ISSN 0717-9103
ISSN Online 0718-8307
Universidad del Bío-Bío

PROPUESTA PARA EVALUAR LA CAPACIDAD DE PROCESOS DE MANUFACTURA MULTIVARIADOS

PROPOSAL FOR ASSESSING THE CAPABILTY OF MANUFACTURING PROCESSES MULTIVARIATE

Guillermo Cuamea Cruz[1,♦] Manuel Alberto Rodriguez Medina[2]

RESUMEN

Los productos manufacturados hoy en día poseen varias características de calidad que son importantes para el cliente y cuando no están correlacionadas, se usan varios índices de capacidad, tales como el Cp, Cpk y Cpm para evaluar la habilidad que tiene el proceso de producir productos de calidad. Para el caso contrario, se encontró en la revisión de literatura, índices de capacidad propuestos para medir la capacidad de un proceso cuando las características de calidad están correlacionadas. La mayoría de las propuestas coinciden en que debe definirse una región de especificación que represente lo que el cliente desea y otra región de variación del proceso que muestre el desempeño que tiene el proceso. Adicionalmente, como resultados de la revisión anterior, se observa que los autores difieren en la forma de definir ambas regiones, oportunidad que se aprovecha para presentar una nueva propuesta, mediante la cual se definen de una manera confiable ambas regiones y que al compararlas se obtienen un par de índices de capacidad multivariados CpM y CpkM, que son extensiones de los índices univariados Cp y Cpk. Por último, se utilizan los datos de un proceso, los cuales se pueden modelar por medio de una distribución normal bivariada para calcular los índices de capacidad propuestos en este trabajo, posteriormente se comparan con el valor de otros índices de capacidad similares, propuestos por otros autores, obteniéndose un desempeño por sobre otros índices de la literatura consultada.

Palabras Clave: Manufactura, calidad de productos, capacidad del proceso, índices de capacidad

ABSTRACT

The manufactured products have several quality characteristics that are important for the customer. When the quality characteristics are not correlated, using several indices, such as Cp, Cpk and Cpm to assess the ability of the process to produce quality products. For the opposite case was found in the literature review, proposed capability indices to measure the ability of a process when the quality characteristics are correlated. Most proposals agree that should define a specification region that represents what the customer wants, and another region of process variation that

[1]Universidad de Sonora, Hermosillo, México
[2]Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, Chihuahua, México

♦Autor para correspondencia: gcuamea@industrial.uson.mx

Recibido: 09.12.2013 Aceptado: 06.06.2014

shows performance having the process. Additionally, as a result of the review, it was observed that different authors differ on how to define both regions, an opportunity that is used to present a new proposal, in which these regions are defined in a reliable manner and are compared, resulting in a pair of multivariate capability indices CpM and CpkM, which are extensions of univariate indexes Cp and Cpk. Finally, data from a process, which can be modeled by means of a bivariate normal distribution are used to calculate the capability indices proposed in this paper, then compared with the value of other similar capability indices, proposed by others authors give a performance over other indices of the literature.

Keywords: Manufacturing, product quality, process capability, capability indices.

INTRODUCCIÓN

Todos los fabricantes saben que los productos de buena calidad son la clave del éxito en los negocios. Con el advenimiento de la tecnología moderna, los procesos de manufactura se han convertido en muy sofisticados de tal manera que una sola característica o variable de calidad no puede representar la calidad total del producto. Para saber si el proceso de manufactura actual, posee la habilidad para cumplir con las especificaciones establecidas por el cliente o por los ingenieros de diseño, se debe analizar la capacidad que tiene el proceso, es decir comparar el desempeño actual del proceso contra los requerimientos del cliente. Los estudios de capacidad tradicionales tratan a los productos como si solo tuvieran una variable crítica de interés. Sin embargo la gran mayoría de los productos tienen múltiples características que son de interés para el cliente, (Bothe, 1992). Todas deben estar dentro de sus respectivas especificaciones para que el producto se considere aceptable. Si solo una de ellas no cumple con las especificaciones, esto será suficiente para que el cliente considere inaceptable el producto.

Los estudios de capacidad de procesos se pueden clasificar en dos categorías. La primera es para los estudios de capacidad en el dominio univariado y la segunda para estudios de capacidad en el dominio multivariado. Dentro de la primera categoría, para medir que tanta habilidad tiene un proceso para reproducir las variables de calidad en un producto, hace necesario analizar la capacidad del mismo. Actualmente existen varios índices utilizados para este propósito, dos de los índices más conocidos y usados son el *Cp* y el *Cpk*, llamados también índices de capacidad potencial y real del proceso respectivamente. Dichos índices se usan bajo el supuesto de que el valor de las mediciones de las características de calidad representa valores de variables aleatorias independientes con distribución normal y que el proceso se encuentra en control estadístico, como lo establece (Montgomery, 2009). Los primeros investigadores en presentar formalmente índices de capacidad, fueron:(Juran, 1974), presentó el índice de capacidad *Cp,* que no requiere conocer la localización del proceso, por otro lado (Kane, 1986), presentó un índice de capacidad que toma en cuenta la localización del proceso, este índice es el *CpK.* Estos índices están definidos por las ecuaciones (1) y (2), donde LEI es el límite de la especificación inferior y LES es el límite de la especificación superior.

