal aportación de nuestro equipo sobre el estudio de datos es el desarrollo de un procedimiento de construcción de funciones de aproximación y predicción basado en particiones de la unidad para conjuntos de datos en los que su distribución en el espacio sea relevante. Los métodos de carácter topológico-geométrico que utilizamos permiten el uso de herramientas importantes tales como conjuntos simpliciales de Vietoris para el análisis de estimadores de error, teoría de la forma, teoría de Morse y el estudio de puntos críticos.

Estos métodos nos permiten desarrollar implementaciones computacionales de fácil uso y muy flexibles, de modo que se pueden adaptar a diversos campos de aplicación. En [63], en colaboración con el Grupo de investigación de Protección y mejora vegetal de la U. R., los hemos aplicado al estudio de la distribución espacial de las poblaciones de insectos dentro de programas de conservación biológica y de manejo integrado de plagas. El estudio concreto lo hemos realizado sobre la distribución de *Lobesia botrana* (Denis & Schiffermüller, 1776) (Lepidoptera: Tortricidae) en los viñedos de La Rioja. Ello permite un seguimiento de la plaga, ya que se obtiene una predicción de su evolución, y el estudio de los tiempos y zonas críticas, lo que facilita el control de la misma y el desarrollo de una agricultura ecológica y económicamente sostenible.

6. DIVULGACIÓN DE LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS

Aunque el Grupo de investigación de Topología de la U. R. se ha centrado fundamentalmente en desarrollar su trabajo en las líneas de investigación señaladas en las secciones anteriores, siempre hemos creído que la labor de divulgar la ciencia es también importante. En una sociedad competitiva donde aquello que más se

Núm. 26 (2014), pp. 143–164
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

anuncia y de lo que más se habla da la impresión de ser lo más importante, es difícil hacer llegar a un público general que las ciencias matemáticas ocupan un lugar estratégico, aunque a veces oculto, en la evolución del conocimiento científico y tecnológico de la sociedad. Ésta ha sido una de las razones por las que, aunque sea de modo esporádico, hemos realizado algunos trabajos y comunicaciones de divulgación de las ciencias matemáticas, y más en particular de la geometría y la topología.

Uno de los temas que ha tenido y tiene una gran importancia desde el punto de vista del conocimiento básico de las matemáticas, es el estudio de los elementos geométricos (segmentos, ángulos, triángulos, circunferencias, paralelas, etc.), cuya incidencia en la vida diaria del hombre es innegable. A pesar de que la investigación e interés de la geometría y las matemáticas en general son reconocidas por la sociedad española actual, dejando atrás los tiempos que se caracterizaron por la frase «que inventen ellos», y de que en el cambio de milenio las aportaciones de los investigadores matemáticos españoles estaban en concordancia con su desarrollo en el ranking cultural del mundo, todavía eran muy numerosos los ámbitos científicos y sociales donde, por ejemplo, no se había oído mencionar la existencia de las geometrías no euclídeas ni la importancia que ha tenido en la historia del pensamiento y el desarrollo de la lógica el tema de la fundamentación de la geometría y la historia del quinto postulado de Euclides. Es por ello que en el inicio del actual milenio consideramos que podría ser de utilidad una publicación [40] donde se hizo un breve repaso a la historia del «axioma de las paralelas» y a los grandes esfuerzos realizados para su clarificación, que culminaron finalmente con el nacimiento de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX. La existencia de mundos no euclidianos no implica la destrucción de la geometría euclidiana clásica; por el contrario, la convivencia entre estas geometrías opuestas se manifiesta lógica y armónica. Desde nuestro punto de vista, el descubrimiento de la geometría hiperbólica fue uno de los avances más espectaculares que se han realizado durante el segundo milenio en el mundo del pensamiento matemático, y la naturaleza deductiva de las matemáticas, que quedó reflejada en el inmenso trabajo que durante casi dos mil años grandes matemáticos llevaron a cabo para llegar a ese descubrimiento, ha maravillado a grandes científicos como Einstein, que admiraba el hecho de que una ciencia deductiva pudiera explicar tan magníficamente muchas de las observaciones empíricas de otras ciencias más experimentales.

