Nexo Revista Científica
Vol. 20, No. 01, pp. 03 – 12 / Junio 2007

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua
www.uni.edu.ni/Nexo

Un abordaje diferente para introducir el concepto de la función *fi* de Euler y sus fórmulas recursivas

J.L. Aguado, E.A. Aguirre, M.A. Aguirre

NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000. Tandil, Argentina
e-mail: {jaguado, maguirre}@exa.unicen.edu.ar

Abstract

En la asignatura Matemática Discreta que se dicta en el primer año de las carreras de Profesorado de Matemática, Licenciatura en Matemática e Ingeniería de Sistemas de la Facultad Ciencias Exactas de la UNCPBA, el concepto de la función *fi* de Euler es tratado con cierto detenimiento, debido a sus aplicaciones posteriores. Por ejemplo, en el caso de alumnos de la carrera de Profesorado de Matemática, en el estudio de los números que se pueden construir con regla y compás, y en el caso de los alumnos de Ingeniería de Sistemas, por la relevancia que ha adquirido actualmente la teoría de números en modelos criptográficos. En este trabajo describimos una propuesta didáctica para introducir el concepto de la función de Euler por medio de operaciones con subconjuntos finitos de fracciones, caracterizados por una propiedad sencilla. Relatamos la implementación a nivel de primer año de la universidad y mostramos cómo adaptar la demostración usual de la fórmula general, que utiliza el Principio de Inclusión y Exclusión. Esta propuesta puede implementarse incluso a nivel de enseñanza media, con las debidas adaptaciones (ver [1]).

Palabras claves: máximo común divisor, coprimos, función totien, función de Euler

1. Introducción

Si n un número natural, entonces la *función de Euler,* $\phi(n)$, es la cantidad de naturales menores que n que son coprimos con n, es decir que no tienen factores comunes con n. Ya la definición tiene un sabor tan abstracto que no seduce a la mayoría de nuestros alumnos, a pesar de que apela solamente a definiciones de la aritmética básica. Si a continuación preguntamos por el valor $\phi(6)$, esperando que el alumno mentalmente calcule 6 máximos comunes divisores, anote también mentalmente cuáles de ellos da 1, y dé el resultado, la decepción es inevitable.

Pero si le sugerimos que observe la sucesión de fracciones:

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$$

y estudie cuántas de ellas son irreducibles, dirá rápidamente que son 2.

En una experiencia que comienza en la forma de arriba, participaron alumnos del ciclo básico de distintas carreras de orientación a las ciencias exactas.

En cursos introductorios de Álgebra, ejemplificar con subconjuntos finitos caracterizados por alguna propiedad sencilla suele ser un recurso didáctico atractivo a utilizar por el docente.

Tomemos por ejemplo, un conjunto finito de fracciones, con la propiedad de que cada fracción tenga un denominador fijo n y numeradores m tal que $1 \leq m \leq n$.

$$F_6 = \left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}\right\}$$

Los alumnos realizan en un primer momento comentarios del tipo siguiente: F_6 tiene 6 elementos; $\frac{1}{6}$ es la fracción menor del conjunto y $\frac{6}{6} = 1$.

Cada dos fracciones en F_6 son distintas, usando el criterio de igualdad de fracciones y el hecho que los numeradores están entre 1 y 6.

Además, por simple observación, señalan que sólo hay dos fracciones de F_6 que no se pueden simplificar, es decir sólo hay dos *fracciones irreducibles*: $\frac{1}{6}$y $\frac{5}{6}$.

¿Qué particularidad tienen los numeradores de las *fracciones irreducibles*?

En este caso particular $\frac{1}{6}$y $\frac{5}{6}$ son irreducibles ya que ni 1 ni 5 tienen divisores comunes con 6.

Por otra parte los elementos reducibles de F_6, serán de la forma $\frac{m}{6} \in F_6$, siempre y cuando se puedan simplificar, y al hacerlo exhaustivamente el resultado de esta simplificación será la fracción irreducible$\frac{a}{b}$ donde b es un divisor de 6, y a es un entero positivo, también entre 1 y 6.