$$C_p = \frac{(LES-LEI)}{6\sigma} \tag{1}$$

$$C_{pk} = min\left\{\frac{(LES-\mu)}{3\sigma}, \frac{(\mu-LEI)}{3\sigma}\right\} \tag{2}$$

Sin embargo, el *CpK* no toma en cuenta si la localización del proceso difiere o no del valor meta *T*. Para corregir este problema se creó el índice *Cpm*, que se muestra en la ecuación (3), el cual supone que el valor meta *T*, se encuentra en el centro de las especificaciones.

$$Cpm = \frac{LES-LEI}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{3}$$

Para aquellos casos donde el valor de T no se encuentre en el centro de las especificaciones, (Pearn*et al.,*1992), desarrollaron el índice *Cpmk*, el cual es una combinación del *Cpk* y del *Cpm.* La forma de calcular este índice se presenta mediante la ecuación (4). Desde entonces, varias medidas de la capacidad de un proceso han sido presentadas por diversos autores después de 1980, por ejemplo (Kotz & Johnson, 2002), (Spiring *et al*. 2003), (Yum & Kim, 2011) y (Wu *et al*., 2009).

$$Cpmk = min\left[\frac{(LES-\mu)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}, \frac{(\mu-LEI)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}\right] \tag{4}$$

Para la categoría de estudios de capacidad en el dominio multivariado también se han propuesto algunos índices de capacidad que son extensiones de sus contrapartes univariado y como lo señala (Foster *et al*., 2005), aun no hay una metodología que sea consistente para calcular índices de capacidad multivariados, por lo tanto a la fecha, no existe consenso sobre el uso de un índice en particular.De aquí se desprende que se hace necesario evaluar la capacidad de un proceso que tiene muchas variables correlacionadas, pero esto se hace complejo para calcular y comprender ya que las especificaciones inferior y superior para cada una de las variables importantes, no pueden ser representadas como dos líneas verticales sobre una línea horizontal, más bien se representan por hiper rectangulos y la región de variación del proceso se puede representar por elipsoides. Las investigaciones sobre índices de capacidad multivariados, empezaron a realizarse a principios de los 1990, pero fue hasta el 2005 cuando el número de publicaciones se incrementó. Los índices de capacidad multivariados, se pueden dividir en cuatro grupos diferentes, como lo proponen los autores (Shinde & Khadse, 2009). En el grupo 1, se encuentran los índices de capacidad basados en la razón de una región de tolerancia y una región del proceso, ver como un ejemplo a (Taam *& Liddy*, 1993); el grupo 2, se basa en la probabilidad de producto no conforme, ver como ejemplo a (Castagliola *& Castellanos*, 2005); el grupo 3 se basa sobre el análisis de componentes principales, ver como ejemplo, Wang & Chen*,*1998); y un grupo 4 llamado otros, ver como ejemplo, (Shahriari *& Lawrence,*1995). En la tabla 1, se muestra un resumen de los índices que se consultaron en la literatura desde 1993 hasta el 2011, en la tabla la columna DNM, significa que si el cálculo del índice propuesto requiere o no de una distribución normal multivariada y en la última columna se establece el grupo al que pertenece el índice de capacidad propuesto. También se puede observar que la mayoría de los índices propuestos requieren de una distribución normal multivariada y que pertenecen al primer grupo.

ISSN 0717-9103
ISSN Online 0718-8307
Universidad del Bío-Bío

Tabla 1. Resumen de Índices de Capacidad Multivariados consultados y propuestos en el periodo de 1993-2011.

AÑO	AUTOR	INDICE	¿DNM?	GRUPO
1993	Taam y Liddy	MC_{pm}	Si	1
1994	Chen	MC_p	Si	1
1995	Shahriari y Lawrence	*MPCV*	Si	4
1998	Wang y Chen	MC_p, MC_{pk}, MC_{pm} y MC_{pmk}	Si	1 y 3
2000	Wang y Du	MC_p y MC_{pc}	Si	1 y 3
2001	Yeh y Chen	MC_f	No	2
2005	Castagliola y Castellanos	BC_p y MC_{pk}	Si	2
2005	Wang	MC_p y MC_{pk}	Si	1 y 3
2006	Wang	MC_{pc}	No	4
2007	Pearn *et al.*	MC_p	Si	1
2008	Castagliola y Castellanos	BC_p y BC_{pk}	No	2
2009	Shahriari y Abdollahzadeh	*NMPCV*	Si	1
2009	Ahmad *et al.*	PNC_{Total}	No	2
2009	González y Sánchez	C_n^s	Si y No	2 y 3
2009	Shinde y Khadse	*Mp*1 y *Mp*2	Si	2 y 3
2010	Pan y Lee	NMC_{pm}	Si	1
2011	Goethals y Cho	MC_{pmc}	Si	4

ISSN 0717-9103
ISSN Online 0718-8307
Universidad del Bío-Bío

MATERIALES Y MÉTODOS

La propuesta, inició con el supuesto de que las *v* características de calidad al ser analizadas en forma conjunta, pueden modelarse a través de la distribución normal multivariada y que el proceso se encuentra en control estadístico. Como un requisito se debe contar con especificaciones para cada una de las *v* características de calidad y con estimaciones de los parámetros del proceso, tales como: un vector de medias y una matriz de varianzas covarianzas. Posteriormente, las especificaciones fueron utilizadas para definir la región de especificación y por otro lado la estimación de los parámetros del proceso se utilizan para crear una región de variación del proceso utilizando los límites de tolerancia natural del proceso. Finalmente para obtener los índices de capacidad se obtuvo una razón de ambas regiones.

