REVISTA DE CIENCIAS

ZUBÍA

MONOGRÁFICO

26

ier
Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja

Coordinadores
Óscar Ciaurri Ramírez y Luis Español González

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014
235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)
51:37.02 (460.21)

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423
Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

Zubía. Monográfico 26 165–200 Logroño 2014

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES MEDIANTE PROCESOS ITERATIVOS

JOSÉ ANTONIO EZQUERRO[1], DANIEL GONZÁLEZ[2],
JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ[1], MIGUEL ÁNGEL HERNÁNDEZ-VERÓN[1],
ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN[3], NATALIA ROMERO[1], MARÍA JESÚS RUBIO[1]

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es mostrar, de manera lo más autocontenida posible, parte de la contribución del grupo de investigación PRIENOL de la Universidad de La Rioja, cuyos componentes son sus autores, a un problema clásico de las Matemáticas: la resolución numérica de ecuaciones no lineales mediante procesos iterativos. Hemos elegido el método de Newton como proceso iterativo de referencia para resolver este problema, así como para introducir los conceptos más importantes que intervienen en su estudio (convergencia, coste operacional, eficiencia, etc.). Además, damos algunos de los resultados obtenidos para otros procesos iterativos relacionados con el método de Newton. Y, finalmente, comentamos algunas aplicaciones a problemas concretos.

Palabras clave: Ecuación no lineal, proceso iterativo, accesibilidad, dinámica, convergencia semilocal, orden de convergencia, coste operacional, eficiencia.

The main aim of this work is to show, in as a self-contained way as possible, a contribution to a classic problem of Mathematics: the numerical solution of nonlinear equations using iterative processes. This paper is authored by members of the PRIENOL research group based at the University of La Rioja. We have chosen Newton's method as the iterative process of reference to solve the problem, and to introduce the most important concepts involved in its study (convergence, operational cost, efficiency, etc.), as well. Then, we give account of some of the results obtained for other iterative processes also related to Newton's method. Finally, we discuss some applications of the methods to specific problems.

1. Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: `{jezquer, jmguti, mahernan, natalia.romero, mjesus.rubio}@unirioja.es`
Página web: `http://www.unirioja.es/dptos/dmc/prienol/`
2. Centro de Modelización Matemática, Escuela Politécnica Nacional, Quito (Ecuador)
Correo electrónico: `daniel.gonzalezs@epn.edu.ec`
3. Dpto. de TFG/TFM, Universidad Internacional de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: `angel.magrenan@unir.net`
La investigación de los autores está subvencionada por el proyecto MTM2011-28636-C02-01.

Key words: *Nonlinear equation, iterative method, accessibility, dynamics, semilocal convergence, order of convergence, operational cost, efficiency.*

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de ecuaciones no lineales es un problema al que acaban conduciendo muchas actividades científicas y situaciones de la vida real. En ocasiones, unas simples manipulaciones algebraicas pueden ser suficientes para resolver el problema, pero lo más habitual es que no seamos capaces de encontrar de forma exacta la solución. Es más, es posible que no sepamos a priori si dicha ecuación tiene solución y, en caso de tenerla, si sólo tiene una solución, un número finito de soluciones o infinitas soluciones. Así, por ejemplo, todo el mundo recuerda las fórmulas que permiten encontrar las soluciones de una ecuación polinómica de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ en función de los coeficientes a, b y c. También existen fórmulas con radicales para resolver ecuaciones polinómicas de grados tres y cuatro en términos de sus coeficientes, aunque son mucho más engorrosas y de dudosa utilidad práctica. Pero ya en el siglo XIX el matemático noruego N. H. Abel dejó establecido que no existen este tipo de fórmulas para polinomios de grado mayor o igual que cinco. Por éste y otros motivos, se ha hecho necesaria la determinación de algoritmos que permitan aproximar la solución general de una ecuación no lineal. Así, se usa la misma notación

$$f(x)=0 \tag{1}$$

para el problema de encontrar una incógnita x, que puede ser un número real o complejo, un vector, una función, etc., a partir de los datos que proporciona la función f, que puede ser una función escalar, un sistema de ecuaciones, una ecuación diferencial, una ecuación integral, etc. Este tipo de herramientas se desarrollan dentro de una rama de las matemáticas conocida como *Análisis Numérico*.

Evidentemente, el caso que histórica y conceptualmente se desarrolló antes es el de que f fuera una función real de variable real y, en particular, una ecuación polinómica. En este contexto destaca sobremanera el conocido *método de Newton*, un proceso iterativo que permite aproximar una solución α de la ecuación no lineal (1). En concreto, el método de Newton consiste en construir, a partir de una aproximación inicial x_0 de α, una sucesión de la forma

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1}=N_f(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n\geq 0. \tag{2}$$

En condiciones adecuadas, la sucesión anterior converge a la solución buscada α.

Los antecedentes de este método se remontan, como mínimo, a la época babilónica, dos mil años antes de Cristo [17]. No obstante, no es hasta el siglo XVII cuando el método adquiere la forma y el uso actual con los trabajos de I. Newton

(1643–1727), J. Raphson (1648–1715) y T. Simpson (1710–1761). De hecho, muchos autores denominan también al proceso como método de Newton-Raphson.

En un inicio, el método de Newton se empleó para resolver ecuaciones polinómicas. Para hacernos una idea, la ecuación que Newton consideró para ilustrar su método fue $x^3-2x-5=0$. Posteriormente, el método se extendió a ecuaciones que involucraban funciones trascendentes, luego a ecuaciones definidas en el campo de los números complejos y a sistemas de ecuaciones no lineales. A mediados del siglo XX, el matemático soviético L. V. Kantorovich dio el salto a ecuaciones definidas en espacios más abstractos como son los espacios de Banach. En este contexto es donde se ha desarrollado el trabajo del grupo de investigación PRIENOL (Procesos Iterativos y Ecuaciones No Lineales) de la Universidad de La Rioja, cuyos componentes somos los autores de este artículo. El objetivo de este trabajo es mostrar el estado del arte sobre este tipo de problemas y presentar, de forma divulgativa, algunas de las contribuciones que el grupo PRIENOL ha aportado en esta rama del Análisis Numérico.

2. EL MÉTODO DE NEWTON

Kantorovich fue el artífice de la generalización del método de Newton (2) a ecuaciones definidas en espacios de Banach (de hecho, en este contexto también se le conoce como *método de Newton-Kantorovich*). Estos espacios se llaman así en honor del matemático polaco S. Banach (1892–1945). En líneas generales, se puede decir que son espacios de funciones de dimensión infinita, aunque también son espacios de Banach conjuntos más familiares, como los números reales, los números complejos o los espacios $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Esta generalización permite combinar técnicas de análisis funcional y numérico para abordar problemas no lineales tan diversos como la resolución de ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, problemas de cálculo variacional, etc. Todos estos problemas los podemos agrupar bajo una misma notación:

$$F(x)=0, \tag{3}$$

donde F es un operador no lineal diferenciable definido entre dos espacios de Banach X e Y. Entonces, el método de Newton se escribe de la forma

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1}=x_n-[F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n\geq 0, \tag{4}$$

siendo $F'(x_n)$ la derivada del operador $F(x)$ en el punto x_n y $[F'(x_n)]^{-1}$ su operador inverso. En el caso de funciones de variable real o compleja, dicho operador inverso es simplemente el cociente por la derivada de la función. Para el caso de sistemas de ecuaciones, $F'(x_n)$ es la matriz Jacobiana de F en x_n y, por tanto, hay que calcular su inversa. Y, en general, $F'(x_n)$ es un operador lineal de X en Y que es necesario invertir en cada paso o, alternativamente, resolver la siguiente ecuación lineal en la variable u_n:

$$F'(x_n)u_n=-F(x_n), \qquad x_{n+1}=x_n+u_n, \qquad n\geq 0. \tag{5}$$

En el resto de esta sección presentamos las propiedades y características fundamentales del método de Newton. Las mismas han constituido la base teórica de nuestra investigación, consistente en modificar algunos resultados conocidos para obtener nuevas condiciones de convergencia para el método de Newton, así como extender y generalizar estos resultados a otros procesos iterativos. El desarrollo de este artículo aparece salpicado de referencias relacionadas, la mayoría correspondientes a artículos de miembros del grupo PRIENOL. Para no abrumar al lector con un elevado número de citas, hemos seleccionado aquellas que, a nuestro juicio, pueden ser más relevantes. De todos modos, los lectores interesados pueden consultar el listado completo de trabajos del grupo en la página web del mismo: `https://prienol.unirioja.es/`.

2.1. Convergencia del método de Newton

En un principio, el método de Newton estaba concebido únicamente como una técnica recursiva para aproximar las soluciones de algunas ecuaciones concretas. A principios del siglo XIX, científicos de la talla de Fourier o Cauchy se plantearon el problema de estudiar las condiciones que garantizasen la convergencia del método a una solución, así como otras cuestiones relativas a la velocidad de convergencia de las iteraciones o el error cometido en cada paso.

En el estudio de la convergencia del método de Newton y, en general, de cualquier proceso iterativo, se distinguen tres tipos de convergencia:

1. Convergencia local: se imponen condiciones sobre el operador F que define la ecuación (3) y sobre la solución x^* de la misma.
2. Convergencia semilocal: se imponen condiciones sobre el operador F que define la ecuación (3) y sobre el punto de partida x_0 de la sucesión (4).
3. Convergencia global: se exigen condiciones sobre el operador F que define la ecuación (3) en un rango de valores donde está definido.

El grupo de investigación PRIENOL se ha centrado fundamentalmente, aunque no únicamente, en el estudio de la convergencia semilocal de los métodos iterativos, realizándolo mediante diferentes técnicas de demostración y viendo qué es lo que aporta cada una de ellas en el estudio de los métodos iterativos.

A continuación, a modo ilustrativo, presentamos una versión actualizada del *teorema de Newton-Kantorovich*, que es un resultado de convergencia semilocal, inicialmente demostrado en 1948 por Kantorovich mediante relaciones de recurrencia [77]. Dicho resultado justifica de forma teórica el funcionamiento del método para encontrar soluciones en la práctica. Notemos además que los resultados de tipo Kantorovich no suponen la existencia de soluciones de la ecuación (3), por lo que el clásico teorema de Newton-Kantorovich, que enunciamos a continuación, no es sólo un resultado de convergencia semilocal del método de Newton, sino también un resultado de existencia y unicidad de solución de la ecuación (3).

Núm. 26 (2014), pp. 165–200 | ***Zubía***
ISSN 1131-5423 | ***Monográfico***

TEOREMA (Teorema de Newton-Kantorovich). *Sea $F:\Omega\subseteq X\to Y$ un operador dos veces diferenciable Fréchet en un conjunto abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y. Supongamos también que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *Existe un punto $x_0\in\Omega$ donde está definido el operador $[F'(x_0)]^{-1}=\Gamma_0$ y es tal que $\|\Gamma_0\|\leq\beta$,*

(ii) $\|\Gamma_0F(x_0)\|\leq\eta$,

(iii) $\|F''(x)\|\leq M$, *para todo* $x\in\Omega$,

(iv) $h=M\beta\eta\leqslant 1/2$,

(iv) $S=\{x:\|x-x_0\|\leq r_0\}\subseteq\Omega$, *donde* $r_0=\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$.

Entonces:

(a) *La sucesión* (4) *está bien definida y es convergente a una solución x^* de la ecuación $F(x)=0$.*

(b) *La solución x^* está contenida en la bola cerrada S y es única en el conjunto $\{x:\|x-x_0\|\leq r_1\}\cap\Omega$, donde $r_1=\frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta$.*

(c) *Se tienen las siguientes cotas del error:* $\|x^*-x_n\|\leq\frac{(2h)^{2^n}}{2^nh}\eta$, $n\geq 0$.

2.2. Velocidad de convergencia del Método de Newton

Un primer aspecto a destacar en el estudio de un proceso iterativo es la velocidad de convergencia de la sucesión generada por su algoritmo. Una medida muy utilizada habitualmente de la velocidad de convergencia es el R-orden de convergencia, que definimos a continuación.