En general el *máximo común divisor* entre a y b es 1. Es decir los números a y b obtenidos finalmente serán *coprimos.*

La posibilidad de simplificar o no las fracciones de F_6 y los distintos divisores de 6, sugieren la idea de trabajar con subconjuntos del propio F_6 y proceder a contar sus elementos.

Aquí surgieron otras preguntas:

¿Cuántas fracciones reducibles de F_6 después de simplificadas tienen denominador 2?. ¿Cuántas con denominador 3?. Fácilmente los alumnos descubren que $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$es la única fracción de F_6 que se simplifica a una irreducible con denominador 2 y $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ los únicos elementos de F_6 que se simplifican a irreducibles con denominador 3.

Así, hallaron los subconjuntos de F_6,

$$I_{1,6} = \left\{\tfrac{1}{1}\right\} \qquad I_{2,6} = \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \qquad I_{3,6} = \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\} \qquad I_{6,6} = \left\{\tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}\right\}$$

que corresponden a los divisores positivos del número 6: 1, 2 , 3 y 6 respectivamente. Inmediatamente observan que podemos expresar al conjunto F_6 como la unión dijunta de estos subconjuntos:

$$I_6 = I_{1,6} \cup I_{2,6} \cup I_{3,6} \cup I_{6,6}$$

2. Desarrollo de la experiencia

2.1 Primera Etapa: Formulación del Problema

El problema es entonces:

Dado un número entero positivo n y el conjunto $F_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}\right\}$

A) *¿Es posible conocer la cantidad de elementos de F_n que son fracciones irreducibles con denominador n?*

Porque este número entonces nos dá $\phi\,(n)$.

B) *¿Es posible calcular para cada natural d, divisor positivo de n, la cantidad de fracciones de F_n que al simplificarse son irreducibles con denominador d?*

Porque esto sugiere que $\phi\,(n)$ puede calcularse de manera recursiva, conociendo los valores $\phi\,(d)$ con $d < n$.

2.2 Segunda Etapa: Notaciones, convenciones y definición de elementos auxiliares

Denotamos con $mcd\,(a, b)$ al *máximo común divisor* entre a y b. Y si $mcd\,(a, b) = 1$ diremos que los números a y b son *coprimos.*

Con $|A|$ se denota el cardinal del conjunto finito A.

Para el conjunto de divisores positivos de n utilizamos la notación $D(n)$.

Una herramienta básica que el alumno utilizará es el Teorema Fundamental de la Aritmética (ver [3]) nos dice que si n es un número entero positivo tenemos que n se escribe, salvo la propiedad conmutativa, de manera única:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

con $p_1, p_2, \ldots, p_t$, primos positivos distintos y los α_i enteros no negativos, para $i = 1, \ldots, t$.

A partir de que las fracciones irreducibles de F_n son aquellas de la forma $\frac{m}{n}$ tales que $mcd(m, n) = 1$ y que también suponemos que en F_n hay fracciones reducibles, la tarea es reducir cada fracción de F_n a su mínima expresión. Cada fracción $\frac{r}{n} \in F_n$ al ser reducida a su mínima expresión quedará en la forma $\frac{a}{d}$, donde como ya mencionamos, d es un divisor positivo de n con a un entero positivo y $1 \leq a < d$ con a y d coprimos. La fracción $\frac{a}{d}$ aparecerá como la forma reducida de alguna fracción en F_n.