La propuesta se enfocó en extender el proceso de medición de la capacidad de un proceso con una sola característica de calidad, hacia un proceso con múltiples características de calidad. A partir de la definición clásica del C_p y del C_{pk} se desarrollarón ecuaciones equivalentes, las cuales permitiera su aplicación al caso multivariado y que pudieran ser utilizadas en la modificación de un proceso cuando éste fue adecuado. La definición clásica del C_p, está representada por la ecuación (1). En esta ecuación no interviene la localización del proceso o sea la media de la variable o característica de calidad, para la cual se desea establecer si el proceso es capaz o no cumplir, por lo que puede pensarse en un proceso hipotético centrado en las especificaciones, esto es, en un proceso cuya media es $\mu_c = (LES + LEI)/2$ y para el cual las distancias desde cualquiera de las especificaciones al punto medio toman el mismo valor, esto es que $\mu_c - LEI = LES - \mu_c$. Bajo el supuesto de normalidad en la que la media es ahora la media centrada en las especificaciones y con la misma variabilidad del proceso original (lo que es equivalente a una traslación de la distribución original) se pudiera realizar las siguientes operaciones algebraicas que no alteran el valor original obtenido con la ecuación clásica:

Por lo tanto, la ecuación (1), considerando el supuesto anterior se puede reescribir como la ecuación (5),que se muestra a continuación:

$$C_p = \frac{(LES - LEI)/2}{3\,\sigma} \tag{5}$$

Haciendo operaciones algebraicas también se puede representar como se muestra en las ecuaciones (6) y (7):

$$C_p = (\mu_c - LEI)/3\sigma \tag{6}$$

Una manera equivalente seria:

$$C_p = (LES - \mu_c)/3\sigma \tag{7}$$

Donde μ_c vendría a ser el valor que tomaría la variable o característica de calidad, cuando esta es igual al valor nominal o promedio de las especificaciones. Si se continúa realizando operaciones algebraicas, se tiene que la ecuación original del índice C_p , de una manera equivalente se puede representar como se muestra en las ecuaciones (8) y (9):

$$C_p = (\mu_c - LES)/3\sigma = \frac{Zc}{3} = \sqrt{\frac{Z_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi^2_{c,1}}{9}} \tag{8}$$

y por supuesto de una manera equivalente a:

$$C_p = (LES - \mu_c)/3\sigma = \frac{Zc}{3} = \sqrt{\frac{Z_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi^2_{C,1}}{9}} \qquad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9), corresponden al cálculo de la capacidad de un proceso univariado, ya que toda normal estándar al cuadrado corresponde a una Ji cuadrada con un grado de libertad y el valor de 9 corresponde por lo tanto, a una Ji cuadrada con un grado de libertad y que cubre una densidad de 0,9730.Por lo tanto se tiene una ecuación equivalente para el cálculo del C_p y que a partir de este momento, se relacionará con procesos multivariados a través de la distancia de Mahalanobis (es una medida de distancia y se usa como una forma de determinar la similitud entre dos variables aleatorias tomando en cuenta la correlación entre las variables), Peña (2002). La distribución de probabilidad corresponde a una Ji cuadrada con grados de libertad igual al número de variables o características de calidad del proceso.

Antes de discutir la propuesta del mecanismo para el cálculo del C_p en el caso multivariado, es conveniente indicar el significado de este índice en el caso univariado, propiedad que deberá ser extrapolado al caso multivariado. Supóngase que $C_p = 1$, esto implica que el valor actual de la desviación estándar de la característica de calidad es el máximo valor permisible para que el proceso sea marginal y potencialmente capaz para producir piezas dentro de las especificaciones (99.73% de piezas buenas). En cambio, supóngase que $C_p = 0.85$, esto implica que si se mantienen las mismas especificaciones, la desviación estándar actual deberá disminuirse para tener un proceso capaz. Se puede verificar que el nuevo valor deberá ser $\tilde{\sigma} = C_p\sigma$, ya que al dividir ambos lados de la ecuación clásica para el C_p se obtiene: $1 = (LES - LEI)/6C_p\sigma$ .Por lo tanto el C_p implica, en el caso de ser menor a la unidad, la porción en la cual deberá disminuirse la desviación actual para que un proceso sea potencialmente capaz. En cambio, cuando el valor es superior a la unidad, implica hasta cuanto aumento en la variación podrá ser soportado por el proceso actual para seguir siendo capaz potencialmente de cumplir con las especificaciones. Esta propiedad debe ser satisfecha por la propuesta que se haga para un índice multivariado.