También, con la misma finalidad de «acercar las matemáticas a la sociedad» (uno de los objetivos del Año Mundial de las Matemáticas celebrado en el 2000) que la publicación anterior, nuestro grupo realizó el trabajo [15]. En él nos dedicamos a explorar la presencia de los poliedros en diversas áreas de la actividad humana. Tomando como punto de partida la asociación platónica de poliedros regulares a diferentes elementos cósmicos, en el trabajo se ofrece una panorámica sobre el estudio y la utilización de los poliedros en el arte, la ciencia y la tecnología, señalando la reciente aplicación de técnicas poliedrales (simetrías, propiedades geométricas, invariantes topológicos, etc.) en la investigación de numerosos procesos biológicos, químicos o físicos.

En otra de nuestras publicaciones divulgativas [17] hemos abordado la conocida relación entre belleza y proporción. De alguna manera, hay un sentido universal de lo que es bello, y la noción de belleza, difícil de precisar, está presente en todas las culturas a lo largo del tiempo, relacionándola con armonía, bondad, simplicidad y orden. El objetivo de crear algo bello aparece en la naturaleza, en las creaciones artísticas musicales, pictóricas, escultóricas y arquitectónicas, y también en las creaciones técnicas y científicas. El trabajo citado está dedicado a exponer cómo el número irracional $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803\ldots$ es, precisamente, uno de los que está contenido con más profusión en las creaciones más bellas. También se resaltan algunas de las preciosas propiedades geométricas, aritméticas y algebraicas de este singular número que se obtiene al dividir un segmento en media y extrema razón. La belleza matemática de ϕ parece transmitirse a toda obra que lo contenga, convirtiéndolo en un generador por excelencia de belleza. Los diferentes nombres que ha recibido —sección áurea, proporción áurea, razón áurea, número de oro, santa proporción, divina proporción...— sólo son una muestra del carácter mágico, misterioso, secreto, simbólico, poderoso y divino que en muchos casos se le ha otorgado.

En el trabajo [2] nuestro equipo ha analizado el modo en el que problemas situados en muy diversos ámbitos (ADN, Fullerenos y Teoría de elección social) pueden ser formulados en el lenguaje común de la Topología. Muchos de los procesos en los contextos indicados determinan modelos en cuya descripción y estudio intervienen de modo natural nudos, estructuras poliedrales, complejos de Eilenberg-Mac Lane, etc. A lo largo del citado trabajo, queda patente que numerosos problemas en líneas de investigación aparentemente alejadas se pueden modelar y estudiar mediante teorías y herramientas comunes proporcionadas por las ciencias matemáticas; en este caso concreto, mediante invariantes topológicos. También con la idea de exponer la utilidad de las matemáticas en su aplicación a muchas áreas, en [51] se divulgaron las herramientas matemáticas e informáticas desarrolladas por nuestro equipo de cara a su aplicación al cultivo de la vid dentro del área del manejo integrado de plagas.

En nuestra aportación más reciente en el campo de la divulgación científica, [20], nos propusimos explorar una parte del riquísimo mundo de la esfera bidimensional. A lo largo del trabajo exponemos algunas de las distintas propiedades que tiene, centrándonos, por un lado, en la relación que este objeto matemático posee con las geometrías planas euclídeas y no euclídeas, y, por otro, en las diferentes estructuras poliedrales, celulares y fractales que pueden considerarse en la esfera y su papel en campos tan diversos como el estudio de estructuras moleculares, la clasificación de virus o el análisis topológico de sistemas dinámicos asociados a métodos numéricos.

REFERENCIAS

[1] S. Ardanza y L. J. Hernández, Fundamental progroupoid and bundles with a structural category, *Topology Appl.* **92** (1999), 85–99.

[2] S. Ardanza, J. Arsuaga, J. A. Crespo, J. I. Extremiana, L. J. Hernández, M. T. Rivas, J. Roca y M. Vázquez, Invariantes Topológicos en el ADN, los Fullerenos y la Teoría de Elección Social, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **10** (2007), 611–632.

[3] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1927.

[4] J. Brazas, Semicoverings: a generalization of covering space theory, *Homology Homotopy Appl.* **14** (2012), 33–63.

[5] M. Bunge, Fundamental pushout toposes, *Theory Appl. Categ.* **20** (2008), 186–214.

[6] C. Casacuberta, J. L. Rodríguez y L. J. Hernández, Models for torsion homotopy types, *Israel J. Math.* **107** (1998), 301–318.

[7] A. Del Río, L. J. Hernández y M. T. Rivas, S-types of global towers of spaces and exterior spaces, *Appl. Categ. Structures* **17** (2009), 287–301.

[8] E. J. Dubuc, The fundamental progroupoid of a general topos, *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), 2479–2492.

