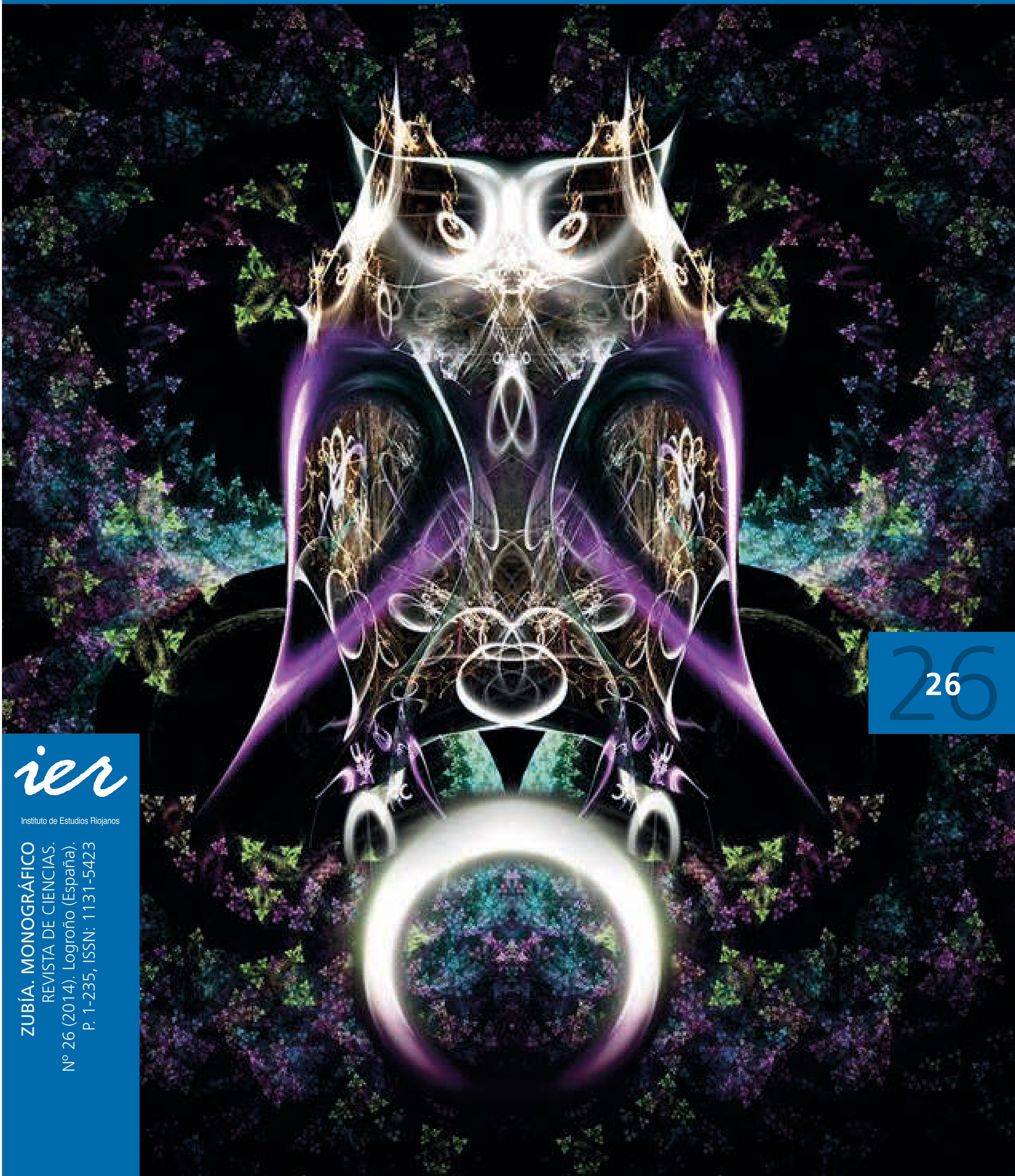
ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

MONOGRÁFICO



26

ier
Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja

Coordinadores
Óscar Ciaurri Ramírez y Luis Español González

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014
235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)
51:37.02 (460.21)

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423
Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

Zubía. Monográfico 26 221–227 Logroño 2014

REGULARIDAD DE LA FUNCIÓN MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

JAVIER PÉREZ LÁZARO[1]

RESUMEN

Tratamos algunas propiedades de la función maximal de Hardy-Littlewood en las que el autor ha realizado aportaciones a su conocimiento. Nos centraremos en cuestiones relativas a la regularidad.

Palabras clave: Función maximal de Hardy-Littlewood, regularidad.