DEFINICIÓN. *Sean $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio de Banach X que converge a un punto $x^*\in X$, un número $\tau\geq 1$ y*

$$e_n(\tau)=\begin{cases} n & si\ \tau=1,\\ \tau^n & si\ \tau>1,\end{cases}\qquad n\geq 0.$$

(a) *Decimos que τ es un R-orden de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ si existen dos constantes $b\in(0,1)$ y $B\in(0,+\infty)$ tales que*

$$\|x_n-x^*\|\leq B\,b^{e_n(\tau)}.$$

(b) *Decimos que τ es el R-orden de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ si existen constantes $a,b\in(0,1)$ y $A,B\in(0,+\infty)$ tales que*

$$Aa^{e_n(\tau)}\leq\|x_n-x^*\|\leq B\,b^{e_n(\tau)},\quad n\geq 0.$$

En general, comprobar la doble acotación de (b) es complicado, por eso normalmente sólo se buscan acotaciones superiores como las de (a). Por tanto, si encontramos un R-orden de convergencia τ de la sucesión $\{x_n\}$, decimos que la sucesión $\{x_n\}$ tiene R-orden de convergencia al menos τ. Este es el argumento habitualmente utilizado para estudiar el R-orden de convergencia de un método iterativo en espacios de Banach. Evidentemente, cuanto mayor es el orden de convergencia de un proceso iterativo, mayor es su velocidad de convergencia.

En este caso, si tenemos en cuenta el apartado (c) del teorema de Newton-Kantorovich, se sigue fácilmente que el método de Newton tiene R-orden de convergencia al menos cuadrático.

2.3. Coste operacional y eficiencia

Otro aspecto importante que hay que tener en cuenta cuando analizamos el algoritmo de un proceso iterativo es el coste operacional necesario que conlleva su aplicación. Dos son las fuentes que generan el coste operacional a la hora de aplicar el algoritmo: el número de operaciones requeridas en la aplicación del algoritmo y las evaluaciones de funciones necesarias que aparecen en él.

Para calcular el coste operacional del algoritmo del método de Newton, consideramos la resolución de un sistema de m ecuaciones con m incógnitas. Para aproximar una solución del sistema mediante el método de Newton (4), lo que hacemos es resolver, en cada paso, el sistema lineal (5), teniendo en cuenta que las aproximaciones x_n son vectores de $\mathbb{R}^m$ y que dicho sistema lineal está generado a partir de la matriz $F'(x_n)$, lo que habitualmente se realiza mediante una factorización LU y la resolución de dos sistemas lineales triangulares. En cuanto al coste operacional correspondiente al número de evaluaciones de funciones, vemos que se evalúan las funciones F y F' en cada paso del algoritmo, lo que hace que el método de Newton tenga un coste operacional reducido.

A partir del coste operacional, podemos definir la eficiencia del método de Newton, que relaciona la velocidad de convergencia con el coste operacional. Dos medidas clásicas de la eficiencia de un proceso iterativo, en el sentido definido por Traub [93] y Ostrowski [86], para la resolución de ecuaciones escalares, son el índice de eficiencia IE y la eficiencia computacional EC, que se definen, respectivamente, por

$$IE = \rho^{1/\nu} \qquad \text{y} \qquad EC = \rho^{1/\vartheta},$$

donde ρ es el R-orden de convergencia del método, que en el caso de Newton es dos, ν representa el número de evaluaciones de funciones necesarias para aplicar el método, que para el de Newton es dos, y ϑ es el número de operaciones (productos y divisiones) que son necesarias para aplicar cada paso del algoritmo en cuestión, que en el caso del método de Newton es $(m^3+3m^2-m)/3$ [86].

Sin embargo, mientras el índice de eficiencia y la eficiencia computacional son conceptos utilizados por Traub y Ostrowski para analizar la eficiencia de un proceso iterativo en el caso escalar, para resolver sistemas de m ecuaciones con

Núm. 26 (2014), pp. 165–200 | Zubía
ISSN 1131-5423 | Monográfico

m incógnitas es más apropiado y realista considerar una generalización de estos dos índices. Dicha generalización, denominada índice de eficiencia computacional *CEI* [15], viene dada por

$$CEI(\mu, m) = \rho^{1/\mathscr{C}(\mu,m)},$$

donde $\mathscr{C}(\mu, m)$ es el coste operacional del método, que se define como

$$\mathscr{C}(\mu, m) = \nu(m)\mu + \vartheta(m),$$

siendo $\nu(m)$ de evaluaciones de funciones en cada paso del algoritmo, $\vartheta(m)$ el número de productos (y divisiones), y μ la razón entre el número de productos y evaluaciones requerido para expresar $\mathscr{C}(\mu, m)$ en términos de productos. Cuando aplicamos el método de Newton para resolver un sistema de m ecuaciones con m incógnitas, tenemos $\nu(m) = m^2 + m$ y $\vartheta(m) = \frac{1}{3}(m^3 + 3m^2 - m)$, de manera que $\mathscr{C}(\mu, m) = (m^2 + m)\mu + \frac{1}{3}(m^3 + 3m^2 - m)$.

El *CEI* es un índice útil para comparar procesos iterativos, puesto que utiliza el producto como unidad de medida, contando los productos reales o equivalentes necesarios para realizar un paso de cada proceso iterativo. Para esto, tenemos que tener en cuenta todas las operaciones realizadas y conocer, por ejemplo, el número de productos equivalentes en tiempo para calcular una función específica. Naturalmente, el coste de una iteración de un método, así como su eficiencia, dependerá de la función, la dimensión del sistema y la aritmética computacional utilizada.

En [50] y [51] se puede consultar el estudio de la eficiencia del método de Newton, así como de otros procesos iterativos.

2.4. Accesibilidad

A la hora de conocer la aplicabilidad de un proceso iterativo, dos son los tipos de condiciones a los que hay que prestar atención. Si nos fijamos en el teorema de Newton-Kantorovich, vemos que hay condiciones sobre el punto de salida x_0, lo que denominamos accesibilidad del método, y condiciones sobre el operador F (F debe de ser dos veces continuamente diferenciable Frèchet y con segunda derivada acotada en el dominio Ω). El análisis y la modificación de las condiciones sobre el operador F se realizan en la sección 2.8. Aquí estudiamos la accesibilidad del método de Newton.

Podemos estudiar la accesibilidad de un método iterativo desde tres puntos de vista, dos de los cuales, la cuenca de atracción y la región de accesibilidad, son experimentales, y el otro, el dominio de parámetros, es teórico. Tanto la cuenca de atracción como la región de accesibilidad están asociadas a la ecuación $F(x) = 0$ a resolver. Además, la región de accesibilidad está asociada a un resultado de convergencia semilocal. Sin embargo, el dominio de parámetros no está asociado a una determinada ecuación, sino que está asociado única y exclusivamente a un resultado de convergencia semilocal, siendo válido para cualquier ecuación.

Destacamos que, mientras que el análisis de la accesibilidad de un método iterativo mediante cuencas de atracción es un procedimiento ya conocido, los análisis mediante regiones de accesibilidad y dominios de parámetros son dos procedimientos ideados por el grupo de investigación PRIENOL.

Para un sencillo entendimiento de estas tres formas de observar la accesibilidad de un método iterativo cuando se aplica a la resolución de una ecuación, vamos a utilizar el resultado de convergencia semilocal del método de Newton dado por Kantorovich, el teorema de Newton-Kantorovich, y la ecuación compleja $f(z) = z^3 - 1 = 0$, donde $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Notemos que la ecuación anterior tiene tres raíces: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ y $\alpha_3 = \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)$.

2.4.1. *Cuenca de atracción*

Cuando aplicamos el método de Newton al polinomio $f(z) = z^3 - 1 = 0$ obtenemos la siguiente función de iteración:

$$N_f(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

Asociada a cada una de las raíces α_i, $i = 1, 2, 3$, aparece una región del plano complejo formada por los puntos de salida z_0 a partir de los cuales el método de Newton $z_{n+1} = N_f(z_n)$ converge a una solución α_i, $i = 1, 2, 3$. A cada una de estas regiones se les llama *cuenca de atracción* de la raíz correspondiente.

De forma experimental, se pueden representar gráficamente estas cuencas de atracción, tal y como se muestra en el primer gráfico de la figura 1. Siguiendo las estrategias dadas en [94], se ha considerado una malla D de puntos en un rectángulo del plano complejo. El método de Newton, empezando en un punto $z_0 \in D$, puede converger a cualquiera de las tres raíces o, eventualmente, diverger. Hemos coloreado los puntos de la malla correspondientes a las aproximaciones iniciales a partir de las cuales se alcanza alguna de las raíces con una tolerancia y un número máximo de iteraciones prefijados. En particular, hemos utilizado los colores cian, magenta y amarillo para las cuencas de atracción de las raíces α_1, α_2 y α_3, respectivamente. El color se hace más claro o más oscuro según sea el número de iteraciones utilizadas para alcanzar una raíz con la precisión fijada.

Como vemos en este experimento, la frontera entre las tres cuencas de atracción presenta una estructura muy intrincada. Además, se aprecia que, si tomamos círculos centrados en puntos de dicha frontera y de radios tan pequeños como queramos, se encuentran puntos en dichos círculos que pertenecen a las tres cuencas de atracción. Esto revela que la elección del punto de partida en el método de Newton y, en general en cualquier proceso iterativo, es un problema complicado. El análisis y caracterización de las cuencas de atracción de un proceso iterativo es uno de los puntos clave de su estudio dinámico, como se muestra en la sección 2.5.

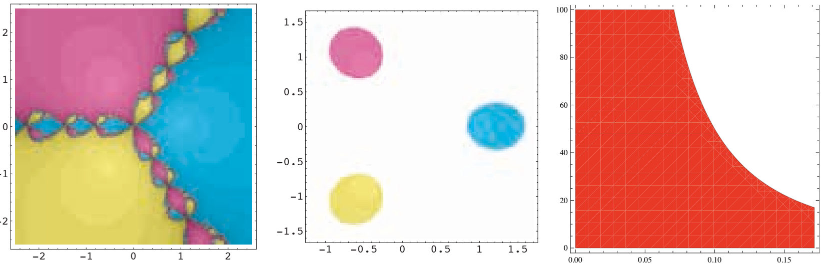

Figura 1: A la izquierda, cuencas de atracción de las tres raíces de $z^3 - 1 = 0$ cuando se aproximan mediante el método de Newton. En el centro, regiones de accesibilidad de las tres raíces según el teorema de Newton-Kantorovich. A la derecha, dominio de parámetros del método de Newton asociado al citado teorema.

2.4.2. *Región de accesibilidad*

Sabemos que los puntos de salida del método de Newton tienen asociados los parámetros β, η y M dados en las condiciones iniciales (i)–(iii) del teorema de Newton-Kantorovich. Para representar las regiones de accesibilidad del método de Newton, coloreamos los puntos cuyos parámetros asociados verifican las condiciones de convergencia y, en otro caso, no los coloreamos. La región de accesibilidad asociada a una solución de una ecuación nos indica entonces el dominio de puntos de salida a partir de los cuales tenemos asegurada la convergencia del método de Newton (es decir, el conjunto de puntos de salida que satisfacen las condiciones de convergencia para el método de Newton).

En el segundo gráfico de la figura 1 vemos cuáles son las regiones de accesibilidad asociadas a las raíces de la ecuación $z^3 - 1 = 0$ cuando se aproximan con el método de Newton. Representamos la regiones de accesibilidad coloreando los puntos x_0 que verifican la condición $M\beta\eta \leq \frac{1}{2}$ del teorema de Newton-Kantorovich. Hemos utilizado los colores cian, magenta y amarillo para regiones de accesibilidad de las raíces α_1, α_2 y α_3, respectivamente. Y, al igual que para las cuencas de atracción, el color se hace más claro o más oscuro según sea el número de iteraciones utilizadas para alcanzar una solución con la precisión fijada.

2.4.3. *Dominio de parámetros*

Aparte de la observación empírica de la accesibilidad del método de Newton dado por las cuencas de atracción y las regiones de accesibilidad, podemos realizar un estudio de la accesibilidad de dicho método a partir de las condiciones de convergencia impuestas en el teorema de convergencia semilocal de Newton-Kantorovich.

Observamos que las condiciones de convergencia impuestas en dicho teorema tienen dos partes diferenciadas. Por una parte, las condiciones iniciales (i)–(ii) exigidas al punto de salida x_0; y por otra, la condición (iii) exigida al operador F.

Para estudiar las restricciones que se imponen con las condiciones iniciales, utilizamos el dominio de parámetros, que establece gráficamente en un plano real la relación entre los parámetros que se definen a partir de las condiciones iniciales.