[9] D. Edwards y H. Hastings, *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology*, Lect. Notes Math., 542, Springer, 1976.

[10] C. Elvira y L. J. Hernández, Closed model categories for the n-type of spaces and simplicial sets, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **118** (1995), 93 –103.

[11] C. Elvira y L. J. Hernández, A suspension theorem for the proper homotopy and strong shapes theories, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **36** (1995), 98–126.

[12] L. Español, J. M. García-Calcines y M. C. Mínguez, On proper and exterior sequentiality, *Appl. Cat. Struct.* **18** (2010), 653–668.

[13] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, A closed model category for $(n-1)$-connected spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 3545–3553.

[14] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Closed model categories for $[n,m]$-types, *Theory Appl. Categ.* **3** (1997), 250–268.

[15] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Poliedros, *Margarita Mathemática en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández*, 139–166, Serv. Publ. Univ. de La Rioja, 2001.

[16] J. I. Extremiana, L. J. Hernández, M. T. Rivas y E. Sáenz de Cabezón, Aplicaciones de complejos cúbicos al estudio de datos, *III Encuentro Andaluz de Matemática Discreta*, 57–60, Serv. Publ. Univ. de Almería, vol. 182/2-3, 2003.

[17] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, La divina razón de la belleza, *Sigma: revista de matemáticas* **27** (2005), 145–178.

[18] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Postnikov factorizations at infinity, *Topology Appl.* **153** (2005), 370–393.

[19] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, An approach to dynamical systems using exterior spaces, *Contribuciones Científicas en Honor de Mirian Andrés Gómez*, 307–318, Serv. Publ. Univ. de La Rioja, 2010.

[20] J. I. Extremiana, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Todo un mundo en la esfera, *Un paseo por la Geometría, curso 2011/2012*, 147–180, Publ. UPV/EHU, 2012.

[21] J. M. Fernández, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Prolongations, suspensions and telescopes, *prepublicación*, 2013.

[22] H. Fischer y A. Zastrow, Generalized universal covering spaces and the shape group, *Fund. Math.* **197** (2007), 167–196.

[23] H. Freudenthal, Über die Enden topologisher Räume und Gruppen, *Math. Zeith.* **53** (1931), 692–713.

[24] J. M. García-Calcines, M. García-Pinillos y L. J. Hernández, A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories, *Bull. Aust. Math. Soc.* **57** (1998), 221–242.

[25] J. M. García-Calcines y L. J. Hernández, Sequential homology, *Topology Appl.* **114** (2001), 201–225.

[26] J. M. García-Calcines, S. Rodríguez y L. J. Hernández, Homotopía propia simplicial I, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Quím. Nat. Zaragoza (2)* **57** (2002), 89–112.

[27] J. M. García-Calcines, S. Rodríguez y L. J. Hernández, Homotopía propia simplicial II, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Quím. Nat. Zaragoza (2)* **57** (2002), 113–134.

[28] J. M. García-Calcines, M. García-Pinillos y L. J. Hernández, Closed Simplicial model structures for exterior and proper homotopy theory, *Appl. Categ. Structures* **12** (2004), 225–243.

[29] J. M. García-Calcines, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Limit and end functors of dynamical systems via exterior spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **20** (2013), 937-959.

[30] J. M. García-Calcines, L. J. Hernández y M. T. Rivas, A completion construction for continuous dynamical systems, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, por aparecer, 2014.

[31] J. M. García-Calcines, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Omega limits, prolongational limits and almost periodic points of a continuous flow via exterior spaces, *prepublicación*, 2014.

[32] J. M. García-Calcines, L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, Regions of attraction, limits and end points of an exterior discrete semi-flow, *prepublicación*, 2014.

[33] M. García-Pinillos, L. J. Hernández y M. T. Rivas, Exact sequences and closed model categories, *Appl. Categ. Structures* **18** (2010), 343–375.

[34] J. M. Gutiérrez, L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, Influence of the multiplicity of the roots on the basins of attraction of Newton's method, *Numer. Algorithms* **66** (2014), 431–455.

[35] J. M. Gutiérrez, L. J. Hernández, Á. A. Magreñán y M. T. Rivas, Measures of basins of n-cycles for relaxed Newton's methods, *prepublicación*, 2014.

[36] J. Heras, J. Rubio, L. J. Hernández, M. T. Rivas y E. Sáenz de Cabezón, Cálculo en paralelo de la homología cúbica con gridMathematica, *Proceedings III Congreso Mathematica España*, 285–294, Addlink Media y Univ. de Salamanca, 2009.

