¿Qué escenario demográfico se quiere para el mundo: crecimiento lento, población estacionaria o la extinción?

Manuel Ordorica*

Según toda probabilidad, si dejamos que las cosas sigan, no llegarán hasta su término. Y los medios de destrucción que nos quedan no permiten esperar la apagada perspectiva de gran asilo de ancianos benévolamente mantenidos por los trabajadores inmigrados del Tercer Mundo… Nada prueba que la más antigua y brillante civilización que jamás se haya actualizado en el espacio-tiempo deba estar definitivamente condenada. Todo hace pensar incluso que aún nos queda una pequeñísima posibilidad de salir del apuro. Sí, la esperanza está en el prado, corre pronto hacia ella, corre pronto, que se va.

Pierre Chanu (1982)

Recepción: 1 de agosto de 2008
Aceptación: 13 de agosto de 2008

***Secretario General de El Colegio de México.
Correo electrónico: mordori@colmex.mx**

Resumen. En demografía se han desarrollado una diversidad de funciones matemáticas con el fin de representar la dinámica de la población, entre las que se encuentran la exponencial y la logística. Estas funciones describen parcialmente la realidad, debido a que las hipótesis que están detrás de las representaciones matemáticas antes mencionadas no captan la dinámica de la población. El objetivo del presente trabajo es construir una función matemática que muestre la evolución de la población del planeta entre 1980 y el 2005, al tiempo que refleje en forma adecuada la trayectoria de la tasa de crecimiento de la población observada en el periodo señalado. También se realizó un pronóstico de la población mundial al 2050 a partir de la función encontrada.

Palabras clave: población mundial, proyecciones de población, demografía matemática, poblaciones estables, población estacionaria, inercia demográfica, función logística, crecimiento exponencial.

Which Demographic Scenery we Would Like for the World: Slow Growing, Stationary Population or Extinction?

Abstract. In demography there are a variety of mathematical functions that are used to represent population dynamics, such as the exponential and logistic functions. However, these only partially describe reality because the assumptions behind their mathematical representations do not entirely capture the dynamics of populations. The aim of this study was to propose a mathematical function that reflects the evolution of human populations between 1980 and 2005, and which adequately reflects the trajectory of the rate of population growth observed within this period. Using this new function we forecaste the world's populations to the year 2050.

Key words: world population, population projection, mathematical demography, stable population, stationary population, demographic inertia, logistic function, exponential growth.

Introducción

El 11 de julio de 1987 nació un niño yugoeslavo bautizado con el nombre de Gaspar Matej. Con él, la humanidad llegó a 5 mil millones de habitantes. Hoy Gaspar ya pasó los 20 años de vida. Doce años después, el 12 de octubre de 1999, el planeta llegó a 6 mil millones de individuos. En este periodo, la población de la Tierra aumentó en 1 000 millones de personas. Es muy probable que el habitante 6 000 millones haya nacido en China o en la India, por el elevado número de habitantes que tienen ambas naciones, lo que eleva la probabilidad de nacimiento en estos países. Según estimaciones de Naciones Unidas, en el 2012 habría 7 000 millones de individuos. El crecimiento demográfico actual del planeta es de alrededor de mil millones de personas cada 13 años. La esperanza de vida en el mundo es hoy de 67 años, cuando hace medio siglo era 20 años menor. El número medio de hijos por mujer es de 2.5 y hace 2 decenios era del doble. El siglo xx, de grandes cambios, fue el periodo con el mayor incremento demográfico ocurrido en la historia. En la tercera década de ese mismo siglo, la población mundial ascendió a 2 mil millones de personas. Se necesitaron miles de años para que este hecho ocurriera, mientras que en prácticamente siete décadas la población mundial pasó de esa cifra a 6 mil millones de habitantes en 1999. El crecimiento demográfico actual del planeta es de 1.1% anual. ¿Qué significa esta cifra? Significa que la población se duplicaría en ciclos de un poco más de 60 años, de continuar ese ritmo de incremento anual. ¿Este será el porvenir que nos espera?

Una ventaja que tenemos quienes realizamos proyecciones de población, es que éstas tienen una inercia notable por lo que las previsiones a varios lustros de distancia son altamente posibles. Por ejemplo, las personas que demandarán el pago de sus pensiones en el 2050, en el caso de que tengan esa prestación, nacieron antes de 1985.