La construcción de subconjuntos de F_6 de fracciones irreducibles que se obtienen por simplificación cuyo denominador es algún divisor d de 6, sugiere la siguiente definición:

$$\text{Si } d \in D(n), \text{ entonces } I_{d,n} = \left\{ \frac{r}{n} \in F_n : \frac{r}{n} = \frac{a}{d} \text{ con } a \text{ y } d \text{ coprimos} \right\}$$

2.3 Tercera Etapa: Deducciones

Convencidos de que para n grandes, es necesario disponer de herramientas más poderosas para poder contar los elementos irreducibles de F_n, los estudiantes optaron por comenzar analizando la segunda cuestión B). Para ello caracterizaron las *fracciones reducibles* de F_n según los divisores positivos del denominador, en nuestro ejemplo $n = 6$. Calcularon los cardinales:

$$\begin{array}{lcllcl}
I_{1,6} & = & \left\{\frac{1}{1}\right\} & \Longrightarrow & |I_{1,6}| & = & 1 \\
I_{3,6} & = & \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} & \Longrightarrow & |I_{2,6}| & = & 2 \\
I_{2,6} & = & \left\{\frac{1}{2}\right\} & \Longrightarrow & |I_{2,6}| & = & 1 \\
I_{6,6} & = & \left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\} & \Longrightarrow & |I_{6,6}| & = & 2
\end{array}$$

Siendo $\phi(n)$ la cantidad de enteros positivos coprimos y menores o iguales que n, los estudiantes concluyen también la equivalencia entre las dos definiciones dadas y deducen que $\phi(d) = |I_{d,6}|$.

Como se tiene una unión disjunta:

$$F_6 = I_{1,6} \cup I_{2,6} \cup I_{3,6} \cup I_{6,6}$$

los alumnos obtuvieron:

$$6 = |F_6| = |I_{1,6}| + |I_{2,6}| + |I_{3,6}| + |I_{6,6}| = \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(6)$$

A continuación los alumnos propusieron familias de ejemplos que clarifican el cálculo de la ϕ de Euler.

Ejemplo 1: $n = p$, con p primo. Entonces $F_p = \left\{\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p}{p}\right\}$ y como p es primo tenemos $D(p) = \{1, p\}$. Así $F_p = I_{1,p} \cup I_{p,p}$ y

$$|F_p| = |I_{1,p}| + |I_{p,p}| = p$$

Aplicando que $\phi(d) = |I_{d,n}|$, nos queda:

$$p = 1 + \phi(p)$$

Así los alumnos concluyeron que si p es primo, entonces:

$$\phi(p) = p - 1;$$

Ejemplo 2: $n = p^2$, $F_{p^2} = \left\{\frac{1}{p^2}, \frac{2}{p^2}, ..., \frac{p^2}{p^2}\right\}$. Luego $D(p) = \{1, p, p^2\}$ entonces:

$$F_{p^2} = I_{1,p^2} \cup I_{p,p^2} \cup I_{p^2,p^2} \text{ y } p^2 = |F_{p^2}| = |I_{1,p^2}| + |I_{p,p^2}| + |I_{p^2,p^2}|$$

Aplicando que $\phi(d) = |I_{d,n}|$, nos queda:

$$p^2 = 1 + \phi(p) + \phi(p^2)$$

Y se concluye que $\forall p$ primo se tiene $\phi(p^2) = p^2 - p = p(p-1)$

Ejemplo 3: $n = pq$, con p y q primos distintos. Luego $D(pq) = \{1, p, q, pq\}$

$$\begin{aligned} F_{pq} &= I_{1,pq} \cup I_{p,pq} \cup I_{q,pq} \cup I_{pq,pq} \\ \text{y } pq &= |F_{pq}| = |I_{1,pq}| + |I_{p,pq}| + |I_{q,pq}| + |I_{pq,pq}| \\ &= 1 + \phi(p) + \phi(q) + \phi(pq) \end{aligned}$$

De donde $\phi(pq) = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) = \phi(p)\phi(q)$

Ejemplo 4: $n = p^k$, $k \in \mathbb{N}$. Ya los alumnos sugieren probar por inducción que la proposición:

$$P(k) : \phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$

es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando ejemplos 1 y 2, se ve que $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas.

Suponiendo que $P(d)$ es verdadera para todo $d < k$ se prueba que $P(k)$ es verdadera.