[37] L. J. Hernández, Functorial and algebraic properties of Brown's $\mathscr{P}$ functor, *Theory Appl. Categ.* **1** (1995), 10–52.

[38] L. J. Hernández, Application of simplicial M-sets to proper homotopy and strong shape theories, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 363–409.

[39] L. J. Hernández, Fundamental pro-groupoids and covering projections, *Fund. Math.* **156** (1998), 1–31.

[40] L. J. Hernández, *Sobre los principios fundamentales de la Geometría*, Serv. Publ. de la Univ. de La Rioja, 2001.

[41] L. J. Hernández, Closed model categories for uniquely S-divisible spaces, *J. Pure Appl. Algebra* **182** (2003), 223–237.

[42] L. J. Hernández, Homotopy Categories for Simply Connected Torsion Spaces, *Appl. Categ. Structures* **13** (2005), 421–445.

[43] L. J. Hernández y V. Matijević, Fundamental groups and finite sheeted coverings, *J. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), 181–296.

[44] L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, Plotting basins of end points of rational maps with Sage, *Tbil. Math. J.* **5** (2012), 71–99.

[45] L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, Path lifting methods and solutions of univariate polynomial equations, *Resúmenes del XIII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones: EACA2012*, 111–114, Serv. Publ. Univ. de Alcalá, 2012.

[46] L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, Cellular branched coverings and root-finding algorithms, *Actas del XIX Encuentro de Topología*, 99–102, Meubook, 2012.

[47] H. Hopf, Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Grouppen, *Comm. Math. Helv.* **16** (1943), 81–100.

[48] B. Kerékjártó, *Vorlesungen uber Topologie*, vol. 1, Springer-Verlag, 1923.

[49] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1930.

[50] A. M. Lyapunov, *Problème gènèral de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 1907.

[51] V. Marco, I. Pérez-Moreno, F. J. Sáenz de Cabezón, E. García-Ruiz, L. J. Hernández, M. T. Rivas y E. Sáenz de Cabezón, Herramientas matemáticas e informáticas para el seguimiento de la polilla del racimo de la vid, *Winetech* **2**, Nov. 2011, 11–14.

[52] S. Mardešić y V. Matijević, Classifying overlay structures of topological spaces, *Topology Appl.* **113** (2001), 167–209.

[53] S. Mardešić y J. Segal, History of shape theory and its application to general topology, *Handbook of the History of General Topology*, History of Topology, Vol. 3, 1145–1177, Kluwer, 2001.

[54] S. A Melikhov, Steenrod homotopy, *Russ. Math. Surv.* **64** (2009), 469–551.

[55] J. Milnor, On the Steenrod homology theory, *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity, Vol. 1*, 79–96, London Mathematical Society Lecture Note Series (No. 226), Cambridge, 1995.

[56] L. Pedazzi, *Clasificación de Aplicaciones Recubridoras*, Tesis, Universidad de Buenos Aires, 2009.

[57] J. H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles, I, *J. Math. Pures Appl.*, 3, série 7, 375–422 (1881); II, 8, 251–286 (1882); III, 4, série 1, 167–244 (1885); IV, 2, 151–217 (1886).

[58] J. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol. 1, 2, 3, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1892/99.

[59] T. Porter, Proper homotopy theory, *Handbook of algebraic topology*, 127–167, North-Holland, Amsterdam, 1995.

[60] J. B. Quigley, An exact sequence from the nth to the $(n-1)$-st fundamental group, *Fund. Math.* **77** (1973), 195–210.

[61] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[62] D. G. Quillen, Rational Homotopy Theory, *Ann. of Math. (2)* **90** (1969), 205–295.

[63] E. Sáenz de Cabezón, L. J. Hernández, M. T. Rivas, E. García-Ruiz, V. Marco, I. Pérez-Moreno y F. J. Sáenz de Cabezón, A computer implementation of the partition of the unity procedure and its application to arthropod population dynamics. A case study on the European grape berry moth, *Math. Comput. Simulation* **82** (2011), 2–14.

[64] L. C. Siebenmann, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, Thesis, 1965.

[65] L. C. Siebenmann, Infinite simple homotopy types, *Indag. Math.* **32** (1970), 479–495.

[66] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 213–245.

[67] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 453–496.

ZUBÍA

26

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto de Estudios Riojanos