A partir del teorema de Newton-Kantorovich, si queremos estudiar teóricamente la accesibilidad del método de Newton, basta con tener en cuenta que, dado $x_0 \in \Omega$, el método tiene asociados los parámetros β y η que aparecen en (i)–(ii), y el parámetro M que aparece en (iii). Así, a partir de la condición de convergencia $M\beta\eta \leq \frac{1}{2}$ del teorema de Newton-Kantorovich, podemos definir el dominio de parámetros asociado a dicho teorema como el conjunto de puntos del plano real dado por $\{(\beta, M\eta) \in \mathbb{R}^2 : M\beta\eta \leq \frac{1}{2}\}$. Por un lado, observamos que el parámetro η mide la aproximación de x_0 a la solución x^*. Notemos entonces que $\eta = 0$ si $x_0 = x^*$. Por otro lado, observamos que el parámetro M, que se define a partir de la condición (iii) que se exige al operador F, es siempre una cantidad fija, de manera que no va a influir en el dominio de parámetros.

En el tercer gráfico de la figura 1 mostramos el dominio de parámetros del método de Newton asociado al teorema de Newton-Kantorovich. Para representarlo gráficamente, hemos considerado el plano xy con $x = \beta$ (eje de abscisas) e $y = M\eta$ (eje de ordenadas) y coloreado en rojo los valores de los parámetros que verifican la condición $xy \leq \frac{1}{2}$.

2.5. Estudio de la dinámica

Tal y como vimos en la sección 2.4, el problema de encontrar puntos de partida adecuados para asegurar la convergencia de un proceso iterativo a la solución de una ecuación es el verdadero «talón de Aquiles» de esta teoría. Esta cuestión ha atraído la atención de los matemáticos desde mucho tiempo atrás y sigue siendo hoy en día un tema de investigación con varios interrogantes aún sin resolver. Para poder entender mejor este problema, extendemos el ejemplo del polinomio $z^3 - 1$ a una función general $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en el plano complejo[1] $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ y consideramos un proceso iterativo cualquiera

$$\text{dado } z_0, \quad z_{n+1} = T_f(z_n), \quad n \geq 0, \tag{6}$$

para aproximar numéricamente las soluciones de la ecuación $f(z) = 0$. Sea α una de estas soluciones. Las cuestiones que se plantean son: ¿es posible caracterizar la región del plano complejo S_α tal que si $x_0 \in S_\alpha$, el proceso iterativo (6) converja a α? Como ya se ha indicado anteriormente, la región S_α se conoce como *cuenca de atracción* de la raíz α para el proceso T_f. Si la ecuación $f(z) = 0$ tiene otras soluciones, ¿podemos caracterizar las demás de cuencas de atracción? ¿Llenan estas cuencas de atracción todo el plano complejo? ¿Puede ocurrir que haya zonas de no convergencia a las soluciones? El estudio dinámico de los procesos iterativos nos permite responder a estas y otras cuestiones.

[1] El problema se podría plantear también en la recta real, en los espacios $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, o en espacios más generales.

De forma muy esquemática, podríamos decir que el estudio dinámico de (6) consiste en caracterizar las *órbitas* de los diversos puntos de partida $z_0 \in \mathbb{C}$, entendiendo por órbita de un punto, bajo la acción de T_f, el conjunto

$$\{z_0, T_f(z_0), T_f^2(z_0), \ldots, T_f^n(z_0), \ldots\},$$

donde $T_f^n(z_0) = T_f^{n-1}(T_f(z_0))$ es la composición de la función T_f consigo misma n veces, para $n \geq 2$. Así, nos podemos encontrar con las siguientes situaciones:

1. Órbitas que convergen a un único punto (un *punto fijo* de T_f), que además es una solución de $f(z) = 0$.
2. Órbitas que convergen a un punto fijo de T_f que no es solución de $f(z) = 0$ (*punto fijo extraño*).
3. Órbitas que se repiten tras un número finito de pasos; es decir, existe un valor mínimo $p \in \mathbb{N}$ tal que $T_f^p(z_0) = z_0$. En este caso, se obtiene una órbita $\{z_0, T_f(z_0), \ldots, T_f^{p-1}(z_0)\}$ que se conoce como *ciclo de periodo* p o p*-ciclo*.
4. Órbitas que se aproximan a un p-ciclo, pero sin llegar nunca a alcanzarlo.
5. Órbitas que tienen una evolución menos predecible y que parecen no seguir ningún patrón reconocible, dando lugar a fenómenos como atractores extraños o comportamientos caóticos.

El primer caso es el deseado desde el punto de vista de los métodos para resolver ecuaciones, pero los demás también son interesantes a la hora de conocer el comportamiento global de la función de iteración T_f. De hecho, son estos los que ofrecen más posibilidades de estudio desde el punto de vista dinámico.

Sin duda alguna, el estudio de referencia en este campo lo marca el método de Newton, cuya función de iteración es $T_f(z) = N_f(z)$. Para este método se conocen muchísimos resultados que caracterizan su comportamiento dinámico para funciones definidas tanto en la recta real como en el plano complejo, como puede verse en [88] y en las numerosas referencias allí contenidas.

El origen de este problema se encuentra en los trabajos del matemático británico A. Cayley, quien en 1879 encontró las cuencas de atracción del método de Newton aplicado a un polinomio de segundo grado con dos raíces distintas:

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2), \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Cayley demostró que dichas cuencas son los semiplanos en los que queda dividido el plano complejo por la recta equidistante de las dos raíces, es decir, la mediatriz del segmento de extremos α_1 y α_2. Si tomamos un punto de partida en el mismo semiplano que una raíz, el método de Newton converge a dicha raíz, es decir, en este caso el método de Newton converge a la raíz más cercana al punto de partida. Si tomamos un punto de partida en la mediatriz, el método de Newton proporciona una sucesión de puntos en la propia mediatriz sin ningún orden aparente, apareciendo así un comportamiento caótico.

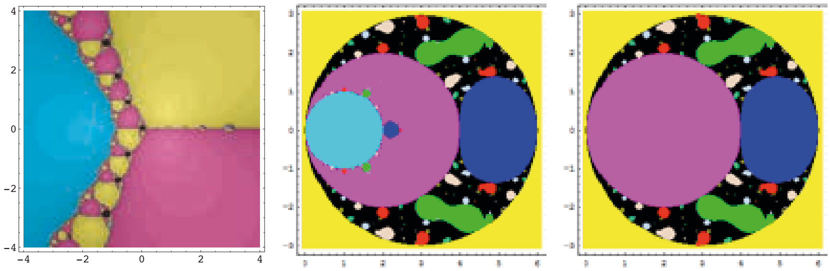

Figura 2: Elementos de la dinámica compleja para el método de Newton y sus variantes: a la izquierda, aparición de agujeros negros; en el centro, un plano de parámetros para el método de Newton amortiguado asociado a un punto crítico; y a la derecha, el plano de parámetros asociado al otro punto crítico.

El propio Cayley fracasó en el intento de resolver el problema para polinomios de tercer grado. En palabras del propio Cayley: «Espero poder aplicar esta teoría al caso de una ecuación cúbica, pero los cálculos son mucho más difíciles».

Cuarenta años más tarde, los trabajos de G. M. Julia (1918) y P. J. L. Fatou (1920) revelaron que el problema al que se enfrentaba Cayley no era en absoluto trivial, sino prácticamente inabordable con los conocimientos y técnicas de su época. En el primer gráfico de la figura 1 mostrábamos las cuencas de atracción para el método de Newton aplicado al polinomio cúbico $p(z)=z^3-1$. Al verlas, se puede entender el fracaso de Cayley al intentar caracterizar dichas cuencas.

Otro fenómeno destacable en la dinámica del método de Newton es la aparición de «agujeros negros», que son regiones del plano formadas por puntos de partida para los cuales el método de Newton no converge a ninguna de las raíces. Para ello, véase el primer gráfico de la figura 2, donde, junto a las cuencas de atracción de las tres raíces del polinomio $p(z)=z^3-2z+2$, existen regiones (coloreadas en negro) donde se encuentran puntos de partida para los cuales el método de Newton no converge a ninguna de las raíces. Así, por ejemplo, hay puntos cuyas órbitas convergen a un ciclo de longitud 2. Si empezamos a iterar el método de Newton en $z_0=0$, obtenemos el 2-ciclo $\{0,1\}$:

$$z_1=z_0-\frac{z_0^3-2z_0+2}{3z_0^2-2}=1, \qquad z_2=z_1-\frac{z_1^3-2z_1+2}{3z_1^2-2}=0.$$

Pero, es más, las iteraciones que empiezan en puntos cercanos a 0 (o cercanos a 1) se aproximan cada vez más al 2-ciclo.

Si bien es cierto que existe una gran cantidad de resultados sobre el comportamiento dinámico del método de Newton, también es cierto que el estudio de otros procesos iterativos para resolver ecuaciones no lineales es bastante menos conocido. En esta línea es donde nuestro grupo de investigación ha trabajado. En particular, en la tesis doctoral de Á. A. Magreñán [79] se ha llevado a cabo un análisis exhaustivo de una variante del método de Newton conocida como *método* *de Newton amortiguado* [89]:

$$\text{dado } z_0, \quad z_{n+1} = z_n - \lambda \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0. \tag{7}$$

Allí se contempla la importancia del parámetro amortiguador λ en las propiedades del método y su estudio se divide en dos partes:

1. En la primera de ellas (*dinámica real*), se considera $\lambda \in \mathbb{R}$ y (7) como una sucesión definida dentro del campo de los números reales.
2. En la segunda (*dinámica compleja*), se toma λ como un parámetro complejo y (7) como una sucesión definida en el campo de los números complejos.

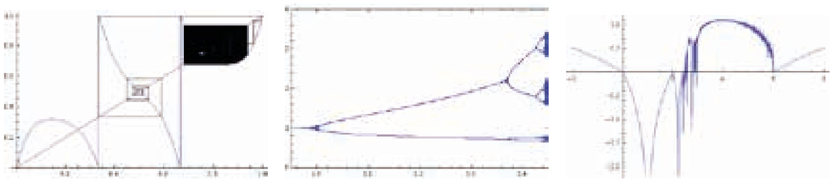

Figura 3: Algunos elementos que aparecen en la dinámica real del método de Newton y sus variantes: a la izquierda, órbitas que tienen un comportamiento caótico; en el centro, diagramas de Feigenbaum; y a la derecha, exponentes de Lyapunov.

Ambos estudios dinámicos tienen algunos aspectos comunes, como por ejemplo que (7) tiene sentido como método para buscar raíces de una ecuación sólo cuando $|\lambda - 1| < 1$, donde $|\cdot|$ representa el valor absoluto de un número real o el módulo de un número complejo. No obstante, la generalización al resto de valores de λ aporta una gran riqueza desde el punto de vista dinámico, ya que produce que el carácter de las raíces de la ecuación considerada vaya cambiando en función de λ, pudiendo pasar de ser atractor a repulsor, además de originar la aparición de otros fenómenos dinámicos como los ciclos atractores o el comportamiento caótico. Pero también es cierto que las dos variantes dinámicas tienen elementos diferenciadores. Por ejemplo, en la dinámica real cabe destacar la formación de asíntotas en la función de iteración o el empleo de herramientas como los diagramas de Feigenbaum o los exponentes de Lyapunov (véase la figura 3), mientras que en la dinámica compleja cobra relevancia el estudio del punto del infinito, los conjuntos de Julia (fronteras de las cuencas de atracción) o los conocidos como planos de parámetros (véase la figura 2).

2.6. Mejora de la velocidad de convergencia

Partes de las tesis doctorales de J. M. Gutiérrez [41] y J. A. Ezquerro [11] están dedicadas a mejorar la velocidad de convergencia del método de Newton. Para ello, se apoyan en el estudio de la convexidad y construyen aceleraciones del método de Newton que han dado lugar a procesos iterativos con órdenes de convergencia cuadrático y cúbico.

