

Corrección a una equivocación de Karl Pearson (1904): la suma de fracciones de Mendel no produce acoplamientos genéticos incompletos

Conrado Ruiz Hernández*

Resumen. A comienzos del siglo xx, matemáticos prominentes encontraron una conexión entre el binomio de Newton y las leyes de Mendel con el objetivo de proyectarla a poblaciones enteras considerando a descendientes de varias generaciones. Dentro de esta búsqueda, en 1904 Karl Pearson formuló objeciones sobre los preceptos de Mendel, en particular respecto a los descendientes puros (dominantes y recesivos), que provienen de progenitores híbridos que a su parecer se constituyen en acoplamientos genéticos incompletos, resultado de la suma de fracciones. Se realiza el análisis matemático de este algoritmo (considerando el contexto biológico de su aplicación) y se concluye que los descendientes puros previstos en las leyes de Mendel son acoplamientos genéticos completos.

Palabras clave: leyes de Mendel, suma de fracciones de Mendel, descendientes puros, acoplamientos genéticos y binomio de Newton.

Clarifying the Karl Pearson Controversy (1904): Over the Incomplete Couplets Produced by Mendel's Fraction-Addition Method

Abstract. Early in the 20th century, leading mathematicians found a link between Mendel's Laws and Newton's Binomial. This enabled multigenerational studies of entire populations. In this regard, Karl Pearson in 1904 raised objections to Mendel's predictions that the 'pure' (dominant and recessive) descendants of hybrid ancestors turn out to be incomplete assemblies when using the sum of fractions used by Mendel in his 1866 article "Experiments in Plant Hybridization". This algorithm is analysed from a mathematical standpoint and its biological context. The author argues that the pure descendants, under Mendel's laws, are complete couplets.

Key words: Mendel's Laws, Mendel's Fraction-Addition Method, pure descendants, genetic couplets, Newton's binomial theorem.

Introducción

Cerca de 1850, Gregor Johann Mendel, comenzó formalmente el estudio de la transmisión de los caracteres hereditarios, en particular sobre una variedad de chícharo doméstico (*Pisum sativum*), la biología pasaba por una fase intensa de consolidación como ciencia: la teoría celular adquiriría consistencia, la fisiología animal tomaba un camino experimental y Charles Darwin trabajaba arduamente, al

igual que Alfred Russell Wallace, en organizar sus ideas sobre la evolución. En otros campos, se tenía un intenso frenesí intelectual por profundizar en el conocimiento existente, en particular sobre lo contenido en el interior de la célula (que ya se reconocía como la unidad fundamental de los seres vivos) y de las estructuras celulares que en ese entonces eran una mera sospecha. En este escenario, Mendel intentó descifrar, sin duda con éxito, el mecanismo que gobierna la transmisión de los caracteres

hereditarios, en una época en que todavía se desconocía la existencia de los genes. ¿Cómo pudo ocurrir esto? Él combinó un extenso y exquisito trabajo experimental con el raciocinio matemático sobre el que tenía un dominio considerable (era profesor de horticultura y matemáticas en el nivel superior).

1. Síntesis del mendelismo

Los principios o leyes que formuló Mendel predicen la descendencia esperada cuando se cruzan dos organismos biológicos que poseen características puras para un mismo carácter o híbridas para fines reproductivos; es decir, que ambos progenitores contienen tanto el carácter dominante (el que se manifiesta cuando está presente, al menos, en uno de los gametos o células reproductivas) y el recesivo (el que sólo se presenta cuando los dos gametos son portadores del mismo carácter). Como resultado de los experimentos que efectuó, sintetizó en su primer artículo “Experimentos en la hibridación de plantas” (1866) sus hallazgos en la siguiente suma de fracciones (en mayúscula se indica el carácter dominante y en minúscula el carácter recesivo):