RESULTADOS

En las siguientes secciones se muestra la obtención de los índices de capacidad propuestos en este trabajo, así como la aplicación de los mismos.

Obtención del índice *CpM*

En (Peña, 2002), se establece que una de las propiedades básicas de la distribución normal k-dimensional, es que toda curva de nivel para una distribución normal multivariada es un elipsoide que abarca una determinada confianza $(1-\alpha)$ y cuya distribución es una Ji cuadrada con grados de libertad igual al número de variables. Para cualquier valor particular de cualquiera de las variables aleatorias se le puede asociar un elipsoide con confianza $(1-\beta_i)$ y del desarrollo de la ecuación basada en valores Ji cuadrada, se propone la ecuación (10), para el cálculo del C_p en el caso multivariado:

$$C_{pM} = min\left\{ \sqrt[2]{\frac{\chi^2_{\beta_i}}{\chi^2_{0,0027,m}}} \mid i = 1,2,\dots,m \right\} \text{donde } \chi^2_{\beta_i} = (LEI_i - \mu_{ci})^2/\,|\Sigma|\left|\Sigma_i^{-1}\right| \qquad (10)$$

Esta ecuación es consistente con el caso univariado en el siguiente sentido: si todas las desviaciones estándares de las variables involucradas en el proceso son modificadas mediante $\tilde{\sigma_i} = C_{pM}\sigma_i$ entonces el proceso será capaz potencialmente de cumplir con todas las especificaciones de manera simultánea. Para demostrar lo anterior se requiere de la propiedad del producto escalar de las matrices y del hecho de que $|\lambda\Sigma| = \lambda^m|\Sigma|$. Si se sustituyen los valores $\tilde{\sigma_i}$ en la matriz Σ entonces los valores en la diagonal principal tomarán la forma $C_{pM}^2\sigma_i^2$ mientras que los valores de la covarianza situada en el renglón i y columna j toma el valor $C_{pM}^2\sigma_i\sigma_j$. Por lo tanto la nueva matriz de varianzas-covarianzas está dada por: $\tilde{\Sigma} = C_{pm}^{2m}\Sigma$ por lo que se cumple que $|\tilde{\Sigma}| = C_{pM}^{2m}|\Sigma|$. De la misma forma, se tiene que $|\widetilde{\Sigma^{-1}}| = \frac{1}{|\tilde{\Sigma}|} = \frac{1}{C_{pM}^{2m}|\Sigma|}$ y que $|\widetilde{\Sigma_i^{-1}}| = C_{pM}^{-2m+2}|\Sigma_i^{-1}|$. Recordando que los límites de tolerancia natural del proceso, para la característica de calidad vienen dados por: $LTN_i = \mu_{ci} \mp \sqrt[2]{|\tilde{\Sigma}||\widetilde{\Sigma_i^{-1}}|\chi^2_{0,0027}}$ realizando las sustituciones correspondientes y haciendo las operaciones pertinentes, se llega a:

$LTN_i = \mu_{ci} \mp \sqrt{C_{pM}^2|\Sigma||\Sigma_i^{-1}|\chi^2_{0,0027}} = \mu_{ci} \mp \sqrt{\frac{\chi^2_{\beta}|\Sigma||\Sigma_i^{-1}|\chi^2_{0,0027}}{\chi^2_{0,0027}}}$. Simplificando se llega a que $LTN_i = \mu_{ci} \mp \sqrt{|\Sigma||\Sigma_i^{-1}|\chi^2_{\beta}}$. Esta última ecuación nos indica que si $C_p < 1$ entonces $\chi^2_{\beta} < \chi^2_{0,0027}$ y por lo tanto, los límites naturales del proceso, si estuviese centrado, quedarían dentro de las especificaciones, con excepción de aquélla para la cual se ha obtenido el valor χ^2_{β}, cuyos límites naturales serán exactamente iguales a sus especificaciones mínima y máxima. Un aspecto importante que debe ser recalcado es el referente a que la cantidad de valores que deben ser comparados en la obtención del C_p es igual al número de variables o características del proceso. Para el cálculo del valor se debe considerar que el proceso se encuentra localizado en el centro de las especificaciones, es decir, la distancia del promedio a cada una de las dos especificaciones para cada variable es la misma.

Obtención del índice C_{pkM}

Un razonamiento similar al del apartado anterior permite establecer como ecuación para el cálculo del C_{pkM}, el cual si considera la ubicación actual del proceso sería el siguiente:

$$C_{pkM} = \min\left\{\sqrt{\frac{\chi^2_{1\beta_i}}{\chi^2_{0,0027}}}\ ,\ \sqrt{\frac{\chi^2_{2\beta_i}}{\chi^2_{0,0027}}} para i = 1, 2, \ldots, m\right\} \tag{11}$$

Dónde:

$\chi^2_{1\beta_i} = (LEI_i - \mu_i)^2 / |\Sigma|\,|\Sigma_i^{-1}|$, $\chi^2_{2\beta_i} = (LES_i - \mu_i)^2 / |\Sigma|\,|\Sigma_i^{-1}|$ y los valores medios corresponden al de las respectivas variables y no a los centros de las especificaciones. Debe observarse que por cada variable deben obtenerse dos valores posibles para el C_{pkM} por lo que deberán compararse, en general, 2v valores. En general los procesos no están centrados, por lo que $C_{pkM} < C_{pM}$ y conforme $\mu \to \mu_c$ entonces $C_{pkM} \to C_{pM}$.