$F_{p^k} = \left\{\frac{1}{p^k}, \frac{2}{p^k}, ..., \frac{p^k}{p^k}\right\}$, como $p^k = \underbrace{p.p...p}_{k \text{ veces}}$, $D(p^k) = \{1, p, p^2, ..., p^{k-1}, p^k\}$ entonces

$$F_{p^k} = I_{1,p^k} \cup I_{p,p^k} \cup I_{p^2,p^k} \cup ... \cup I_{p^{k-1},p^k} \cup I_{p^k,p^k}$$

y

$$\left|F_{p^k}\right| = \left|I_{1,p^k}\right| + \left|I_{p,p^k}\right| + \left|I_{p^2,p^k}\right| + ... + \left|I_{p^{k-1},p^k}\right| + \left|I_{p^k,p^k}\right| = p^k$$

Aplicando que $\phi(d) = |I_{d,n}|$, queda:

$$p^k = 1 + \phi(p) + \phi(p^2) + ... + \phi(p^{k-1}) + \phi(p^k)$$

Entonces por la hipótesis inductiva:

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-2}(p-1) - .. - p(p-1) - (p-1) - 1$$

Así:

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} + p^{k-2} + .. - p^2 + p - p + 1 - 1 = p^k - p^{k-1}$$

entonces:

$$\phi(p^k) = p^k(p-1)$$

Y se concluye que $P(k)$ es verdadera $\forall k \in \mathbb{N}$.

De esta manera pudieron calcular las siguientes valores de la ϕ de Euler: $\phi(8) = 4$, $\phi(5) = 4$, $\phi(21) = 12$, $\phi(7) = 6$ y $\phi(36) = 12$

A estas alturas, la familiaridad con las definiciones y propiedades permite que los alumnos prueben fácilmente los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} F_n &= \bigcup_{d \in D(n)} I_{d,n} \\ \text{Si } d &\neq d' \text{ entonces } I_{d,n} \cap I_{d',n} = \varnothing \\ \phi(d) &= |I_{d,d}| \\ n &= |F_n| = \sum_{d \in D(n)} |I_{d,n}| = \sum_{d \in D(n)} \phi(d) \end{aligned}$$

Ahora se completa la idea de cómo calcular $\phi(n)$.

Del ejemplo 4 sabemos que si p es primo, entonces $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$.

El ejemplo 3 sugiere que es verdad que si a es un entero positivo y p es un primo tal que a y p son coprimos (es decir p no divide a a), entonces para todo entero positivo k vale que: $\phi(ap^k) = \phi(a)\phi(p^k)$.

Si vale esta propiedad, entonces para $n = p_1^{\alpha_1}...p_t^{\alpha_t}$ valdrá:

$$\phi(n) = \phi(p_1^{\alpha_1})...\phi(p_t^{\alpha_t})$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} F_6 &= \left\{\frac{1}{2\times 3}, \frac{2}{2\times 3}, \frac{3}{2\times 3}, \frac{4}{2\times 3}, \frac{5}{2\times 3}, \frac{6}{2\times 3}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\} = F_2 \cup F_3 \cup I_{6,6} \end{aligned}$$

pues $F_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right\}$ y $F_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right\}$

Entonces:

$$I_{6,6} = F_6 - (F_2 \cup F_3)$$

De esto se deduce que:

$$\begin{aligned} |I_{6,6}| &= |F_6 - (F_2 \cup F_3)| \\ &= |F_6| - (|F_2| + |F_3| - |F_2 \cap F_3|) \\ &= 6 - (2 + 3 - 1) \\ &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí estamos usando que $6 = 2 \times 3$, donde 2 y 3 son números primos positivos y que el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos es la suma de los cardinales menos el cardinal de la intersección.