$$A/A + A/a + a/A + a/a = A + 2Aa + a \quad (1)$$

De acuerdo con el sistema taxonómico que inventó, para cada carácter o atributo susceptible de heredarse se designa una letra diferente. Es necesario aclarar que Mendel sólo estaba en posibilidad de observar formas de apariencia (A , a o Aa) y no estructuras celulares invisibles que él desconocía, aunque posiblemente las intuía. Considerando estas limitaciones, él tenía nociones de las teorías celular y de fertilización que los estudiosos de los seres vivos –ahora denominados biólogos– conocían en ese momento. Como ejemplo, él pensaba que los caracteres hereditarios presentes en los gametos se unían, fusionaban o juntaban en los descendientes. Sabía con toda certeza que cuando se cruzan dos organismos puros para un mismo carácter, ya sea dominante o recesivo, la descendencia producida tendría la misma característica de los progenitores: $AA = A$ y $aa = a$; ambas reducciones son formales y no estructurales, ya que uno \times uno = uno, pero genéticamente se tiene que: $AA = A + A$ y $aa = a + a$ (debido a la agregación de los caracteres hereditarios en los descendientes).

La primera de sus leyes (uniformidad de caracteres) establece que cuando se cruzan dos líneas puras, para caracteres dominante y recesivo, se obtienen descendientes híbridos iguales: $A \times a = Aa$ (incluyendo aquí a la permutación: aA), por lo que $Aa = A + a$. La segunda ley (segregación de

caracteres) establece que cuando se cruzan dos organismos híbridos ($Aa \times aA$) la descendencia tendrá las proporciones siguientes: 1 (organismo puro dominante): 2 (organismos híbridos): 1 (organismo puro recesivo). Finalmente, la tercera ley (independencia de caracteres) de la herencia predice que las combinaciones posibles entre varias características son independientes y pueden mezclarse de todos los modos posibles, esto es, 3^n .

2. Crítica de Karl Pearson (1904) al trabajo de Mendel

Una controversia relevante que impulsó a comienzos del siglo xx el destacado matemático inglés Karl Pearson fue respecto a ese artículo de Mendel (1866). Un texto precursor en el abordaje científico de la herencia biológica, que consiste en el señalamiento de que los descendientes puros (A o a) son acoplamientos incompletos que resultan de la suma de fracciones (1). En la opinión de Pearson, el primero y tercer término del trinomio resultante debería ser: AA o A^2 , así como aa o a^2 , ya que los especímenes puros, presentes en la ecuación de Mendel, aparecen como alelos (elemento de un cromosoma que determina específicamente a un carácter hereditario) homocigotos impares, al contrario de los híbridos que sí muestran a la pareja de alelos provenientes de ambos gametos: Aa . Este autor, sugiere, a través de la aplicación del binomio de Newton: $(A + a)^2 = AA + 2Aa + aa$, que Mendel estaba equivocado (cabe aclarar, que para el visionario de la genética, los híbridos Aa o aA son una categoría taxonómica), lo que pudo deberse a la precaria cultura matemática que poseía (Pearson lo insinúa, quizá con prejuicio); por esta razón, habría incurrido en un disparate verdaderamente pedestre (inaceptable, inclusive, para un estudiante de primaria). Esto equivaldría a errar en la mecanización más elemental de este binomio: $(a + b)^2 = a + 2ab + b$ (este resultado equívoco es inadmisibles, a menos que haya una explicación de fondo), en donde sin duda alguna Mendel sí conocía el resultado correcto: $a^2 + 2ab + b^2$.

¿Qué expresa Mendel en el algoritmo que utilizó? (figura 1).

Con las combinaciones presentadas en un esquema o tabla de doble entrada (**asumiendo la probabilidad de que por cada dos gametos uno portara la forma dominante y el otro a la recesiva**) en el que el numerador es gameto masculino y el denominador el gameto femenino, Mendel dedujo la proporción teórica de los descendientes de progenitores híbridos.