We treat some properties of the Hardy-Littlewood maximal function in which the author has made contributions to their knowledge. We will focus on issues related to regularity.

Key words: *Hardy-Littlewood maximal function, regularity.*

1. REGULARIDAD

En este artículo expondremos, sin entrar en detalles técnicos, algunos resultados de uno de los campos de investigación en los que he trabajado: la regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood.

La regularidad es un concepto intuitivo y difuso que viene a expresar si una función tiene un gráfica suave, sin cambios bruscos (como discontinuidades) y con las oscilaciones bajo control. Así, en cierto modo, podríamos decir que la continuidad expresaría un tipo de regularidad y una función continua sería en este sentido más regular que una que no lo es. Usualmente, el concepto de regularidad de una función se asocia a que la función tenga derivada. El concepto de derivada es ampliamente conocido, sin embargo, este tipo de regularidad presenta sus peculiaridades. Por ejemplo, con que la función tenga un pico en su gráfica, ya no es derivable. Existen otros conceptos más laxos de derivada que permiten picos, como la derivada generalizada. Es más, en matemáticas se han desarrollado multitud de conceptos similares, como derivación fraccionaria, módulo de continuidad, etc.,

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: `javier.perezl@unirioja.es`

que han llevado a la definición de espacios de funciones Lipschitz, Sobolev, Besov, etc. El propósito de estos espacios es medir, en función de ciertos parámetros, el grado de regularidad de una función.

Mis primeras investigaciones, con las que realicé mi tesis doctoral, fueron supervisadas por V. I. Kolyada. En ellas estudié las relaciones entre algunos tipos de regularidad considerando funciones en varias variables con diferente grado de regularidad para cada variable. Posteriormente, uno de los temas en los que he trabajado, en colaboración con J. M. Aldaz, es el que da título a este artículo: la regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood. Antes de pasar a la siguiente sección, donde definiremos la función maximal, veremos algunos conceptos básicos para ilustrar la forma de medir tamaño en las funciones.

Sea un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son (x, y). Es fácil ver que, por el teorema de Pitágoras, la distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{x^2 + y^2}$. A esta cantidad le denotamos $||(x, y)||_2$. No obstante, si únicamente pudiéramos desplazarnos en dirección horizontal o vertical, como si estuviésemos en una ciudad con bloques rectangulares de pisos, en este caso la distancia sería $||(x, y)||_1 := |x| + |y|$. En matemáticas, dependiendo del contexto, existen otras formas comúnmente usadas para medir distancias en el plano cartesiano, como por ejemplo $||(x, y)||_\infty := \text{máx}\{|x|, |y|\}$; y, en general, para $1 \le p < \infty$, se define $||(x, y)||_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Nótese que esta definición es coherente con la $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ definidas antes.

De modo similar a como hemos visto en el plano cartesiano, también podemos medir el tamaño global de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Una forma puede ser considerar el área entre la gráfica de f y el eje de abscisas, es decir, la integral:

$$||f||_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$$

Otro modo podría ser tomar el valor más alto (o bajo) de su gráfica,

$$||f||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

También se puede emplear, para cada valor de p, $1 \le p < \infty$, la integral

$$||f||_p := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

En el caso de funciones definidas en varias variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, las integrales anteriores se entienden como integrales en varias variables. En adelante, diremos que una función f está en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si f tiene tamaño finito en el sentido de que $||f||_p < \infty$.

Núm. 26 (2014), pp. 221–227
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico


De izquierda a derecha, Godfrey H. Hardy y John E. Littlewood.

2. LA FUNCIÓN MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente integrable, se define su función maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) := \sup_{a<x<b} \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Nótese que el modo de definir la función maximal Mf en el punto x consiste en elegir intervalos cualesquiera (a,b) que contengan a x. A continuación, calcular el promedio del valor absoluto de f en dicho intervalo, es decir, la integral de $|f|$ en el intervalo, dividida por la longitud del intervalo: $\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|\,dt$. Lógicamente, para cada intervalo podría obtenerse un promedio diferente. Por último se toma el supremo de todos estos promedios.

En el caso de que tengamos una función de varias variables, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, localmente integrable, se define su función maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) := \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\,dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas n-dimensionales que contienen a x y $|B|$ denota la medida (área, volumen,… dependiendo de la dimensión) de la bola B.

Existen algunas variantes en la definición de la función maximal que no consideraremos aquí, como, por citar alguna, la función maximal centrada, en la que se exige que los intervalos o bolas (si la dimensión es mayor que uno) tengan como centro el punto x.