En el momento de generalizar la identidad anterior a un conjunto F_n, los alumnos aplican un conocimiento previo de gran utilidad: El Principio de Inclusión y Exclusión (PIE) (ver [5]) el cual establece:

PIE. Dados un conjunto finito U y $A_1, \ldots, A_k$, subconjuntos de U, entonces:

$$\left|U - \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |U| + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_j}^{k} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}\right| \tag{2}$$

En nuestro caso si $U = F_n$, entonces $|U| = n$.

De la factorización de 6 en números primos positivos, $6 = 2\times 3$ se obtienen los conjuntos F_2 , F_3 , F_6

Fácilmente los alumnos descubren la siguiente relación entre las fracciones de F_2 y F_3 y F_6. Aquí surgieron preguntas del tipo:

¿Es general que si d divide a n entonces $F_d \subset F_n$?

La demostración de esta propiedad no requiere demasiadas complicaciones, pero es conveniente que el docente formule aquí una sugerencia: si $n = dk$ entonces $d \leq n$ y si $\frac{h}{d} \in F_d$ entonces $h \leq d$, de modo que en la argumentación $\frac{h}{d} = \frac{hk}{n}$debe observarse que $hk \leq dk$ por lo que $\frac{h}{d} \in F_n$.

Para $n = 12 = 2^2 \times 3$ los alumnos ya descubren que:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \left\{\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{5}{12},\frac{1}{2},\frac{7}{12},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{11}{12},1\right\} \\ &= F_6 \cup F_4 \cup I_{12,12} \end{aligned}$$

Ahora, la estrategia para generalizar (1) surge de manera natural:

Sabemos que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ con $p_1, p_2, \ldots, p_t$, primos positivos distintos y los α_i enteros no negativos, para $i = 1, \ldots, t$. Luego, si probamos que:

$$F_n = \left(\bigcup_{i=1}^{t} F_{\frac{n}{p_i}}\right) \cup I_{n,n} \tag{3}$$

entonces reemplazando $A_i = F_{\frac{n}{p_i}}$ en la fórmula (2) del PIE, se tiene la generalización de (1).

La demostración de (3) la realiza directamente el docente: sea $f \in F_n$, si $f = 1$, entonces $F_{\frac{n}{p_1}}$ por ejemplo. Sea entonces $f = \frac{r}{d}$ la representación irreducible de f. Si $d = n$, tenemos que $f \in I_{n,n}$. Si $d < n$, entonces $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_t^{\beta_t}$ con $\beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, \ldots, t$, y para algún i es $\beta_i < \alpha_i$, es decir $\beta_i \leq \alpha_i - 1$. Entonces d es un divisor de $\frac{n}{p_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha i-1} \cdots p_t^{\alpha_t}$. Luego $f = \frac{r}{d} \in F_d \subset F_{\frac{n}{p_i}}$. Recíprocamente $I_{n,n} \subset F_n$, y para cada i vale que $F_{\frac{n}{p_i}} \subset F_n$, por ser $\frac{n}{p_i}$ un divisor de n. Esto prueba la identidad (3).

Es claro que $|A_i| = \left|F_{\frac{n}{p_i}}\right|$

Próximo paso es contar cuántos elementos hay en el conjunto $F_{\frac{n}{p_i}} \cap F_{\frac{n}{p_j}}$ cuando $i \neq j$.

Ahora, $x \in F_{\frac{n}{p_i}} \cap F_{\frac{n}{p_j}} \Leftrightarrow x = \frac{b}{\left(\frac{n}{p_i}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{n}{p_j}\right)}$ con b y c enteros tales que $1 \leq b \leq \frac{n}{p_i}$ y $1 \leq c \leq \frac{n}{p_j}$. Entonces $bp_i = cp_j$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, la descomposición en primos es única, así que $b = b_1 p_j$ y, por lo tanto, $x = \frac{b_1}{\left(\frac{n}{p_i p_j}\right)} \in F_{\frac{n}{p_i p_j}}$. Recíprocamente, como $\frac{n}{p_i p_j}$ es divisor de $\frac{n}{p_i}$ y $\frac{n}{p_j}$, se ve que $F_{\frac{n}{p_i p_j}} \subset F_{\frac{n}{p_i}} \cap F_{\frac{n}{p_j}}$.