Ahora bien, al mecanizar la suma de fracciones, se obtiene otro miembro (con sombreado):

$$\frac{A}{A} + \frac{A}{a} + \frac{a}{A} + \frac{a}{a} = \frac{Aa + AA + aa + aA}{Aa^*} = A + 2Aa + a \quad (2)$$

El cual, considerando el señalamiento de Mendel respecto a que las fracciones –los productos– y las literales son individuos biológicos distintivos y unitarios (matemáticamente vale uno la unidad) en realidad fungen como un teorema (verdad evidente que debe demostrarse), entonces se tiene que: $AA = A$, $aa = a$, $Aa + aA = 2Aa$ (en donde se aplica el conocido principio “el orden de los factores no altera el producto”) y el mínimo común divisor (Aa^*) se reduce a la unidad (cuyo valor es uno). Se realiza una reducción por deducción, término a término, a la suma de productos, aunque también esto mismo puede hacerse directamente sobre la suma de fracciones. Es afortunado que Mendel haya conservado a las literales reducidas en el resultado final ($A + 2Aa + a$), ya que el numérico (1:2:1) es de poca utilidad genética.

Si bien Mendel no incluyó en su planteamiento original el miembro sombreado, pero quizá pudo convenir para evitar confusiones (como la que tuvo Pearson y otros), convendría hacerlo. Es de notar que en el miembro sombreado, resultado de la mecanización de la suma de fracciones, sí aparecen las literales dobles de los descendientes puros (AA y aa), que al final quedan reducidas a una sola letra. Esta simplificación es sólo formal (taxonómica) y no estructural.

3. Discusión

Mendel elaboró sus planteamientos sobre una plataforma taxonómico-hereditaria basándose en las formas o apariencias que él verdaderamente estuvo en posibilidad de observar en los especímenes que estudió. No poseía información –al igual que ninguno otro de sus contemporáneos– sobre estructuras celulares ni de mecanismos propiamente genéticos. Karl Pearson ya disponía de una información más completa del contenido de la célula y de los mecanismos que intervienen en la fertilización, por lo que sus planteamientos podían orientarse hacia una base citológico-genética, por ejemplo, de la existencia de los cromosomas, de los genes y de que los gametos eran haploides (es decir, que poseen la mitad de los cromosomas que tienen las células somáticas). Debíó hurgar más en el fundamento axiomático (propiamente lógico y matemático) de las leyes de

Mendel y no asumir una crítica superficial motivada por el fanatismo que al comienzo del siglo XX despertaba ya fuera a favor o en contra.

Originalidad y aporte de este estudio

La crítica a la obra de Mendel se orienta, por lo general, hacia presunciones especulativas acerca de su probidad como investigador o a consideraciones superficiales respecto a sus planteamientos matemáticos. Ocurre con frecuencia que lo señalado por un autor, como es el caso de Karl Pearson, es copiado y enarbolado de manera irreflexiva por otros. Un obstáculo que debió sortearse en esta investigación fue evitar alegatos engorrosos únicamente soportados en citas librescas (en casos con información equivocada o tergiversada). La lección que deja este estudio es que el abordaje historiográfico para estos casos debe sustentarse consultando las fuentes originales y sin intermediarios, claro está, en la medida que esto sea posible.

Conclusiones

Se dispone de evidencia suficiente para afirmar que, desde las perspectivas taxonómico-hereditaria y citológico-genética, se vislumbra esta igualdad: $A + 2Aa + a = AA + 2Aa + aa$. En donde las literales solas A y a no son acoplamientos incompletos, sino organismos indivisibles de apariencia A y a del mismo modo que lo es el híbrido: Aa (véase anexo). Muy cerca de cumplirse 150 años de la publicación y más importante de Mendel, es inadmisibles que por la opinión de unos pocos autores influyentes (tanto matemáticos como historiadores) se le siga considerando injustamente como un escolapio en matemáticas. Muy, por el contrario, él sí era un genio.



Figura 1. Organización del modelo de Mendel en su diseño empírico.

		Células polínicas	
		A	a
Células germinales	A	A A	a A
	a	A a	a a

Fuente: adaptación de Mendel, 1866.