Hardy y Littlewood introdujeron su operador maximal en el artículo [6]. Desde entonces, este operador se ha usado ampliamente en varios contextos, como diferenciabilidad de funciones, integrales singulares y ecuaciones en derivadas parciales. Para el lector que no esté familiarizado con estos campos, diremos, a modo de ejemplo, que la función maximal de Hardy-Littlewood suele usarse en la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo de la integral de Lebesgue. Este teorema es una versión más avanzada que el que suele estudiarse en carreras técnicas, y afirma que simplemente basta la integrabilidad para que una función tenga antiderivada (no es necesaria la continuidad, como en la versión más conocida).

La utilidad de la función maximal de Hardy-Littlewood reside en sus buenas propiedades de tamaño y regularidad.

3. TAMAÑO DE LA FUNCIÓN MAXIMAL

Con respecto al tamaño, la función maximal de f es más grande que f. Es decir,

$$f(x) \leq Mf(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aquí «casi todo $x \in \mathbb{R}^n$» quiere decir, sin entrar en cuestiones técnicas, que los puntos donde Mf sea más pequeña que f forman un conjunto de medida nula. Para entendernos, que forman un conjunto suficientemente pequeño (de longitud cero, área cero, o volumen cero, en función de la dimensión) que resulta irrelevante en varios aspectos matemáticos.

Así que podemos decir que la función maximal Mf es más grande que la función f. Sin embargo, lo que la hace interesante no es únicamente que sea más grande, sino que globalmente no es mucho más grande, es comparable. Esto es, el tamaño de la función maximal supera a lo sumo en C_p veces el tamaño de f (medido en $||\cdot||_p$). Este resultado se conoce como desigualdad fuerte:

$$||Mf||_p \leq C_p ||f||_p.$$

Aquí, $1 < p \leq \infty$ y C_p es un número positivo que solo depende de p. Debido a que, salvo para funciones nulas o similares, se tiene que $||Mf||_1 = \infty$, la desigualdad fuerte no es cierta para $p = 1$, y C_p se hace cada vez más grande si p se acerca cada vez más a 1.

Sin embargo, cuando $p = 1$, la función maximal satisface la desigualdad débil:

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : Mf(y) > \alpha\}| \leq c_1 \frac{||f||_1}{\alpha} \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

Dicho informalmente con palabras, dado un nivel $\alpha > 0$, el tamaño (o medida) del conjunto de nivel (el conjunto de puntos en los que la gráfica de Mf está por encima del nivel α) no supera una cantidad directamente proporcional al tamaño de la función f ($||f||_1$) e inversamente proporcional al nivel α.

El hecho de que, como se dijo antes, Mf sea más grande que f pero, gracias a las desigualdades fuerte y débil, no mucho más grande, hace que la función maximal pueda emplearse con éxito en algunos argumentos que involucran cadenas de desigualdades.

Una de las líneas de investigación principales con respecto a la función maximal de Hardy-Littlewood consiste en encontrar los mejores valores, los más ajustados, para las constantes C_p y c_1 de las desigualdades fuerte y débil. En este sentido, una rama que ha acaparado gran interés es estudiar el comportamiento de C_p y c_1 para funciones en muchas variables. Stein y Stromberg probaron [9] que se podía elegir C_p independiente de la dimensión (número de variables). Posteriormente, J. M. Aldaz demostró en [1] que el resultado de Stein y Stromberg no se podía extender para la constante c_1 en la desigualdad débil. Para la función maximal promediando sobre cubos, c_1 tiende a infinito cuando la dimensión tiende a infinito.

Resultados en los que he participado, en los que se estima el valor de las constantes de las desigualdades fuerte y débil pueden encontrarse en [3, 4, 5]. Por ejemplo, en [4] se consideran funciones maximales definidas en ciertos espacios de medidas radiales decrecientes. Allí se prueba que, para valores pequeños de p, la constante C_p crece de modo exponencial con la dimensión.

4. REGULARIDAD DE LA FUNCIÓN MAXIMAL

Como hemos resumido en el apartado anterior, la función maximal presenta buenas propiedades en cuanto a tamaño. También es interesante estudiar las propiedades de la función maximal en cuanto a regularidad. Aquí con regularidad nos referimos a varios conceptos relacionados con la derivabilidad en un sentido amplio, como dijimos al principio de este artículo.

En particular, basta que la función f sea localmente integrable (lo que es una condición de tamaño de la función, nada tiene que ver con la derivabilidad) para que su función maximal Mf sea inferiormente semicontinua. Esta propiedad, aunque muy débil, permite la descomposición de los conjuntos de nivel de la función maximal en cubos diádicos, lo que es la base de la descomposición de Calderón-Zygmund, muy usada en Análisis Armónico.