Por inducción podemos afirmar que para cualquier intersección de h conjuntos de la forma $F_{\frac{n}{p_i}}$ vamos a obtener:

$$\bigcap_{i=1}^{h} F_{\frac{n}{p_i}} = F_{\frac{n}{p_1 \cdots p_h}}$$

Y, por consiguiente:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{h} F_{\frac{n}{p_i}}\right| = \left|F_{\frac{n}{p_1 \cdots p_h}}\right| = \frac{n}{p_1 \cdots p_h} \tag{4}$$

Ahora utilizamos (2), (3) y (4) y obtenemos:

$$\begin{aligned} |I_{n,n}| &= |F_n| + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_j}^{k} \left| F_{n_{i_1}} \cap F_{n_{i_2}} \cap \cdots \cap F_{n_{i_j}} \right| \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k} \right) + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \end{aligned}$$

Para la última identidad, observamos que:

$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \right) + \cdots + (-1)^k \frac{1}{p_1 \cdots p_k} \\ = & \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \end{aligned}$$

se deduce de la conocida relación que dá los coeficientes de un polinomio como funciones simétricas de las raíces (ver [3] por ejemplo).

En definitiva se llega a:

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \qquad (5)$$

3. Conclusiones

Aquí hay que observar que la demostración a través del PIE presenta algunas ventajas didácticas sobre la que aparece en la bibliografía universalmente utilizada.

En efecto, para usar el PIE es frecuente definir los conjuntos de la forma $A_p = \{m : p \text{ divide a } m\}$ y tanto el cardinal de los A_p y como el de las intersecciones hay que calcularlos, en cambio con esta técnica los cardinales están en función de los que sabemos que tienen cardinal .

Un alto porcentaje de alumnos utiliza la fórmula pero ya con el concepto elaborado y resuelve las aplicaciones que se han propuesto posteriormente.

3.2 Evaluación Diagnóstica

El escenario elegido para realizar esta experiencia fueron las comisiones de trabajos prácticos donde es posible obtener un seguimiento más cabal de los distintos grupos debido a la relación docente-alumno.

En el enfoque tradicional los estudiantes no se involucraron en la resolución de los problemas planteados en relación con este concepto tal como lo hicieron con esta técnica que propone trabajar con fracciones, objetos que le son familiares. Debe observarse que si bien la fórmula (5) demostrada para $\phi(n)$ es interesante a los fines teóricos, para fines prácticos es de mayor utilidad la fórmula:

$$n = \sum_{d \in D(n)} \phi(d) \tag{6}$$

En particular para los alumnos de Ingeniería de Sistemas, la fórmula (6) toma mayor relevancia por su carácter recurrente. Un porcentaje significativo incorporó el cálculo de la función $\phi(n)$ de Euler en forma análoga a algoritmos como derivación e integración. Esta conclusión surge de comparaciones con años anteriores y segmentos de distinta formación.

Referencias

[1] Aguado, José Luis; Aguirre, Emilio. *Una experiencia didáctica para introducir el concepto de la (fi) de Euler en el nivel medio- Ier.* Encuentro de la Sociedad Matemática Nicaragüense (SMN)- Febrero de 2004

[2] Aguado, José L., Diez, Graciela, Rébora, Laura, *Diagramas de Karnaugh y Principio de Inclusión y Exclusión*, IX Encuentro Nacional I Internacional Sobre Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería. Universidad Tecnológica, Facultad Regional Nacional, Concepción del Uruguay, Argentina. Octubre de 2000.

[3] Aguado, José Luis., *Apuntes de Álgebra I.* UNCPBA. 2006

[4] Aguado, José Luis., *Apuntes de Matemática Discreta.* UNCPBA. 2006

[5]Grimaldi, Ralph P., Matemáticas, discreta y combinatoria. Addison-Wesley Iberoamericana. 1989.