Franklin, A. (2008). The Mendel-fisher controversy: an overview, en Allan Franklin (ed.), *Ending the Mendel-fisher controversy* (pp. 1-77). Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

Mendel, G. (1866). Experiments in plant hybridization, en Stern C. y E. Sherwood (1966), *The origin of genetics: a Mendel source book* (pp. 16, 24, 29-30). San Francisco: W. H. Freeman.

Olby, R. (1997). *Mendel, mendelism and genetics*. Disponible en <http://www.mendelweb.org/>

Pearson, K. (1904). Mathematical contributions to the theory of evolution. XII. On a generalised theory of alternative inheritance, with special reference to Mendel's laws. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 72, 505-509.

Ruiz Hernández, C. (2009). El razonamiento matemático de Mendel. *Ciencias (96)*, 42-47.

Schwartz, J. (2008). *In pursuit of the gene: from Darwin to DNA*. Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press.

Wilczynski, J. (1942). Contributions to the theory and evolution of mendelian generalizations. *Acta Biotheoretica*, 6, 97-152.

Anexo

Anexo. Fundamentación axiomática de las leyes de Mendel.

Ecuación descrita por Mendel en 1866 para calcular la descendencia esperada con progenitores híbridos (carácter dominante en mayúscula y recesivo en minúscula):

$$\frac{A}{A} + \frac{A}{a} + \frac{a}{A} + \frac{a}{a} = A + 2Aa + a$$

Teorema	Argumentación axiomática	Comprobación con el método axiomático de Newton*****
<p>“Las fracciones son individuos biológicos distintivos y unitarios”.*</p> <p>Por extensión, los productos y literales son también unidades.</p>	<p>Definiciones:</p> $\underline{A} = AA = A = 1^{**}$ A $\underline{a} = aa = a = 1^{**}$ a <p>De modo similar para los híbridos:</p> $\underline{A} + \underline{a} = Aa + aA = 2Aa = 2$ $a \quad A$ <p>Origen de los híbridos:</p> $AA \times aa = 2Aa + 2aA^{***}$ <p>Pregunta adicional:</p> $\zeta Aa = A + a^{*****}$	<p>Solución factorizando el binomio (del mismo modo en el que lo hizo Pearson, con un resultado que él creyó diferente):</p> $(A + a)^2 =$ $A + 2Aa + a^{*****}$ <p>“Quot erat demonstrandum”</p>

*Mendel establece atributos específicos para la simbolización matemática y descriptiva de sus planteamientos que, para los efectos de esta demostración, es necesario darles el carácter de un teorema (verdad evidente que generalmente requiere ser demostrada).

**Mendel reduce a unidades a los descendientes de progenitores puros tanto para cruzamiento entre dominantes (AA) como recesivos (aa). Esto no es una paradoja: las literales son abstracciones matemáticas indivisibles con particularidades taxonómicas y hereditarias sui generis.

***Representación matemática de la primera ley de Mendel (uniformidad de caracteres) que se aplica a la primera generación (F1) de híbridos.

****No se dispone de evidencia acerca de que Mendel haya llegado a formular esta pregunta. Sin embargo, él infirió de forma correcta que de cada dos gametos de híbridos, probabilísticamente uno portaría el carácter dominante y el otro al recesivo.

*****Con esta modalidad de método axiomático, partiendo inicialmente de una demostración matemática estricta, se admite que el comportamiento real del fenómeno observado sea próximo al ideal establecido, lo que es contrario al ideal de la sistematización deductiva (con aplicación primordial en la geometría) y a la rigidez de los primeros principios establecidos por Aristóteles.

*****Representación matemática de la segunda ley de Mendel (segregación de caracteres), de la cual se deduce la tercera (de las combinaciones independientes posibles de acuerdo con los caracteres observados: 3^º), así como el cálculo de los organismos híbridos totales (2^º) y la cantidad de muestra mínima de acuerdo con el diseño (4^º).