Sin embargo, las cuestiones relativas a la regularidad de la función maximal no son, en general, sencillas. Si recordamos, en la definición de $Mf(x)$ se emplean dos pasos. En el primero se elige un intervalo (o bola si la función f es de varias variables) que contiene a x y se toma el promedio de $|f|$ en dicho intervalo o bola. El tomar promedio es una acción que tiende a regularizar, a suavizar los resultados, a eliminar picos. Así, el promedio de una función debería presentar mejores propiedades de regularidad que la función misma. En cambio, en el segundo paso para definir $Mf(x)$ se toman supremos, que es una acción que puede romper la regularidad. Sirva como ejemplo el hecho de que el supremo de funciones continuas puede ser una función con discontinuidades. En consecuencia, ver en qué contextos Mf iguala o mejora la regularidad de f no es una tarea fácil.

Con respecto a derivación, el estudio de las propiedades de la función maximal es relativamente reciente. Fue iniciado por Juha Kinnunen en [7], donde demuestra que si f y sus derivadas parciales generalizadas están en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con

$1 < p \leq \infty$, entonces su función maximal también tiene derivadas generalizadas que están en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Desde entonces se han publicado varios trabajos relacionados con este tema. Todos ellos consideran derivadas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1$, entre otros motivos porque para $p = 1$, como se dijo en la sección anterior, la desigualdad fuerte no es cierta. Tanaka [10] consideró el caso de funciones de una sola variable real. Allí probó que si una función tiene derivada generalizada en $L^1(\mathbb{R})$, entonces Mf también y se cumple

$$||D(Mf)||_1 \leq 2||Df||_1.$$

En la fórmula anterior Df denota derivada generalizada de f y $D(Mf)$ la derivada generalizada de la función maximal.

De entre los artículos sobre regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewod en los que he participado, destaco [2]. En este artículo mejoramos el resultado de Tanaka. Consideramos funciones de una variable que sean de variación acotada. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su variación es, por definición,

$$V(f) := \sup_{k \in \mathbb{N};\, t_1 < t_2 < \ldots < t_k} \sum_{i=1}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Dicho de modo informal, la variación viene a expresar las acumulación de las oscilaciones en altura de la gráfica de la función. Decimos que f es de variación acotada si $V(f) < \infty$. Nótese que la variación acotada es un concepto de regularidad bastante débil. En particular, no es necesario que exista la derivada, incluso la función podría ser discontinua y tener saltos en varios puntos. En [2] probamos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de variación acotada, entonces Mf es absolutamente continua, por tanto tiene derivada generalizada, y además se cumple

$$||D(Mf)||_1 \leq V(f).$$

Para finalizar querría destacar que la extensión del resultado de Tanaka en [10] a la función maximal centrada ha sido realizada recientemente por Kurka [8]. No obstante, cabe preguntarse si es posible extender el resultado de Tanaka, y por ende el nuestro en [2], a funciones de varias variables. A día de hoy, y hasta donde sabe el autor, esta cuestión permanece abierta.

REFERENCIAS

[1] J. M. Aldaz, The weak type $(1,1)$ bounds for the maximal function associated to cubes grow to infinity with the dimension, *Ann. of Math. (2)* **173** (2011), 1013–1023.

[2] J. M. Aldaz y J. Pérez Lázaro, Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 2443–2461.

[3] J. M. Aldaz y J. Pérez Lázaro, The best constant for the centered maximal operator on radial decreasing functions, *Math. Inequal. Appl.* **14** (2011), 173–179.

[4] J. M. Aldaz y J. Pérez Lázaro, Behavior of weak type bounds for high dimensional maximal operators defined by certain radial measures, *Positivity* **15** (2011), 199–213.

[5] J. M. Aldaz y J. Pérez Lázaro, On high dimensional maximal operators, *Banach J. Math. Anal.* **7** (2013), 225–243.

[6] G. H. Hardy y J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math.* **54** (1930), 81–116.

[7] J. Kinnunen, The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function, *Israel J. Math.* **100** (1997), 117–124.

[8] O. Kurka, On the variation of the Hardy-Littlewood maximal function, `http://arxiv.org/abs/1210.0496v2`

[9] E. M. Stein y J. O. Stromberg, Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n, *Ark Mat.* **21** (1983), 259–269.

[10] H. Tanaka, A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function, *Bull. Austral. Math. Soc.* **65** (2002), 253–258.

ZUBÍA

26

9 771131 542004 00026

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto de Estudios Riojanos