Si aplicamos el método de Newton (2) para resolver la ecuación escalar $f(t)=0$, el grado de convexidad logarítmico de f,

$$L_f(t)=\frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2},$$

nos permite analizar la velocidad de convergencia de la sucesión de Newton a una raíz α. Así, supongamos que α es también raíz de otra ecuación $g(t)=0$. Dados t_0 y s_0, sean

$$t_{n+1}=t_n-\frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad s_{n+1}=s_n-\frac{g(s_n)}{g'(s_n)},$$

las correspondientes sucesiones de Newton obtenidas para f y g respectivamente, pero empezando en el mismo punto $s_0=t_0$. Entonces, si los grados de convexidad logarítmicos respectivos cumplen $L_g(t)<L_f(t)$ para todo $t\in[t_0,\alpha)$, se sigue que la sucesión $\{s_n\}$ converge a α más rápidamente que la sucesión $\{t_n\}$. Este resultado permite relacionar algunas aspectos geométricos de las funciones f y g con cuestiones puramente numéricas; no en vano, el grado de convexidad logarítmico de f es también la derivada de la función de iteración del método de Newton aplicado a la función f: $L_f(t)=N_f'(t)$.

Utilizando el argumento anterior, podemos obtener aceleraciones punto a punto para el método de Newton. Es decir, la aceleración $\{s_n\}$ es tal que $s_{n+1}=G(t_n)$ para un cierto operador G. Este tipo de aceleraciones tienen gran interés, ya que una vez construido G se pueden definir nuevos procesos iterativos $z_{n+1}=G(z_n)$ independientemente de la sucesión $\{t_n\}$.

En [41], mediante una serie de consideraciones geométricas, se encuentran una de estas aceleraciones y su correspondiente nuevo proceso iterativo, que es nombrado como aceleración convexa del método de Newton,

$$\text{dado } t_0, \quad t_{n+1}=t_n-\frac{2-L_f(t_n)}{1-L_f(t_n)}\frac{f(t_n)}{2f'(t_n)}, \quad n\geq 0,$$

pero que en la literatura matemática se ha asentado con el nombre de método de super-Halley. Se trata de un método iterativo con R-orden de convergencia al menos tres y propiedades interesantes desde el punto de vista numérico, y que no ha sido tan estudiado como otros métodos clásicos de tercer orden (el de Halley y el de Chebyshev).

En [11], se obtienen tres procedimientos de aceleración del método de Newton. El primero consiste en reducir directamente el grado de convexidad logarítmico de la función f y, a partir de ésta, construir dos funciones con menor grado de convexidad logarítmico, dando lugar así a una familia de métodos iterativos con R-orden de convergencia al menos dos ([19], [21]) y al conocido método de tercer orden de Halley. El segundo, denominado «aproximación global», consiste en aproximar la curva $y = f(x)$ por la recta tangente a dicha curva en el punto $(\alpha, 0)$, dando lugar al método de la aceleración convexa del método de Newton (o de super-Halley). Y el tercero, denominado «aproximación local», consiste en realizar las aproximaciones localmente, aproximando la curva $y = f(x)$ por la recta $y = f'(x_n)(x - \alpha)$ en un entorno de cada punto $(x_n, f(x_n))$, dando lugar al conocido método de tercer orden de Chebyshev. Los dos últimos procedimientos se basan en el hecho obvio de que las rectas son las funciones no cóncavas con menor grado de convexidad logarítmico [20].

2.7. Reducción del coste operacional

A la hora de reducir el coste operacional del método de Newton, un primer procedimiento, que se puede considerar como natural, consiste en evitar el cálculo del operador derivada en su algoritmo. Así, hemos reducido el coste operacional del método de Newton mediante procesos iterativos denominados de tipo Whittaker y dados por un esquema de la forma

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \lambda_n F(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde λ_n es una sucesión de números reales. Otro procedimiento habitualmente utilizado consiste en «congelar» el operador inverso, tal y como puede verse en el método de Newton modificado,

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde se «congela» el operador inverso que aparece en el método de Newton (4). Sin embargo, el R-orden de convergencia de estos dos últimos métodos iterativos se reduce de cuadrático a lineal, lo que reduce notablemente la eficiencia de ambos.

También podemos reducir el coste operacional del método de Newton al aproximar la derivada F', lo que lleva a procesos iterativos tipo Newton. En el apartado 2.8.2 podemos ver el caso en el que se aproxima la derivada F' mediante diferencias divididas.

En [26], manteniendo el R-orden de convergencia cuadrático, pero eliminando el operador inverso $[F'(x_n)]^{-1}$ del algoritmo y, en el caso m-dimensional, cambiando la resolución de sistemas lineales en cada paso por productos de matrices (lo que puede mejorar la estabilidad del proceso iterativo), hemos estudiado el proceso iterativo

$$\begin{cases} \text{dado } x_0, \\ x_{n+1} = x_n - B_n F(x_n), \\ B_{n+1} = 2B_n - B_n F'(x_{n+1}) B_n, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

que se conoce como método de Newton-Moser, tiene convergencia cuadrática y no contiene operadores inversos en su algoritmo. Otra ventaja de este método es que proporciona una sucesión $\{B_n\}$ de aproximaciones al valor de $[F'(x^*)]^{-1}$, siendo x^* una solución de la ecuación a resolver. En [43] y [92] podemos encontrar dos estudios de la convergencia semilocal de este método, el primero basado en relaciones de recurrencia y el segundo basado en la α-teoría de Smale.

La eficiencia de un método iterativo determina su elección. Hemos visto que la eficiencia de un método depende del R-orden de convergencia y del coste operacional de éste. En la sección anterior hemos visto, mediante aceleraciones punto a punto, un procedimiento para mejorar el R-orden de convergencia y, en esta sección, acabamos de ver varios procedimientos para rebajar el coste operacional de un método iterativo. A continuación, finalizamos esta sección viendo un procedimiento para conseguir ambas mejoras y construir así métodos iterativos más eficientes. Para ello, utilizamos los conocidos métodos iterativos multipaso. Así, podemos mejorar el R-orden de convergencia de un proceso iterativo mediante la aplicación del siguiente resultado que permite construir, a partir de un proceso iterativo con R-orden de convergencia al menos p, un proceso iterativo multipaso de R-orden de convergencia al menos $p+1$:

$$\begin{cases} \text{dado } x_0, \\ z_n = \phi(x_n), \quad (R\text{-orden de convergencia al menos } p) \\ x_{n+1} = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Una primera aplicación interesante del resultado anterior es el caso del conocido método de Newton de dos pasos,

$$\begin{cases} \text{dado } x_0, \\ y_n = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad (R\text{-orden de convergencia al menos 2}) \\ x_{n+1} = y_n - [F'(x_n)]^{-1}F(y_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

que tiene R-orden de convergencia al menos tres. Además, también se considera la técnica de congelación indicada anteriormente para los dos pasos que tiene el método. Así, incrementamos la velocidad de convergencia y no incrementamos excesivamente el coste operacional, lo que hace mejorar la eficiencia. Este tipo de técnicas se han utilizado en [15].

2.8. Otras condiciones exigidas al operador F

Por un lado, la utilización de las relaciones de recurrencia que se derivan a lo largo del procedimiento utilizado por Kantorovich para demostrar la convergencia semilocal del método de Newton juega un papel fundamental, pero no es la única forma de demostrarla. Kantorovich demuestra el mismo resultado a partir del concepto de sucesión mayorizante [78].

Por otro lado, a la hora de mejorar, en un sentido amplio, la aplicabilidad del método de Newton, nos planteamos, por una parte, suavizar las condiciones

Núm. 26 (2014), pp. 165-200
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

impuestas al operador F, de manera que podamos aplicar el método a un mayor número de situaciones, y, por otra, mejorar los dominios de puntos de salida, es decir, la accesibilidad del método.

Para estudiar las diferentes condiciones exigidas al operador, distinguiremos entre dos situaciones: operadores diferenciables y operadores no diferenciables.

2.8.1. Operadores diferenciables

Para suavizar las condiciones exigidas al operador F en el análisis de la convergencia semilocal del método de Newton, el grupo PRIENOL ha desarrollado una nueva técnica de demostración de la convergencia semilocal de este método que simplifica en gran medida el análisis de la convergencia cuando se estudia bajo condiciones más suaves que las clásicas de Kantorovich.

El teorema de Newton-Kantorovich impone condiciones suficientes para que la ecuación $F(x)=0$ tenga una única solución x^* en un cierto entorno del punto inicial x_0. Observemos que la condición más exigente que se requiere al operador F es (iii). Sin embargo, hay situaciones en las que esta condición no se satisface. Por ejemplo, en algunas ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto de la forma [25]

$$x(s)=u(s)+\sum_{i=1}^{m}\int_a^b G_i(s,t)H_i(x(t))\,dt, \quad s\in[a,b], \tag{8}$$

donde $-\infty<a<b<\infty$, G_i, H_i $(i=1,2,\ldots,m)$ y u son funciones conocidas y x es una función solución a determinar. Ecuaciones integrales de este tipo pueden encontrarse en modelos dinámicos de reactores químicos. En particular, para

$$x(s)=u(s)+\int_a^b G(s,t)[\lambda_1 x(t)^{2+p}+\lambda_2 x(t)^n]\,dt, \tag{9}$$

con $s\in[a,b]$, $p\in[0,1]$, $n\geq 2$ $(n\in\mathbb{N})$ y $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, donde u es una función continua y el núcleo G es una función continua y no negativa en $[a,b]\times[a,b]$.

La resolución de la ecuación integral (9) es equivalente a resolver la ecuación $F(x)=0$ donde $F: C[a,b]\to C[a,b]$ es

$$[F(x)](s)=x(s)-u(s)-\int_a^b G(s,t)[\lambda_1 x(t)^{2+p}+\lambda_2 x(t)^n]\,dt,$$

con $s\in[a,b]$, $p\in[0,1]$, $n\geq 2$ $(n\in\mathbb{N})$ y $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. En este caso,

$$[F'(x)y](s)=y(s)-\int_a^b G(s,t)[(2+p)\lambda_1 x(t)^{1+p}+n\lambda_2 x(t)^{n-1}]y(t)\,dt,$$

$$[F''(x)(yz)](s)=-\int_a^b G(s,t)[(2+p)(1+p)\lambda_1 x(t)^{p}+n(n-1)\lambda_2 x(t)^{n-2}]z(t)y(t)\,dt.$$

Notemos que la condición (iii) del teorema de Newton-Kantorovich no se cumple porque F'' no está acotada en $C[a,b]$ y, además, no es sencillo prelocalizar un dominio donde lo esté y que contenga una solución de la ecuación $F(x)=0$.

Para solventar el problema anterior, una alternativa es prelocalizar la raíz en algún dominio $\Omega \subset C[a,b]$ y buscar alguna cota superior para $\|F''\|$ en Ω. Una alternativa mejor y más elegante consiste en suavizar la condición (iii) mediante una condición del tipo

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{10}$$

donde $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función real continua monótona y tal que $\omega(0) \geq 0$ (véase [12]). Notamos que para el caso de las ecuaciones integrales anteriores es más fácil encontrar una función ω que satisfaga (10) que buscar una cota superior para $\|F''\|$ en un dominio apropiado.

Volviendo de nuevo a las condiciones clásicas de Newton-Kantorovich, a la hora de estudiar la convergencia semilocal del método de Newton han ido apareciendo a lo largo de los últimos años una gran cantidad de diferentes enfoques. Por ejemplo, una primera modificación surge al cambiar la condición (iii) del teorema de Newton-Kantorovich por la condición

$$\|F'(x)-F'(y)\| \leq L\|x-y\| \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{11}$$

Es decir, la primera derivada de Fréchet F' es Lipschitz continua en Ω. También podemos considerar la generalización de (11) dada por

$$\|F'(x)-F'(y)\| \leq K\|x-y\|^p, \quad p \in [0,1], \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{12}$$

En este caso, decimos que F' es (K,p)-Hölder continua en Ω. Obsérvese que si $K=L$ y $p=1$, (12) se reduce a (11).