Desde tiempos inmemoriales los seres humanos han intentado conocer por anticipado lo que acontecerá. Durante la Edad Media los adivinos se valían de la cábala y la astrología, y sus herramientas de predicción, consistían en bolas de cristal y de mapas del zodiaco. Esta profesión era lucrativa y hasta cierto punto, segura, pues los cambios que se observaban en los miembros de la sociedad eran imperceptibles; nacían, jugaban, trabajaban, peleaban, conspiraban, se casaban y morían. Cartomansianas, lectores o lectoras de la palma de la mano y del café tenían numerosos clientes para que les adivinaran su porvenir. Hoy, especialistas en la elaboración de pronósticos, usando modelos teóricos sofisticados, métodos matemáticos y computadoras potentes, en lugar de cartas o bolas de cristal intentamos aproximarnos al mañana. Aunque podemos decir que el futuro se construye, no viene dado. En consecuencia, la prospectiva puede ayudar a prevenir consecuencias indeseables y a orientar los procesos de toma de decisiones a través de la detección de tendencias portadoras del futuro. Este interés va más allá de la simple curiosidad, muchos están interesados en conocer la disponibilidad de alimentos, ropa, vivienda, de millones de personas, mientras que también hay interés en el estudio de los efectos de la dinámica demográfica sobre la economía, la sociedad, la política y el ambiente. A fin de descubrir el futuro demográfico, se ha construido un elevado número de modelos matemáticos, que intentan replicar el pasado y el presente para determinar escenarios posibles sobre el futuro. Aunque según algunos personajes de la historia, parecería que ya todo está escrito. Lo que fue, eso será; lo que se hizo, eso se hará. "Nada nuevo hay bajo el sol". Hace ya casi tres mil años que Qohélet escribió esta frase pesimista.

Existen diversos métodos para hacer prospectiva demográfica, entre los que destacan, los de tipo matemático, económico y las proyecciones a través del método de los componentes, este último es el que se utiliza con mayor frecuencia porque permite incorporar la estructura por edad de la población, planteando hipótesis de cada uno de los componentes que intervienen en el cambio demográfico. En el presente trabajo se desarrollará un modelo de tipo matemático, en el que se construirá una función con el fin de analizar la dinámica poblacional e intentar construir relaciones entre las variables demográficas y, en consecuencia, avanzar en la teoría de las poblaciones no estables. Además intentaremos responder a las preguntas: ¿hacia qué población se dirige el mundo?, ¿en cuánto tiempo?

Los seres humanos desde siempre hemos estado interesados en los números de las poblaciones. Por ejemplo, los números dan su nombre a una parte de la Biblia en la cual la estadística ocupa un lugar importante y aparecen repetidos conteos de población. Platón en el libro de las *Leyes* intentaba obtener una cifra que posibilitara la mejor planeación de la sociedad. Decía que:

> […] Para número adecuado sea el de cinco mil cuarenta el de los terratenientes y defensores de su lote; a tierra y habitaciones divídanselas parecidamente en otras tantos lotes, –varón y lotes apareados[…] Mas nosotros decimos que hemos elegido correctísimamente el número cinco mil cuarenta que contiene todas las divisiones hasta el doce, partiendo del uno,– excepción, el once[…][1]

Dejando de lado la caprichosa cifra de 5 040, el interés de la ciudad-estado exigía que su población no creciera desmesuradamente y que no disminuyera en forma alarmante. Según los griegos había dos razones: una ciudad despoblada es una ciudad muerta y la sobrepoblación es un factor de conflictos sociales. Señalaban que la gente peleaba por un puesto o por un pedazo de tierra. En este caso nos encontramos ante la presencia de un ideal estacionario según el cual la población debía permanecer invariable.

A lo largo de la historia de la demografía se han desarrollado diversas funciones matemáticas, con el propósito de describir dos posiciones extremas en torno a la evolución de la población, sobresaliendo como las más conocidas la exponencial y la logística, aplicadas a la descripción de la población total. Los esfuerzos por establecer leyes matemáticas que representaran el crecimiento demográfico se promovieron, debido a la creciente disponibilidad de información y al desarrollo de modelos matemáticos para la descripción de datos. Uno de los primeros en este intento fue Quetelet en 1835. Él decía que:

1. *Obras completas de Platón*. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad Central de Venezuela, 1983.

> [...] la resistencia o la suma de los obstáculos que se oponen a un crecimiento ilimitado de la población aumenta en proporción al cuadrado de la velocidad con que tiende a aumentar la población.[2]

Ninguna de las representaciones matemáticas mencionadas se ajusta fielmente a la realidad, debido a que las hipótesis no reproducen la dinámica de los componentes del crecimiento de la población. Sin embargo, han posibilitado avanzar en la teoría matemática de la demografía, como es el caso de las poblaciones estables desarrollada por Lotka,[3] que es una de las teorías más sólidas en esta disciplina.

La construcción de modelos matemáticos agregados que describen la dinámica demográfica, permiten analizar las posibles trayectorias de la población total y seleccionar la deseada, de acuerdo con las condiciones socioeconómicas. Es como observar un cuerpo celeste en el universo, no sabemos por qué se mueve, pero podríamos intentar modificar su trayectoria si así lo quisiéramos, claro, de ser posible. Lo ideal es disponer de la población y sus componentes por sexo y edad, lo que permite conocer las causas de la evolución poblacional. Es importante señalar que la representación matemática de la evolución de la población es un primer acercamiento analítico antes de llegar a la modelación con información más específica.