Interpretación de los índices de capacidad

La interpretación de los índices anteriores, proporciona un entendimiento, de que tan bien el proceso es capaz de producir productos que cumplan con las especificaciones, lo cual puede verificarse mediante el evento $C_{pkM} \geq 1.0$, en caso contrario el proceso requiere ajustes.

- Cuando el $C_{pkM} < C_{pM}$, ajustes en el proceso serán requeridos, iniciando con colocar la media del proceso en el centro de las especificaciones.
- Cuando el $C_{pM} < 1$, además de los ajustes previos en el proceso, se requerirá una reducción en la variabilidad del proceso.
- Para conocer el grado de reducción en la variación de las características de calidad del proceso, se puede demostrar que los nuevos valores de la dispersión deberán ser $C_{pm}\sigma_i$, luego entonces se verifica que la matriz de covarianzas está dada por $C_{pM}^2\Sigma$ y su determinante tomara el siguiente valor $C_{pM}^{2m}|\Sigma|$. De la misma manera se cumple que $\left|\Sigma_i^{-1}\right|$ toma un valor igual a $C_{pM}^{-2(m-1)}\left|\Sigma_i^{-1}\right|$, de tal manera que se obtienen los siguientes resultados:

$$X_i = \mu_i \pm \sqrt{C_{pM}^2|\Sigma|\left|\Sigma_i^{-1}\right|\chi_{\alpha,v}^2} = \mu_i \pm \sqrt{\left(\frac{\chi_{\beta,v}^2}{\chi_{\alpha,v}^2}\right)|\Sigma|\left|\Sigma_i^{-1}\right|\chi_{\alpha,v}^2} = \mu_i \pm \sqrt{|\Sigma|\left|\Sigma_i^{-1}\right|\chi_{\beta,v}^2}$$

Cuando se cumple que $\chi_{\beta,m}^2 < \chi_{\alpha,m}^2$, entonces el valor de que se obtiene es menor o igual que el valor de la especificación correspondiente.

Cálculo y comparación con otros índices propuestos

En el trabajo de Chen, (1994), se discuten dos ejemplos numéricos, donde se aplicaron tres de los índices de capacidad que aparecen en la literatura. Usando los datos del primer ejemplo, se calcularon los índices de capacidad propuestos en este trabajo y se comparan con los índices obtenidos, con las tres propuestas, el resumen se presenta en la tabla 2.

El ejemplo trata de una distribución normal bivariada en la cual la dureza Brinell (H) y la resistencia a la tensión (S), son dos características de calidad de un producto industrial. Las tolerancias de ingeniería para ambas características de calidad vienen dadas por [112,3; 241,3] y [32,7;73,3], respectivamente y el vector de valores nominales para H y S viene dada por [177, 53]. Después de coleccionar 25 mediciones de ambas características de calidad se obtuvieron los valores de la tabla1. Al realizar la prueba de Shapiro-Wilk, se encontró que las 25 mediciones coleccionadas, siguen una distribución normal multivariada con el siguiente vector de medias [177,2; 52,316] y la siguiente matriz de varianzas covarianzas:

$$S = \begin{bmatrix} 338 & 88.8925 \\ 88.8925 & 33.6247 \end{bmatrix}$$

Tabla1. Dureza brinell (H) y resistencia a la tensión (S) para un producto industrial.

H	S	H	S	H	S
143	34,2	141	47,3	178	50,9
200	57,0	175	57,3	196	57,9
168	47,5	187	58,5	160	45,5
181	53,4	187	58,2	183	53,9
148	47,8	186	57,0	179	51,2
178	51,5	172	49,4	194	57,5
162	45,9	182	57,2	181	55,6
215	59,1	177	50,6		
161	48,4	204	55,1		

Para realizar el cálculo del índice de capacidad potencial que se propone en este trabajo, ubicaremos el promedio del proceso en el centro de las especificaciones, tal y como se muestra en la figura 1. Aplicando los índices que se proponen en esta tesis tenemos que el determinante de la matriz de varianzas covarianzas es 3463,3 y la inversa de la matriz de varianzas covarianzas es:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0097 & -0{,}0257 \\ -0{,}0257 & 0{,}0097 \end{bmatrix}$$

Primero se obtuvieron los valores de las ji cuadradas asociadas a cada una de las especificaciones y de la figura 1 se obtuvo un valor del índice *CpM* ligeramente mayor que 1.