En la práctica, verificar las condiciones (11) y (12) también es difícil en algunos problemas, ya que se encuentran ciertas dificultades técnicas, de manera que el número de ecuaciones a las que se les puede aplicar el método de Newton-Kantorovich es limitado. En particular, no se puede analizar la convergencia del método de Newton a una solución de ecuaciones en las que aparecen sumas de operadores que satisfacen (11) o (12) indistintamente. Por ejemplo, si consideramos (8) con $H_i'(x(t))$, para $i=1,2,\ldots,m$, siendo (K_i,p_i)-Hölder continua en Ω, el correspondiente operador $F : C[a,b] \to C[a,b]$,

$$[F(x)](s) = x(s) - u(s) - \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i(x(t))\,dt, \quad s \in [a,b],$$

no satisface ni (11) ni (12) en $C[a,b]$, al considerar por ejemplo la norma del máximo, puesto que

$$\|F'(x)-F'(y)\| \leq \sum_{i=1}^{m} K_i \|x-y\|^{p_i}, \quad p_i \in [0,1], \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Para solventar estos inconvenientes, podemos considerar la generalización

$$||F'(x)-F'(y)|| \leq \widetilde{\omega}(||x-y||) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{13}$$

donde $\widetilde{\omega}:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función real continua no decreciente y tal que $\widetilde{\omega}(0) \geq 0$ (véase [23]). Así, para el caso particular anterior, se tiene $\widetilde{\omega}(z) = \sum_{i=1}^{m} K_i z^{p_i}$.

Obviamente, las condiciones (11) y (12) son casos particulares de (13), ya que (13) se reduce a (11) y (12) si, respectivamente, $\widetilde{\omega}(z) = Lz$ y $\widetilde{\omega}(z) = Kz^p$, donde $K = \text{máx}\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ y $p = \text{máx}\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$.

Notemos que, por otra parte no menos importante, la utilización de sucesiones mayorizantes para asegurar la convergencia del método de Newton bajo las condiciones (10) o (13) es difícil, por no decir prácticamente imposible. De aquí surge la idea de desarrollar una técnica alternativa a la de las sucesiones mayorizantes, a partir de la cual el método de Newton converja siempre que se cumplan (10) o (13). Esta técnica alternativa ha sido desarrollada por el grupo de investigación PRIENOL, está basada en relaciones de recurrencia, su aplicación es simple y tiene ciertas ventajas sobre la técnica clásica de las sucesiones mayorizantes de Kantorovich. Por un lado, se pueden generalizar los resultados obtenidos bajo condiciones de tipo Newton-Kantorovich y, por otro lado, se pueden mejorar los resultados obtenidos mediante sucesiones mayorizantes cuando F' satisface (12). Además, también se pueden obtener estimaciones a priori del error, analizar el R-orden de convergencia del método de Newton (en particular, el método tiene R-orden de convergencia al menos dos si se satisface (10), y $1+p$ si se cumple (13) con $\widetilde{\omega}(tz) \leq t^p \widetilde{\omega}(z)$, para $z > 0$, $t \in [0,1]$, $p \in [0,1]$), y dar resultados de existencia y unicidad de solución.

En lo referente a la mejora de la accesibilidad del método de Newton, hemos probado resultados de convergencia semilocal que nos permiten modificar el dominio de puntos de salida establecido por el teorema de Newton-Kantorovich. Para ello, consideramos condiciones de convergencia sobre la segunda derivada del operador e incluso sobre derivadas de orden superior. En este caso, en la tesis doctoral de D. González [40] se desarrolla una nueva técnica de construcción de sucesiones mayorizantes *ad hoc* mediante la construcción de problemas de valor inicial a partir de las condiciones iniciales exigidas al operador F.

Hemos completado nuestro estudio de la accesibilidad obteniendo dominios locales y globales de convergencia bajo diferentes tipos de condiciones para el operador F. En [31], analizamos la convergencia de una familia de métodos iterativos tipo Newton de órdenes altos de convergencia, dando dominios de convergencia semilocal y global. Y, en [13], probamos la convergencia local del método de Newton bajo condiciones generalizadas de tipo Kantorovich.

Otros trabajos relacionados con la convergencia semilocal y local de métodos de tipo Newton pueden encontrarse en [3], [7] o [46].

2.8.2. *Operadores no diferenciables*

Uno de los inconvenientes que nos encontramos al utilizar procesos iterativos punto a punto definidos mediante derivadas, como es el método de Newton, es que ha de ser posible evaluar $F'(x)$ en cada iteración. Esto los hace inaplicables a ecuaciones con operadores no diferenciables y también en situaciones en las que evaluar la derivada sea demasiado costoso o difícil de calcular. Para resolver esta dificultad es frecuente aproximar la derivada del operador por una diferencia dividida, dando lugar así a otro tipo de procesos iterativos.

Uno de los métodos que se ajusta a esta situación, conocido desde el tiempo de los primeros algebristas italianos, es el método de la secante,

$$\text{dados } t_{-1}, t_0, \quad t_{n+1} = t_n - \frac{t_{n-1} - t_n}{f(t_{n-1}) - f(t_n)} f(t_n), \quad n \geq 0,$$

que tiene convergencia superlineal $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (número áureo). Aunque fue desarrollado independientemente del método de Newton, puede considerarse una aproximación de éste mediante diferencias divididas de primer orden. Así, si consideramos en la iteración de Newton (2) la aproximación

$$f'(t_n) \approx \frac{f(t_{n-1}) - f(t_n)}{t_{n-1} - t_n},$$

donde el cociente anterior es conocido como diferencia dividida de primer orden de f en los puntos t_{n-1} y t_n, obtenemos el método de la secante.

Si comparamos ambos métodos, vemos que el método de Newton converge más rápido, pero su coste operacional también es mayor. Por ejemplo, en el caso de sistemas de ecuaciones, el método de Newton requiere evaluar tanto la función como su derivada en un punto en cada paso, mientras que el método de la secante sólo necesita una evaluación de la función.

Si queremos extender el método de la secante a espacios de Banach, es necesario establecer la noción de diferencia dividida en dichos espacios. Su definición fue introducida por J. Schröder en 1956 y generaliza la noción de diferencia dividida de una función escalar. Así, denotando por $\mathscr{L}(X,Y)$ el espacio de los operadores lineales y acotados de X en Y, un operador $D \in \mathscr{L}(X,Y)$ se dice que es una diferencia dividida de F en los puntos x e y si cumple

$$D(x-y) = F(x) - F(y).$$

En adelante, nosotros utilizaremos la notación $[x,y;F]$ para las diferencias divididas. Entonces, aproximando $F'(x_n)$ en el método de Newton (4) por $[x_{n-1}, x_n; F]$ obtenemos el método de la secante ([86], [93]):

$$\text{dados } x_{-1}, x_0, \quad x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n; F]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0.$$

El estudio de la convergencia semilocal y aplicaciones de este método ha sido realizado utilizando distintas técnicas, introducidas y desarrolladas por el grupo PRIENOL ([59], [60], [61], [62], [66], [67]) y en diferentes condiciones sobre el operador diferencia dividida. Para ello, se contempla la extensión de las condiciones (11), (12) y (13) a las diferencias divididas del operador. Así, en sustitución de la condición (12), decimos que una diferencia dividida $[x,y;F]$ es (K,p)-Hölder continua en Ω si existe una constante $K \geq 0$ y $p \in (0,1]$ tales que

$$\|[x,y;F]-[u,v;F]\| \leq K\,(\|x-u\|^p+\|y-v\|^p), \quad x,y,u,v \in \Omega.$$

En sustitución de (11), para el caso $p=1$ se dice que la diferencia dividida es Lipschitz continua, cumpliéndose $[x,x;F]=F'(x)$, $x \in \Omega$. Generalizando la condición anterior, decimos que una diferencia dividida $[x,y;F]$ es ω-condicinada en Ω si verifica

$$\|[x,y;F]-[u,v;F]\| \leq \omega(\|x-u\|,\|y-v\|); \quad x,y,u,v \in \Omega,$$

donde $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es continua y no decreciente en ambas componentes. Notemos que, en esta situación, F es diferenciable si $\omega(0,0)=0$ [68].

El método de la secante, a diferencia del de Newton, es un método con memoria, ya que cada paso del algoritmo necesita de dos puntos anteriores. Con objeto de aumentar su velocidad de convergencia, realizamos una generalización introduciendo la siguiente familia uniparamétrica de métodos tipo secante [91]:

$$\begin{cases} \text{dados } x_{-1}, x_0, \\ y_n = \lambda x_n + (1-\lambda)x_{n-1}, \quad \lambda \in [0,1], \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n; F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

Esta familia «conecta» los métodos de Newton y de la secante. Si el operador F es diferenciable, para $\lambda = 1$ resulta $y_n = x_n$, con lo que $[y_n, x_n; F] = F'(x_n)$ y por tanto obtenemos el método de Newton; si $\lambda = 0$, evidentemente $y_n = x_{n-1}$ y se tiene el método de la secante, lo que nos ha permitido estudiar, tanto por separado como conjuntamente, ambos métodos. Esto ha sido realizado mediante distintas técnicas y también en diferentes condiciones de convergencia para los operadores ([63], [69], [74], [75]). Por otro lado, (14) es una familia que está formada, para $\lambda \in [0,1)$, por procesos iterativos que utilizan diferencias divididas en lugar de la derivada, lo que nos ha permitido dar resultados de convergencia en condiciones menos exigentes y aplicarlos a operadores no diferenciables ([64], [65], [68]). Todos estos métodos de dos puntos mantienen la convergencia superlineal del método de la secante y, en general, su aproximación a la solución es más rápida a medida que aumenta λ, pero su convergencia no es cuadrática.

Otro método que sí tiene convergencia cuadrática y no utiliza derivada alguna es el método de Steffensen [38]. Se puede obtener a partir del método de Newton (4) al aproximar $F'(x_n)$ por la diferencia dividida $[x_n, x_n + F(x_n); F]$:

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1} = x_n - [x_n, x_n + F(x_n); F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0.$$

La principal ventaja de este método frente al de Newton es que no requiere evaluar la derivada. Pero, por ejemplo, si consideramos sistemas de ecuaciones, es necesario evaluar dos veces el operador F en cada paso, $F(x_n)$ y $F(x_n+F(x_n))$, para calcular la diferencia dividida. Para que tenga sentido la composición $F(x_n+F(x_n))$ es necesario trabajar con operadores definidos de un espacio de Banach en sí mismo. Este hecho limita la aplicación del método de Steffensen.

Existe una extensa bibliografía sobre el estudio del método de Steffensen en la cual se pueden encontrar algunas de las variantes y generalizaciones que se han hecho de él. Por ejemplo, en [70] se estudia el método iterativo

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1}=x_n-[x_n,g(x_n);F]^{-1}F(x_n), \quad n\geq 0,$$

donde $g:\Omega\subseteq X\to X$ es un operador continuo que tiene, al menos, un punto fijo que coincide con la solución de $F(x)=0$. La ventaja este tipo de métodos sobre los tipo secante, además de su mayor R-orden de convergencia, es que sólo necesitan un punto inicial. Pero, como ya hemos comentado, la gran desventaja es que los espacios inicial y final del operador al que se aplica han de ser el mismo.

Otro método con buenas propiedades numéricas es el introducido por V. A. Kurchatov en 1971:

$$\text{dados } x_{-1},x_0, \quad x_{n+1}=x_n-\left[x_{n-1},2x_n-x_{n-1};F\right]^{-1}F(x_n), \quad n\geq 0.$$

Se trata de un método que tiene el mismo R-orden de convergencia y eficiencia que el método de Newton [14], pero que no contiene derivadas. La aproximación de la derivada es mejor que la de la secante y viene dada por $F'(x_n)\approx[x_{n-1},2x_n-x_{n-1};F]$. Este método, al igual que los tipo secante, es un método con memoria que depende de dos puntos. Puede emplearse en el caso no diferenciable, con la ventaja de que su R-orden de convergencia es mayor respecto a los tipo secante. Por contra, respecto a éstos, necesita una exigencia más y es que, dados $x,y\in\Omega$, ha de cumplirse $2x-y\in\Omega$ para poder aplicar el algoritmo. Esto tiene gran influencia en la búsqueda de puntos de salida, a menos que $\Omega=X$.

Otra manera de abordar situaciones no diferenciables es descomponer el operador F en dos partes, de la forma

$$F(x)=G(x)+H(x),$$

donde $G,H:\Omega\subseteq X\to Y$, G es un operador diferenciable y H es un operador continuo pero no diferenciable.

Han sido varios los autores que han aportado soluciones a este problema considerando procesos iterativos como los siguientes:

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1}=x_n-[G'(x_n)]^{-1}(G(x_n)+H(x_n)), \quad n\geq 0,$$

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1}=x_n-[A(x_n)]^{-1}(G(x_n)+H(x_n)), \quad n\geq 0,$$

donde A es un operador lineal que aproxima a G'.