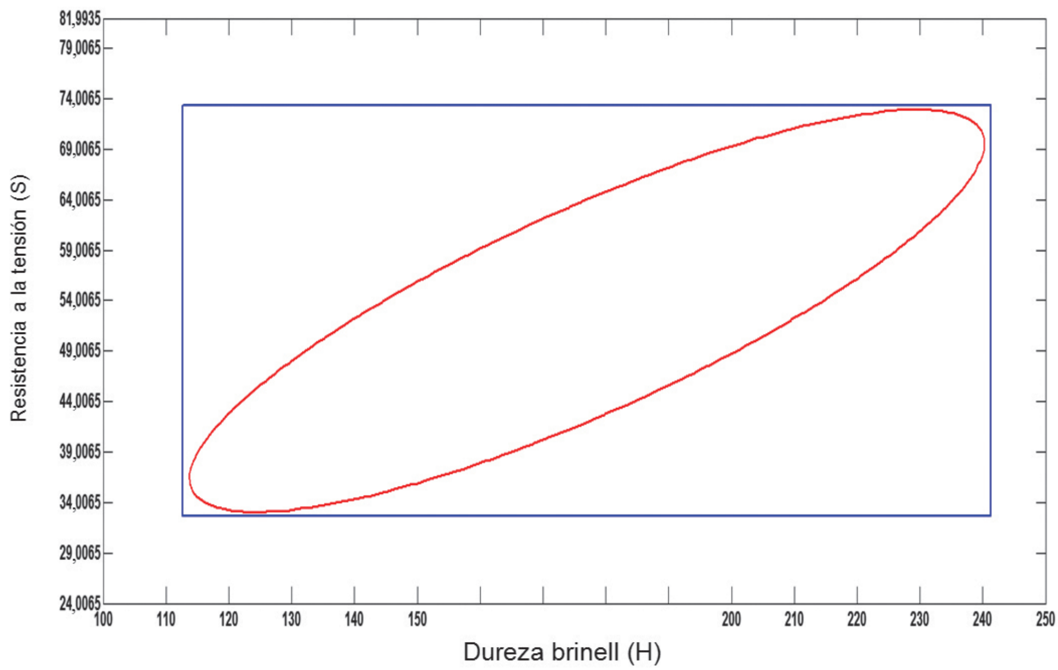

Figura 1. Región de especificación y región del proceso para la dureza (H) y la resistencia a la tensión (S), cuando el proceso está centrado.

A continuación se obtienen los valores de ji-cuadradas asociadas a cada una de las especificaciones para cada una de las dos variables.

El valor de la ji-cuadrada asociada con las especificaciones de la variable viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 1} = \frac{(X_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma||\Sigma_1^{-1}|} = \frac{(112.7 - 177)^2}{(3463.3)(0{,}0976)} = \frac{(241.3 - 177)^2}{(3463.3)(0{,}0976)} = 12.2316$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con las especificaciones de la variable S viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 2} = \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{|\Sigma||\Sigma_2^{-1}|} = \frac{(32.7 - 53)^2}{(3463.3)(0{,}0976)} = \frac{(73.3 - 53)^2}{(3463.3)(0{,}0976)} = 12.2668$$

De lo anterior se calculó el valor del *CpM*, el cual es:

$$C_{pM} = min\sqrt{\frac{\chi^2_{\beta i}}{\chi^2_{0.0027,2}}} = min\left[\sqrt{\frac{12.2316}{11.829}} = \sqrt{\frac{12.2668}{11.829}}\right] = \min[1.0169, 1.0183] = 1.0169$$

Para obtener el valor del C_{pkM}, se ubicó el proceso en su promedio actual que es de 177,2 para H y 52,316 para S, como se muestra en la figura 2.

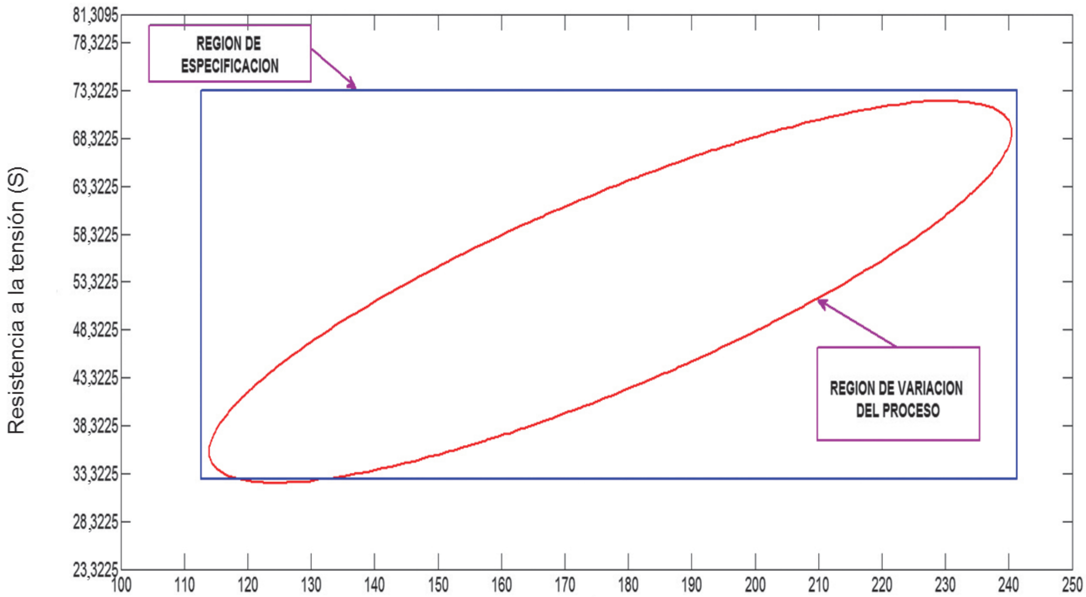

Figura 2. Región de especificación y región del proceso para la dureza (H) y la resistencia a la tensión (S), cuando el proceso se encuentra en sus promedios actuales.