Núm. 26 (2014), pp. 165-200
ISSN 1131-5423
Zubía Monográfico

Considerando una situación mixta respecto a las técnicas anteriores, E. Catinas estudió el proceso iterativo

$$\text{dados } x_{-1}, x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \left[G'(x_n) + \left[x_{n-1}, x_n; H\right]\right]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0.$$

Nosotros generalizamos esta situación usando la familia de procesos iterativos [71]

$$\begin{cases} \text{dados } x_{-1}, x_0, \\ y_n = \lambda x_n + (1-\lambda) x_{n-1}, \quad \lambda \in [0,1), \\ x_{n+1} = x_n - [G'(x_n) + [y_n, x_n; H]]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

que contiene al método de Catinas ($\lambda = 0$) y permite aproximar la solución más rápidamente. El inconveniente respecto a la familia (14) es que, en cada paso, tenemos que evaluar la derivada $G'(x_n)$, pero tiene la ventaja de que aumenta la velocidad de convergencia.

Siguiendo en esta línea y con objeto de reunir todas las mejoras anteriormente conseguidas, hemos considerado el siguiente proceso iterativo de tipo Kurchatov:

$$\text{dados } x_{-1}, x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \left[G'(x_n) + \left[x_{n-1}, 2x_n - x_{n-1}; H\right]\right]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0,$$

y estudiado su convergencia semilocal [72].

Notemos que todos los métodos de dos puntos anteriormente descritos se pueden expresar mediante la forma

$$\text{dados } x_{-1}, x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \left[A(x_{n-1}, x_n)\right]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde $A(x,y) \in \mathcal{L}(\Omega, Y)$ es una aproximación de F'. Esto nos ha permitido hacer un estudio unificado de la convergencia semilocal de todos ellos ([5], [6], [73]).

Por último, hemos extendido el proceso Moser-Ulm, para evitar el cálculo de inversos, al caso no diferenciable. Para ello, hemos considerado el algoritmo

$$\begin{cases} \text{dados } x_{-1}, x_0, \\ x_{n+1} = x_n - B_n F(x_n), \\ B_{n+1} = 2B_n - B_n A(x_n, x_{n+1}) B_n, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde $B_0, A(x,y) \in \mathcal{L}(\Omega, Y)$. En este caso, $A(x,y)$ puede ser una aproximación de F' de las anteriormente citadas. Cabe destacar que, de esta forma, conseguimos evitar tanto el cálculo de la derivada como el del inverso. Además, siguiendo en la línea anterior, hemos abordado el estudio, tanto por separado como conjunto, de diferentes aproximaciones [2].

3. PROCESOS ITERATIVOS CON *R*-ORDEN DE CONVERGENCIA ALTO

Alguno de los métodos iterativos con convergencia cúbica más conocidos son el método de Halley [24], el método de Chebyshev [49], el método super-Halley [22] y el método de Euler, también conocido como método de Cauchy [30].

En [53] obtenemos una caracterización de métodos iterativos de tipo Newton en espacios de Banach con R-orden de convergencia al menos tres. Este trabajo forma parte de la tesis doctoral de N. Romero [90], en la que se plantea, entre otros objetivos, el estudio de su convergencia semilocal y la obtención de dominios de existencia y unicidad de solución y de cotas a priori del error cometido por los procesos iterativos que se construyen. Más concretamente, atendiendo a las expresiones que tienen los procesos iterativos más conocidos con R-orden al menos tres, se construye una familia multiparamétrica de procesos iterativos tipo Newton

$$\begin{cases} \text{dado } x_0, \\ x_{n+1} = x_n - H\big(L_F(x_n)\big)[F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \\ H\big(L_F(x_n)\big) = I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + \sum_{k\geq 2} A_k L_F(x_n)^k, \quad A_k \in \mathbb{R}^+, \quad k \geq 2, \end{cases} \tag{15}$$

que incluye los procesos iterativos más conocidos con R-orden de convergencia al menos cúbico. Hemos realizado un análisis de la convergencia semilocal de la familia (15), usando la técnica de relaciones de recurrencia bajo las condiciones de Kantorovich (i)–(iii) y una condición Lipschitz para F''. Posteriormente, en [33], se demuestra que la condición Lipschitz para F'' puede suprimirse para establecer la convergencia semilocal de (15).

Con el objetivo de abarcar un conjunto amplio de operadores no lineales, en [52] se realiza un análisis de la convergencia de la familia (15), bajo condiciones más suaves para el operador F. En particular, se modifica la condición Lipschitz para F'' por una condición ω-condicionada del tipo (13), que generaliza las situaciones anteriores. Se analiza la convergencia mediante relaciones de recurrencia y se prueba que la familia de procesos iterativos converge con al menos R-orden de convergencia dos. Como caso particular de esta suavización, cuando ω es cuasihomogénea de orden q, $\omega(tz) \leq t^q\omega(z)$, con $t \in [0,1]$ y $q \geq 0$, se obtiene R-orden de convergencia al menos $2+q$ [55].

Como ya hemos indicado anteriormente, una situación que aparece frecuentemente en la resolución de ecuaciones integrales no lineales es que el operador F'' no esté acotado. Este problema se solventa suavizando las condiciones de Kantorovich al exigir que el operador F'' esté acotado sólo en la aproximación inicial. En este caso, bajo condiciones Lipschitz para F'' en [58] y ω-condicionada para F'' en [56], se establecen resultados de convergencia semilocal para la familia (15), así como dominios de existencia y unicidad de solución y estimaciones a priori y a posteriori del error.

En el caso particular de ecuaciones cuadráticas, la construcción de una familia de procesos iterativos con alto R-orden de convergencia nos lleva a la incursión en la Teoría de Números. En particular, a un problema combinatorio, al aparecer ciertos coeficientes conocidos como números de Catalan C_k en la familia de procesos iterativos dada por la función

$$H_q(x) = \sum_{k=0}^{q-2} A_k x^k, \quad A_k = \frac{C_k}{2^k}, \quad C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}, \quad k \geq 0,$$

Núm. 26 (2014), pp. 165–200 | Zubía
ISSN 1131-5423 | Monográfico

que tiene R-orden de convergencia prefijado $q \geq 4$ (véanse [30], [32], [54], [57]). En el estudio dinámico de esta familia de procesos iterativos [42] se resuelven algunos interrogantes planteados en trabajos anteriores y se dejan abiertas, a modo de conjeturas, nuevas cuestiones e identidades relacionadas con los números de Catalan, que posteriormente son resueltas en [84] y [85].

Por otra parte, hemos visto en la sección 2.7 que una forma de mejorar la eficiencia de un método iterativo con R-orden de convergencia al menos tres consiste en construir métodos iterativos multipaso que mantengan el coste operacional del método iterativo original. Una forma de hacerlo es aproximar el operador derivada segunda de un proceso iterativo de R-orden de convergencia tres mediante combinaciones de derivadas primeras. Veamos un ejemplo. Consideramos el conocido método de Chebyshev [49], cuyo R-orden de convergencia es al menos tres:

$$\begin{cases} \text{dado } x_0, \\ y_n = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}L_F(x_n)(y_n - x_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde $L_F(x)$ es el operador lineal

$$L_F(x) = F'(x)^{-1}F''(x)F'(x)^{-1}F(x).$$

A partir de la fórmula de Taylor, tenemos

$$F'(z_n) \approx F'(x_n) + F''(x_n)(z_n - x_n),$$

donde $z_n = x_n + \theta(y_n - x_n)$ y $\theta \in (0,1]$. Entonces, escribimos la aproximación

$$L_F(x_n) \approx \frac{1}{\theta}\Gamma_n[F'(x_n) - F'(z_n)]$$

y obtenemos la siguiente familia de procesos iterativos multipaso con R-orden de convergencia al menos tres:

$$\begin{cases} \text{dado } x_0, \\ y_n = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \\ z_n = x_n + \theta(y_n - x_n), \\ P(x_n, z_n) = \frac{1}{\theta}[F'(x_n)]^{-1}[F'(x_n) - F'(z_n)], \\ x_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}P(x_n, z_n)(y_n - x_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Este tipo de aproximaciones han sido estudiadas en [49], [50] y [51].

4. MÉTODOS ITERATIVOS HÍBRIDOS

En esta sección vamos a hacer hincapié en uno de los problemas más importantes a la hora de analizar la utilización de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales: la obtención de aproximaciones iniciales (puntos de salida) suficientemente buenas para que los métodos iterativos sean convergentes al empezar en ellas. El conjunto de estas aproximaciones iniciales es lo que permite conocer la accesibilidad de un método iterativo. Tal y como hemos dicho en la sección 2.4, podemos observar la accesibilidad del método iterativo de forma experimental y/o de forma teórica.

Si centramos nuestra atención en la visión teórica de la accesibilidad de los métodos iterativos y, en particular, en los resultados de convergencia semilocal, su principal problema es que no es sencillo localizar puntos de salida para los métodos iterativos que satisfagan las condiciones de convergencia impuestas y, a partir de los cuales, esté asegurada su convergencia al empezar en ellos.

El grupo de investigación PRIENOL ha ideado un procedimiento para resolver el problema anterior, que consiste en utilizar métodos iterativos híbridos de tipo predictor-corrector. Estos métodos facilitan la aplicación de un método iterativo, llamado corrector, a partir de la aplicación de otro método iterativo, llamado predictor, que permite localizar puntos de salida a partir de los cuales la convergencia del método corrector está asegurada. La idea básica es aplicar, hasta una cierta aproximación N_0, un método iterativo con R-orden de convergencia bajo pero con buen dominio de puntos de salida y utilizar después esta iteración como punto inicial para un método iterativo con mayor velocidad de convergencia. La clave está en el valor N_0, que juega un papel fundamental en la construcción de estos métodos iterativos híbridos.

Como es bien sabido, cuanto mayor es el R-orden de convergencia de un método iterativo, más restrictivas son las condiciones de convergencia que hay que imponer a los puntos de salida del método [34]. Así, para la construcción de métodos iterativos híbridos, tenemos en cuenta que el método iterativo predictor tiene menor R-orden de convergencia que el método iterativo corrector. Esto conlleva a que las condiciones de convergencia que hay que imponer sean menos exigentes, de manera que sea más fácil encontrar puntos de salida válidos para el método iterativo corrector. Así aprovechamos la mayor velocidad de convergencia, que es otra de las características importantes de los métodos iterativos.

Varios trabajos de investigación han sido publicados por el grupo de investigación PRIENOL en los que se han construido métodos iterativos híbridos de este tipo. La idea original fue construir un algoritmo de la forma

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{dado } x_0,\\ x_n = G_1(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots,N_0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}z_0 = x_{N_0},\\ z_n = G_2(z_{n-1}),\ n \in \mathbb{N},\end{array}\right.\end{array}\right.$$

a partir de dos método iterativos punto a punto cualesquiera

$$\left\{\begin{array}{l}\text{dado } x_0,\\ x_n = G_1(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N},\end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{dado } z_0,\\ z_n = G_2(z_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}.\end{array}\right.$$

Núm. 26 (2014), pp. 165-200
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

Los algoritmos así construidos se denominan métodos iterativos híbridos y los denotamos por (G_1, G_2).

En [27] se construye un método iterativo híbrido donde G_1 es el método de Newton (R-orden de convergencia al menos dos) y G_2 es el método de tercer orden de Chebyshev, viendo que éste converge siempre que lo hace aquél para una elección adecuada de N_0. Siguiendo en esta línea, en [34] generalizamos lo anterior y tomamos como G_2 un método iterativo cualquiera de tercer orden, probando a continuación que el dominio de parámetros del método híbrido (G_1, G_2) es el mismo que el del método de Newton para una elección adecuada de N_0. Así, obtenemos métodos híbridos que tienen el mismo dominio de parámetros que un método iterativo de segundo orden y con R-orden de convergencia al menos tres a partir de la iteración N_0, lo que permite aumentar el dominio de puntos de salida para la aplicación del método de tercer orden. Estos métodos iterativos híbridos se usan en [35] para resolver ecuaciones integrales no lineales de tipo Fredholm.

En [28] mejoramos lo realizado en [27] al obtener métodos iterativos multipunto con R-orden de convergencia al menos tres, como modificaciones del método de Chebyshev, con mejor eficiencia computacional que éste, y utilizarlos después como métodos iterativos correctores en la construcción de métodos híbridos que usan el método de Newton como predictor. Otro trabajo que va en esta misma línea es [9], donde se combina el método de Newton (predictor) con un método iterativo multipunto con R-orden de convergencia al menos cinco (corrector).

Ahora bien, como la aplicación de los métodos iterativos punto a punto pasa por evaluaciones de derivadas del operador implicado en cada paso de iteración, bien porque éstas sean costosas de evaluar o porque no existan, son especialmente interesantes los métodos iterativos que no utilizan derivadas. Para solventar el problema anterior, ya hemos visto que es frecuente aproximar las derivadas del operador implicado en la ecuación a resolver. Así, habitualmente se suele aproximar la derivada del operador por una diferencia dividida de primer orden, dando lugar a métodos iterativos que utilizan diferencias divididas en vez de derivadas.

En general, hemos considerado métodos iterativos con memoria de la forma

$$\begin{cases} \text{dados } x_{1-i}, x_{2-i}, \ldots, x_0, \ i \in \mathbb{N}, \\ x_n = \psi(x_{n-1}; x_{n-2}, \ldots, x_{n-i}), \ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

donde el operador ψ está definido mediante diferencias divididas sin utilizar derivadas, y cuyo interés a la hora de resolver una ecuación no lineal radica precisamente en que las derivadas del operador no aparecen en los correspondientes algoritmos.

El objetivo es entonces construir algoritmos de la forma

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{dados } x_{1-i}, x_{2-i}, \ldots, x_0, \ i \in \mathbb{N}, \\ x_n = \psi_1(x_{n-1}; x_{n-2}, \ldots, x_{n-i}), \ n = 1, 2, \ldots, N_0, \end{cases} \\ \begin{cases} z_{1-i} = x_{N_0}, z_{2-i} = x_{N_0+1}, \ldots, z_0 = x_{N_0+i-1}, \\ z_n = \psi_2(z_{n-1}; z_{n-2}, \ldots, z_{n-i}), \ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \end{cases}$$

a partir de dos métodos iterativos con memoria cualesquiera

$$\begin{cases} \text{dados } x_{1-i}, x_{2-i}, \ldots, x_0, \; i \in \mathbb{N}, \\ x_n = \psi_1(x_{n-1}; x_{n-2}, \ldots, x_{n-i}), \; n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{dados } z_{1-i}, z_{2-i}, \ldots, z_0, \; i \in \mathbb{N}, \\ z_n = \psi_2(z_{n-1}; z_{n-2}, \ldots, z_{n-i}), \; n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

donde los operadores ψ_1 y ψ_2 están definidos mediante diferencias divididas, sin utilizar derivadas. Los métodos híbridos así construidos los representamos ahora por (ψ_1, ψ_2).

Varios trabajos de investigación relacionados con este tipo de algoritmos han sido publicados por el grupo de investigación PRIENOL. En [4] y [36] consideramos una familia de métodos de tipo secante con R-orden de convergencia superlineal, como método iterativo corrector ψ_2, y el método simplificado de la secante, que tiene R-orden de convergencia lineal, como método iterativo predictor ψ_1.

Como uno de los principales intereses del grupo de investigación PRIENOL ha sido siempre el de aumentar la velocidad de convergencia de los métodos iterativos, en [29], [37] y [38] hemos analizado métodos híbridos que tienen como corrector el método de Steffensen, cuyo R-orden de convergencia es al menos dos y tiene la misma eficiencia computacional que el método de Newton, combinado con tres métodos de convergencia lineal como métodos predictores. En particular, el método simplificado de Newton en [37], el método simplificado de la secante en [38] y el método simplificado de Steffensen en [29]. La diferencia principal estriba en que, en [37], se requiere que el operador implicado en la ecuación a resolver sea diferenciable, mientras que no en [29] y [38]. En [29], conseguimos además que el método iterativo híbrido allí construido tenga las mismas eficiencia computacional y accesibilidad que el método de Newton, con la ventaja añadida de que se puede aplicar a la resolución de ecuaciones no lineales con operadores no diferenciables.

La construcción de métodos iterativos híbridos (ψ_1, ψ_2) se ha visto además reflejada en la tesis doctoral de A. I. Velasco [95], donde se profundiza en la mejora de dominios de puntos de salida para métodos iterativos que no utilizan derivadas.

5. MISCELÁNEA

Dedicamos esta última sección a mostrar algunos resultados relacionados con distintos métodos iterativos. También presentamos algunos trabajos resultantes de aplicaciones de los métodos iterativos a problemas y situaciones concretos, así como otros de corte divulgativo.

- **Ecuaciones diferenciales e integrales.** Los desarrollos y métodos mencionados en este artículo pueden emplearse en el estudio de ecuaciones diferenciales e integrales. Son numerosos los trabajos que el grupo PRIENOL ha realizado en los que aparece como aplicación numérica una ecuación integral o un problema que involucra ecuaciones diferenciales (véanse [15], [30], [55] y las referencias que allí aparecen). Este tipo de ecuaciones surgen en diversos problemas físicos (transferencia radiactiva, cinética de gases, etc.). Así, por ejemplo, en [35] se hace una análisis de la convergencia de una familia de métodos iterativos con alto R-orden de convergencia, en el que las condiciones de convergencia se adaptan bien al problema de aproximar la solución de determinadas ecuaciones integrales de tipo Fredholm, como (9). Generalmente, en el análisis de la convergencia usamos una variante del teorema de Newton-Kantorovich para probar la existencia y unicidad de una solución de la ecuación y garantizar la convergencia a dicha solución. La estrategia consiste en escribir la ecuación correspondiente en términos de ecuaciones definidas en espacios de Banach y, a partir de una función inicial adecuada, cumplir las condiciones impuestas en los resultados de convergencia. Este proceso conduce a regiones donde existe la solución de la ecuación y donde es única. Una vez probada la existencia de una solución, ésta se aproxima numéricamente. Para ello, habitualmente transformamos el problema continuo en un problema discreto utilizando una fórmula de derivación o integración numérica, llegando así a un sistema de ecuaciones no lineales que resolvemos con un método iterativo. Las incógnitas son los valores aproximados de la solución en una serie de puntos del intervalo considerado. Finalmente, a partir de ellos y mediante un proceso de interpolación, obtenemos una aproximación de la solución.

- **Manipuladores paralelos.** En [87] se ha colaborado con un grupo de ingenieros de la Universidad del País Vasco para dar un fundamento matemático a un proceso iterativo-geométrico que surge al resolver las ecuaciones de posición en ciertos problemas de manipuladores paralelos (plataformas articuladas). Junto a los aspectos más puramente ingenieriles del problema aparece un estudio matemático de la convergencia del proceso y su eficiencia computacional.

- ***Gauss-Seidelizaciones.*** En [47] se realiza un estudio numérico y gráfico de un nuevo procedimiento bautizado como *Gauss-Seidelización* de un proceso iterativo. En líneas muy generales consiste en aplicar una variante del método de Gauss-Seidel, un proceso iterativo muy conocido en el campo de la resolución numérica de ecuaciones lineales, a una ecuación no lineal definida en el plano complejo. El trabajo tiene conexiones con la geometría fractal, mostrando una clara influencia del proceso en la dimensión fractal y en la forma de las cuencas de atracción de las raíces buscadas.

- **La ecuación de Kepler.** En la tesis doctoral de M. A. Diloné [10] se aplican diversos procesos iterativos a la ecuación de Kepler $E = e\,\mathrm{sen}\,E + M$, donde los datos e y M son la excentricidad y la anomalía media de un planeta, respectivamente, y la incógnita E es la anomalía excéntrica del planeta. Esta ecuación es una de las más conocidas en matemáticas debido a sus conexiones con la Mecánica Celeste. En este trabajo se considera dicha ecuación como elemento común para comparar y estudiar el comportamiento de una gran variedad de procesos iterativos para resolver ecuaciones no lineales.

- **Estudio dinámico de procesos iterativos.** El grupo de investigación PRIE-

NOL ha publicado varios trabajos en los que se estudian las dinámicas en el plano complejo de variantes del método de Newton, así como de procesos iterativos de alto R-orden de convergencia. Por ejemplo, en [44], [48] y [76] se realiza un análisis cualitativo de las propiedades de la familia (15) en el plano complejo extendido, $\mathbb{C}_\infty$, desde un punto de vista numérico y dinámico, siguiendo la teoría ya existente sobre funciones iterativas racionales de variable compleja. En particular, se prueba que estos procesos iterativos tienen *convergencia general*, concepto introducido por Smale en [92] y que más tarde fue generalizado por McMullen en [83].

Otro método iterativo analizado desde el punto de vista dinámico es el de Chebyshev. En la tesis doctoral de M. García-Olivo [39] se estudian las principales propiedades dinámicas de este método, en sus versiones real y compleja, y se analizan con detalle las funciones racionales que resultan al aplicar el método a polinomios de grado prefijado. Se prueba la existencia de puntos fijos extraños, es decir, puntos a los que el método converge pero que no son soluciones de la ecuación considerada. Finalmente, pueden encontrarse otros trabajos sobre dinámica en [1], [8], [45], [80], [81], [82] y [89].

- **Artículos divulgativos.** La divulgación de la investigación es un tema que está cobrando cada vez más peso entre la comunidad científica. No ajenos a esta tendencia, el grupo de investigación PRIENOL también se ha preocupado por realizar publicaciones dirigidas a un público no necesariamente especializado, donde su presentan algunos desarrollos históricos, técnicas, resultados y aplicaciones relacionadas con su investigación. De entre ellas destacamos los trabajos [16], [17] y [18].

REFERENCIAS

[1] S. Amat, S. Busquier y Á. A. Magreñán, Reducing chaos and bifurcations in newton-type methods, *Abst. Appl. Math.*, Article ID 726701 (2013).

[2] S. Amat, M. A. Hernández y M. J. Rubio, Una modificación del método de la secante aplicada al problema de Lorenz, *XXI CEDYA / XI CMA*, Ciudad Real, 2009. Disponible en `http://matematicas.uclm.es/cedya09/archive/textos/195_Hernandez-Veron-M.pdf`

[3] S. Amat, Á. A. Magreñán y N. Romero, On a two-step relaxed Newton-type method, *Appl. Math. Comput.* **219** (2013), n.º 24, 11341–11347.

[4] I. K. Argyros, J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, S. Hilout, N. Romero y A. I. Velasco, Expanding the applicability of secant-like methods for solving nonlinear equations, aceptado para su publicación en *Carpathian J. Math.* Disponible en `http://carpathian.ubm.ro`

[5] I. K. Argyros, D. González y Á. A. Magreñán, A semilocal convergence for a uniparametric family of efficient secant-like methods, *J. Func. Spac.*, Article ID 467980 (2014).

[6] I. K. Argyros, D. González y Á. A. Magreñán, Majorizing sequences for Newton's method under centred conditions for the derivative, *Int. J. Comp. Math.*, `http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2014.880782`

[7] I. K. Argyros, J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán y N. Romero, Convergence of the relaxed Newton's method, *J. Kor. Math. Soc.* **51** (2014), n.º 1, 137–162.

[8] F. Chicharro, A. Cordero, J. M. Gutiérrez y J. R. Torregrosa, Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* **219** (2013), 7023–7035.

[9] A. Cordero, J. A. Ezquerro, M. A. Hernández-Verón y J. R. Torregrosa, On the local convergence of a fifth-order iterative method in Banach spaces, enviado para su publicación.

[10] M. A. Diloné, *Métodos iterativos aplicados a la ecuación de Kepler*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2013. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=37843`

[11] J. A. Ezquerro, *Construcción de procesos iterativos mediante aceleraciones del método de Newton*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 1996. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=14`

[12] J. A. Ezquerro, D. González y M. A. Hernández, Majorizing sequences for Newton's method from initial value problems, *J. Comput. Appl. Math.* **236** (2012), 2246–2258.

[13] J. A. Ezquerro, D. González y M. A. Hernández, On the local convergence of Newton's method under generalized conditions of Kantorovich, *Appl. Math. Lett.* **26** (2013), 566–570.

[14] J. A. Ezquerro, A. Grau, M. Grau-Sánchez y M. A. Hernández, On the efficiency of two variants of Kurchatov's method for solving nonlinear systems, *Numer. Algor.* **64** (2013), n.º 4, 685–698.