Al observar la gráfica se observa que el proceso ligeramente se sale de la región de especificación, lo cual deberá ser reflejado por el cálculo del *CpkM*, el cual deberá obtener un valor de este índice ligeramente menor que 1, para este proceso.

El valor de la ji-cuadrada asociada con la especificación inferior de la variable *H* viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 1} = \frac{(X_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma||\Sigma_1^{-1}|} = \frac{(112.7 - 177.2)^2}{(3463.3)(0,0976)} = 12.3078$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con la especificación superior de la variable *H* viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 1} = \frac{(X_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma||\Sigma_1^{-1}|} = \frac{(241.3 - 177.2)^2}{(3463.3)(0,0976)} = 12.1556$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con la especificación inferior de la variable *S* viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 2} = \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{|\Sigma||\Sigma_2^{-1}|} = \frac{(32.7 - 52.316)^2}{(3463.3)(0,0097)} = 11.454$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con la especificación superior de la variable *S* viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 2} = \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{|\Sigma||\Sigma_2^{-1}|} = \frac{(73.3 - 52.316)^2}{(3463.3)(0,0097)} = 13.1073$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con los límites de tolerancia natural del proceso para la variable *H* viene dada por:

$$\chi^2_{0.0027,2} = \frac{(X_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma||\Sigma_1^{-1}|} = \frac{(91.4 - 100)^2}{(0,2635)(18.0455)} = \frac{(108.6 - 100)^2}{(0,2635)(18.0455)} = 11.8341$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con los límites de tolerancia natural del proceso para la variable *S* viene dada por:

$$\chi^2_{0.0027,2} = \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{|\Sigma||\Sigma_2^{-1}|} = \frac{(39.68 - 50)^2}{(0,3794)(18.0455)} = \frac{(60.31 - 50)^2}{(0,3794)(18.0455)} = 11.8273$$

Una vez obtenidos estos valores se procede al cálculo del índice de capacidad utilizando la relación siguiente:

$$C_{pkM} = min\sqrt{\frac{\chi^2_{\beta i}}{\chi^2_{0.0027,2}}} = min\left[\sqrt{\frac{12.3078}{11.8341}}, \sqrt{\frac{12.1556}{11.8341}}, \sqrt{\frac{11.454}{11.829}}, \sqrt{\frac{13.1073}{11.829}}\right]$$
$$= min[1.04, 1.027, 0.9840, 1.10] = 0,9840$$

Como se puede ver se obtuvieron los resultados esperados

Los resultados obtenidos con los índices de capacidad que se presentan en este trabajo, junto con los resultados que se obtuvieron utilizando los índices de capacidad propuestos por (Shahriari & Abdollahzadeh,2009), (Taam *et al*., 1993), (Pan & Lee,2009), se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Comparación de varios índices de capacidad para dos características de calidad

Índice de (Shahriari & Abdollahzadeh, 2009)	Índice de (Taam & Liddy, 1993)	Índice de (Pan& Lee, 2010)	Índices de esta investigación	
$\hat{C}_{pM}$	$\widehat{MC}_p$	$\widehat{NMC}_{pm}$	C_{pM}	C_{pkM}
1,02	1,88	1,01	1,0169	0,984

Como puede verse de la tabla 2, cuando comparamos el valor obtenido en esta investigación se obtiene una medición de la capacidad potencial del proceso muy similar al índice propuesto por (Shahriari & Abdollahzadeh, 2009) y (Pan & Lee, 2010), mientras que por otro lado difiere mucho del valor obtenido con el índice de (Taam & Liddy, 1993).La razón de esta discrepancia es que los autores no toman en cuenta la correlación que existe entre ambas características de calidad. Por otro lado, en este trabajo se propone a diferencia de los otros autores, un índice que mide la capacidad real que tiene el proceso y será el que determine las acciones de mejora que deberán implementarse en un momento dado para mejorar el desempeño del proceso.

DISCUSIÓN

Para el caso de características de calidad correlacionadas y no correlacionadas, que pueden modelarse a través de una distribución normal multivariada, resulta relativamente fácil el cálculo de estos índices de capacidad, la interpretación de los valores obtenidos resulta simple y además de que es aplicable para cualquier dimensión.

La interpretación del valor obtenido con los índices CpM y $CpkM$ es similar al caso univariado, de tal manera que si se obtiene en el CpM un valor menor de 1, se entiende que el proceso no tiene capacidad potencial para producir marginalmente la mayor parte de la producción dentro de especificaciones. Por otro lado si el valor del CpM y $CpkM$ son iguales, esto significa que el proceso está centrado en el valor nominal de las especificaciones, de igual manera podrá establecerse que un proceso que tenga un *CpM* con valor de 2, es un proceso que potencialmente sería un proceso de nivel seis sigma.

Una ventaja que presenta el cálculo de los índices de capacidad propuestos en este trabajo, es la forma adecuada en la que se definen las regiones de especificación y de variación del proceso, lo cual permite obtener un vector de *2v* valores en el caso del *CpkM* para cada una de las variables. Mediante el análisis de cada uno de los valores obtenidos se encuentra fácilmente con que especificación o especificaciones se cumple y con cuáles no.

REFERENCIAS

AHMAD, S., ABDOLLAHIAN, M., ZEEPHONGSEKUL, P., and ABBASI, B. Multivariate non normal process capability analysis. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*,2009,vol. 4, no. 7, pp. 757-765.

BOTHE, D.R. A capability study for an entire product. *ASQC Quality Congress Transactions,*1992, vol. 46, pp.172–178.

CASTAGLIOLA, P., and CASTELLANOS, J.V.G. Process capability indices dedicated to bivariate non normal distributions. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 2008, vol. 14, no. 1, pp. 87-101.

CASTAGLIOLA, P., and CASTELLANOS, J.V.G. Capability Indices Dedicated to the Two Quality Characteristics Case. *Quality Technology and Quantitative Management*,2005,vol. 2, no. 2, pp. 201-220.

FOSTER, E.J.,BARTON, R.R., and GAUTAM, N. The process-oriented multivariate capability index, *International Journal of Production Research*, 2005,vol. 43, no. 10, pp. 2135-2148.

GOETHALS, P.L., and CHO, B.R. The development of a target-focused process capability index with multiple characteristics.*Quality and Reliability Engineering International,* 2011, vol. 27, no. 3, pp. 297-311.

GONZÁLEZ, I.,and SANCHEZ, I. Capability indices and nonconforming proportion in univariate and multivariate process.*International J Adv. Manuf. Technol., 2*009,vol. 44, pp. 1036-1050.

JURAN, J.M. Quality control handbook, 1974.New York/McGraw-Hill.

KANE, V.E. Process capability indices, *Journal of Quality Technology*, 1986,vol. 34, pp. 1-19.

KOTZ, S., and JOHNSON, N.L. Process Capability Indices—a review, 1992–2000.*Journal of Quality Technology,* 2002,vol. 34, no. 1, pp. 2-19.

MONTGOMERY, D. Statistical quality control A modern introduction, 6th ed.2009. New York/ John Wiley and Sons, Inc.

PAN, J.N., and LEE, C.Y. New capability indices for evaluating the performance of multivariate manufacturing processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 2010, vol. 26, no. 1, pp. 3-15.

PEARN, W.L.,KOTZ, S., and JOHNSON, N.L. Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology,* 1992,vol. 24, no. 4, pp. 216-231.

PEARN, W.L.,WANG, F.K., and YEN, C.H. Multivariate Capability indices: Distributional and Inferential Properties. *Journal of Applied statistics*, 2007,vol. 34, no. 8, pp. 941-962.

PEÑA, D. Análisis de datos multivariantes, 2002. Interamericana de España, S.A. de C.V./ McGraw-Hill

SHAHRIARI, H., and ABDOLLAHZADEH, M.A new multivariate process capability vector. *Quality Engineering*, 2009,vol. 21, no. 3, pp. 290-299.

SHAHRIARI, H., and LAWRENCE, F.P. A multivariate process capability vector. In: *4thIndustrial Engineering Research Conference*, 1995. pp 304-309.

SHINDE, R.L., and KHADSE, K.G. Multivariate process capability using principal component analysis. *Quality and Reliability Engineering International*, 2009,vol. 25, no. 1, pp. 69-77.

SPIRING, F.,LEUNG, B.,CHENG, S.,and YEUNG, A.A. Bibliography of process capability papers. *Quality and Reliability Engineering International,* 2003, vol. 19, no. 5, pp. 445-460.

TAAM, W.S.P., and LIDDY, J.W.A note on multivariate capability indices. *Journal of Applied Statistics*, 1993, vol. 20, no. 3, pp. 229-351.

WANG, C.H. Constructing Multivariate process Capability Indices for Short-run Production. *International J Adv. Manuf. Technol,* 2005,vol. 26, pp. 1306-1311.

WANG, F.K. Quality Evaluation of a Manufactured Product with Multiple Characteristic, *Quality and Reliability Engineering International*, 2006, vol. 22, pp. 225-236.

WANG, F.K., and CHEN, J.C. Capability index using principal components analysis. *Quality Engineering,*1998, vol.11, no. 1, pp. 21-27.

WANG, F.K., and DU, T.C.T. Using principal component analysis in process performance for multivariate data. *Omega*, 2000, vol. 28, no. 2, pp. 185-194.

WU, C.W.,PEARN, W.L., and KOTZ, S. An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance. *International Journal of Production Economics,*2009, vol. 117, no. 2, pp. 338-359.

YEH, A.B., and CHEN, H.A nonparametric multivariate process capability index. *International Journal of* bibliography of the literature on process capability *Modeling and Simulation*, 2001,vol. 21, no. 3, pp. 218-223.

YUM, B.J., and KIM, K.W. Índices: 2000–2009. *Quality and Reliability Engineering International*, 2011, vol. 27, no. 3, pp. 251-268.