[15] J. A. Ezquerro, M. Grau-Sánchez, A. Grau, M. A. Hernández, M. Noguera y N. Romero, On iterative methods with accelerated convergence for solving systems of nonlinear equations, *J. Optim. Theory Appl.* **151** (2011), 163–174.

[16] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández, N. Romero y M. J. Rubio, Relaciones de recurrencia en el método de Newton-Kantorovich, *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez* (L. Lambán, A. Romero y J. Rubio, Eds.), pp. 319–333, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2009.

[17] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández, N. Romero y M. J. Rubio, El método de Newton: de Newton a Kantorovich, *La Gaceta de la RSME* **13** (2010), n.º 1, 53–76.

[18] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández y M. A. Salanova, El método de Halley: posiblemente el método más redescubierto del mundo,

Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández (L. Español y J. L. Varona, Eds.), pp. 205–220, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2001.

[19] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, A note on a family of Newton type iterative methods, *Intern. J. Computer Math.* **62** (1996), n.º 3-4, 223–232.

[20] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, Different acceleration procedures of Newton's method, *Novi Sad J. Math.* **27** (1997), n.º 1, 1–17.

[21] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, Region of accessibility for a class of Newton-type iterations, *Proyecciones* **17** (1998), n.º 1, 71–76.

[22] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, A modification of the Super-Halley method under mild differentiability conditions, *J. Comput. Appl. Math.* **114** (2000), n.º 2, 405–409.

[23] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, Generalized differentiability conditions for Newton's method, *IMA J. Numer. Anal.* **22** (2002), 187–205.

[24] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, On the *R*-order of the Halley method, *J. Math. Anal. Appl.* **303** (2005), n.º 2, 591–601.

[25] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, The Newton method for Hammerstein equations, *J. Comput. Anal. Appl.* **7** (2005), 437–446.

[26] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, The Ulm method under mild differentiability conditions, *Numer. Math.* **109** (2008), 193–207.

[27] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, An improvement of the region of accessibility of Chebyshev's method from Newton's method, *Math. Comp.* **78** (2009), 1613–1627.

[28] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, An optimization of Chebyshev's method, *J. Complexity* **25** (2009), 343–361.

[29] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, How to improve the domain of starting points for Steffensen's method, *Stud. Appl. Math.* **132** (2014), n.º 4, 354–380.

[30] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández y N. Romero, A modification of Cauchy's method for quadratic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **339** (2008), 954–969.

[31] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández y N. Romero, Newton-type methods of high order and domains of semilocal and global convergence, *App. Math. Comp.* **214** (2009), 142–154.

[32] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández y N. Romero, An extension of Gander's result for quadratic equations, *J. Comput. Appl. Math.* **234** (2010), 960–971.

[33] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández y N. Romero, Newton-like methods for operators with bounded second Fréchet derivative, *Monografías del Seminario Matemático García Galdeano* **35** (2010), 137–144.

[34] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández y N. Romero, On some one-point hybrid iterative methods, *Nonlinear Anal.* **72** (2010), 587–601.

[35] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández y N. Romero, Solving nonlinear integral equations of Fredholm type with high order iterative methods, *J. Comput. Appl. Math.* **236** (2011), 1449–1463.

[36] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, N. Romero y A. I. Velasco, Improving the domain of starting points for secant-like methods, *Appl. Math. Comp.* **219** (2012), 3677–3692.

[37] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, N. Romero y A. I. Velasco, On Steffensen's method on Banach spaces, *J. Comput. Appl. Math.* **249** (2013), 9–23.

[38] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, M. J. Rubio y A. I. Velasco, An hybrid method that improves the accessibility of Steffensen's method, *Numer. Algor.* **66** (2014), n.º 4, 241–267.

[39] M. García-Olivo, *El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2013. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=37844`

[40] D. González, *Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2012. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=24837`

[41] J. M. Gutiérrez, *El método de Newton en espacios de Banach*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 1995. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=10`

[42] J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández, P. J. Miana y N. Romero, New identities in the Catalan triangle, *J. Math. Anal. Appl.* **341** (2008), 52–61.

[43] J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández y N. Romero, A note on a modification of Moser's method, *J. Complexity* **24** (2008), 185–197.

[44] J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández y N. Romero, Dynamics of a new family of iterative processes for quadratic polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2010), 2688–2695.

[45] J. M. Gutiérrez, L. J. Hernández-Paricio, M. Marañón-Grandes y M. T. Rivas-Rodríguez, Influence of the multiplicity of the roots on the basins of attraction of Newton's method, *Numer. Algor.* **66** (2014), 431–455.

[46] J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán y N. Romero, On the semilocal convergence of Newton-Kantorovich method under center-Lipschitz conditions, *Appl. Math. Comput.* **221** (2013), 79–88.

[47] J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán y J. L. Varona, The "Gauss-Seidelization" of iterative methods for solving nonlinear equations in the complex plane, *Appl. Math. Comput.* **218** (2011), 2467–2479.

[48] J. M. Gutiérrez, S. Plaza y N. Romero, Dynamics of a fifth-order iterative method, *Intern. J. Comput. Math.* **89** (2012), 822–835.

[49] M. A. Hernández, Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations. *J. Optim. Theory Appl.* **104** (2000), 501–515.

[50] M. A. Hernández, Chebyshev's approximation algorithms and applications, *Comput. Math. Appl.* **41** (2001), n.º 3-4, 433–445.

[51] M. A. Hernández, Chebyshev's approximation algorithms for operators with ω-conditioned first derivative, *J. Comput. Appl. Math.* **9** (2007), 93–101.

[52] M. A. Hernández y N. Romero, On a new multiparametric family of Newton-like methods, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.* **1** (2004), n.º 1-3, 3–13.

[53] M. A. Hernández y N. Romero, On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three, *J. Comput. Appl. Math.* **183** (2005), 53–66.

[54] M. A. Hernández y N. Romero, Accelerated convergence in Newton's method for approximating square roots, *J. Comput. Appl. Math.* **177** (2005), 225–229.

[55] M. A. Hernández y N. Romero, General study of iterative processes of R-order at least three under weak convergence conditions, *J. Optim. Theory Appl.* **133** (2007), 163–177.

[56] M. A. Hernández y N. Romero, Application of iterative processes of R-order at least three to operators with unbounded second derivative, *Appl. Math. Comput.* **185** (2007), 737–747.

[57] M. A. Hernández y N. Romero, Methods with prefixed order for approximating square roots with global and general convergence, *Appl. Math. Comput.* **194** (2007), 346–353.

[58] M. A. Hernández y N. Romero, Toward a unified theory for third R-order iterative methods for operators with unbounded second derivative, *Appl. Math. Comput.* **215** (2009), 2248–2261.

[59] M. A. Hernández y M. J. Rubio, Reduced recurrence relations for the secant method, *Monografías del Seminario Matemático García Galdeano* **20** (1999), 311–318.

[60] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A new type of recurrence relations for the secant method, *Int. J. Comput. Math.* **72** (1999), n.º 4, 477–490.

[61] M. A. Hernández y M. J. Rubio, The secant method and divided differences Hölder continuous, *Appl. Math. Comput.* **124** (2001), n.º 2, 139–149.

[62] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A modification of the Kantorovich conditions for the secant method, *Southwest J. Pure Appl. Math.* **1** (2001), 13–21.

[63] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A one-parameter family of iterative processes defined by divided differences, *Publ. Univ. Pau* **275** (2001), 475–482.

[64] M. A. Hernández y M. J. Rubio, Secant-type methods and application to nondifferentiable operators, *Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández* (L. Español y J. L. Varona, Eds.), pp. 29–35, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2001.

[65] M. A. Hernández y M. J. Rubio, Las diferencias divididas en la aproximación de raíces para operadores no diferenciables, *XVII CEDYA / VII CMA*, Salamanca, 2001. Actas en CD-ROM.

[66] M. A. Hernández y M. J. Rubio, The secant method for nondifferentiable operators, *Appl. Math. Lett.* **15** (2002), n.º 4, 395–399.

[67] M. A. Hernández y M. J. Rubio, Semilocal convergence of the secant method under mild convergence conditions of differentiability, *Comput. Math. Appl.* **44** (2002), n.º 3-4, 277–285.

[68] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations, *J. Math. Anal. Appl.* **275** (2002), n.º 2, 821–834.

[69] M. A. Hernández y M. J. Rubio, ω-conditioned divided differences to solve nonlinear equations, *Monografías del Seminario Matemático García Galdeano* **27** (2003), 323–330.

[70] M. A. Hernández y M. J. Rubio, Condiciones suaves de convergencia para semilocal para el método de Steffensen, *XVIII CEDYA / VIII CMA*, Tarragona, 2003. Actas en CD-ROM.

[71] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A modification of Newton's method for nondifferentiable equations, *J. Comput. Appl. Math.* **164/165** (2004), 409–417.

[72] M. A. Hernández y M. J. Rubio, On a Newton-Kurchatov-type iterative process, enviado para su publicación.

[73] M. A. Hernández y M. J. Rubio, Un estudio unificado de la convergencia semilocal de métodos tipo Newton de dos puntos en espacios de Banach, *XX CEDYA / X CMA*, Sevilla, 2007. Disponible en `http://congreso.us.es/cedya2007/actas/textos/159.pdf`

[74] M. A. Hernández, M. J. Rubio y J. A. Ezquerro, Secant-like methods for solving nonlinear integral equations of the Hammerstein type, *J. Comput. Appl. Math.* **115** (2000), n.º 1-2, 245–515.

[75] M. A. Hernández, M. J. Rubio y J. A. Ezquerro, Solving a special case of conservative problems by secant-like methods, *Appl. Math. Comput.* **169** (2005), n.º 2, 926–942.

[76] G. Honorato, S. Plaza y N. Romero, Dynamics of a higher-order family of iterative methods, *J. Complexity* **27** (2011), 221–229.

[77] L. V. Kantorovich, On Newton's method for functional equations, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **59** (1948), 1237–1240 (en ruso).

[78] L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, New York, 1982.

[79] Á. A. Magreñán, *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2013. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=38821`

[80] Á. A. Magreñán, Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods, *Appl. Math. Comput.* **233** (2014), 29–38.

[81] Á. A. Magreñán, A. Cordero, J. M. Gutiérrez y J. R. Torregrosa, Real qualitative behavior of a fourth-order family of iterative methods by using the convergence plane, *Math. Comput. Simul.* **105** (2014), 49–61.

[82] Á. A. Magreñán y J. M. Gutiérrez, Real dynamics for damped Newton's method applied to cubic polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, `http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.11.019`

[83] C. McMullen, Families of rationals maps and iterative root-finding algorithms, *Ann. Math.* **125** (1987), 467–493.

[84] P. J. Miana y N. Romero, Computer proofs of new identities in the Catalan triangle, *Proceedings of the "Segundas Jornadas de Teoría de Números"*, pp. 203–208, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2008.

[85] P. J. Miana y N. Romero, Moments of combinatorial and Catalan numbers, *J. Number Theory* **130** (2010), n.º 8, 1876–1887.

[86] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, Academic Press, New York, 1943.

[87] V. Petuya, J. M. Gutiérrez, A. Alonso, O. Altuzarra y A. Hernández, A numerical procedure to solve non-linear kinematic problems in spatial mechanisms, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **73** (2008), 825–843.

[88] S. Plaza y J. M. Gutiérrez, *Dinámica del método de Newton*, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2013. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=529750`

[89] S. Plaza y N. Romero, Attracting cycles for the relaxed Newton's method, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 3238–3244.

[90] N. Romero, *Familias paramétricas de procesos iterativos de alto orden de convergencia*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2006. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=548`

[91] M. J. Rubio, *Procesos iterativos definidos mediante diferencias divididas*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, Logroño, 2000.

[92] S. Smale, Newton's method estimates from data at one point, *The merging of disciplines: new directions in pure, applied, and computational mathematics (Laramie, Wyo., 1985)*, pp. 185–196, Springer, New York, 1986.

[93] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Englewood Clifss, New Jersey, 1964.

[94] J. L. Varona, Graphic and numerical comparison between iterative methods, *Math. Intelligencer* **24** (2002), n.º 1, 37–46.

[95] A. I. Velasco, *Mejoras de los dominios de puntos de salida de métodos iterativos que no utilizan derivadas*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2013. Disponible en `http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=38218`

ZUBÍA

26

9 771131 542004 00026

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto
de Estudios
Riojanos