El caso general lo tenemos cuando la tasa de incremento demográfico se expresa como una serie de potencias de la población:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = r_0 + r_1 P(t) + r_2 P^2(t) + ... \qquad (1)$$

Donde:
$P(t)$ = población en el momento t
r = tasa de crecimiento demográfico
t = tiempo

Cuando la serie que está en el lado derecho de la ecuación queda reducida sólo al primer término se obtiene la función exponencial. Esto se logra resolviendo la ecuación diferencial lineal de orden uno. En el caso de que consideremos los dos primeros términos del segundo lado, obtenemos la logística. Es importante señalar que las expresiones de las igualdades puestas en forma de una ecuación diferencial son más útiles y más fáciles de interpretar para establecer la dinámica del ritmo de aumento de la población.

La ecuación diferencial es la siguiente:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = r_0 \qquad (2)$$

En donde r_0 es una constante. Este es el caso más simple. Alfred Lotka analizó con profundidad esta función, con sus implicaciones en la composición por edad de la población.

La expresión anterior está vinculada a la visión pesimista de Robert Malthus expuesta en su obra *Ensayo sobre el principio de la población*. Malthus afirmaba que el crecimiento demográfico libre de contenciones era un crecimiento exponencial, mientras que la producción de alimentos según su argumento era un crecimiento lineal. Puesto que la tasa de crecimiento de la población era más acelerada que la de los alimentos, a partir de un cierto límite de la población, Malthus pronosticaba que habría una escasez de alimentos y en consecuencia una gran hambruna. Dicha hambruna jamás se produjo debido al desarrollo tecnológico.

A partir de la hipótesis de que la tasa de crecimiento demográfico es constante se deriva, como ya se dijo, la teoría de las poblaciones estables desarrollada por Lotka. Se supone además que la población es cerrada. Hipótesis que se cumple para el análisis de la población mundial, ya que todavía está lejos la emigración a otros planetas. La función exponencial que surge de la ecuación (1) es: $P(t) = P(0)\, e^{rt}$, donde $P(0)$ es la población inicial y las demás variables ya se definieron. La ley de Malthus no puede representar en forma indefinida el crecimiento de una población, puesto que los valores que da sobrepasan todos los límites en el largo plazo. De ahí surge la ley de Verhulst, quien es el primero en aplicar la logística en 1838. Él sostenía que:

> [...] si la población se expande libremente sobre un país no ocupado, la tasa es constante, pero si crece en un área limitada, la tasa porcentual de incremento debe tender a reducirse, en forma que la tasa porcentual de incremento es cierta función de la población misma, y cae continuamente al aumentar los números de la población.

Cuando se supone que la tasa de crecimiento demográfico es función lineal de la población, se desprende la ecuación logística.[4] Esto significa eliminar los sumandos de la serie en la ecuación (1) de r_2 en adelante:

2. En: *Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas. Estudios sobre población*, número 17. Naciones Unidas, 1953.
3. Lotka, Alfred. *Teoría analítica de las asociaciones biológicas*, CELADE, 1969. Alfred James Lotka, nacido en 1880 en Polonia, de padres misioneros americanos, puede considerarse como el "padre del Análisis Demográfico". De su amplia producción se destaca su obra "Matemática para demógrafos".
4. Los supuestos de la logística son los siguientes: el crecimiento demográfico se presenta dentro de un área finita y debe tener un límite superior, de otra forma sigue la hipótesis de que la población puede aumentar infinitamente dentro de un área finita, lo que es difícil de aceptar; el límite inferior debe ser cero, es decir, es imposible suponer una población negativa; dentro de cada época o ciclo de población, la tasa de crecimiento de la población no ha sido constante en el tiempo. Al principio crece lentamente, pero la tasa aumenta constantemente hasta cierto punto, donde alcanza un máximo, el cual es un punto de inflexión de la curva de crecimiento demográfico.

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=r_0+r_1P(t) \qquad (3)$$

Esta curva es un refinamiento del crecimiento exponencial y adopta la forma de una "S" invertida. Cuando una magnitud crece en un sistema finito, a partir de cierto momento el tamaño del sistema limita el crecimiento de la magnitud al no haber recursos abundantes suficientes para seguir permitiendo el crecimiento exponencial. En un comienzo Verhulst supuso que los obstáculos aumentan "exactamente en la misma proporción que la población superabundante", pero más tarde reemplazó este supuesto con la hipótesis de que los obstáculos "aumentan en proporción al porcentaje del exceso de población respecto de la población total" (Verhulst, 1838). Dicha función se genera a partir de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=b-mP(t) \qquad (4)$$

En donde b y m son mayores que 0. Esta función permaneció olvidada por muchos años debido a la falta de datos. En 1920, Pearl y Reed redescubrieron la función logística. Se supone que el ambiente físico es constante y que la población aumenta a partir de un límite inferior asintótico 0, hasta un límite superior (Pearl y Reed, 1920). Durante el decenio de los años veinte del siglo XIX esta función fue objeto de mucha atención. Se suponía que la dinámica de la población total tenía un punto asintótico difícil de establecer. ¿Qué elementos deberían de considerarse para establecer dicha cifra límite? No es fácil responder a esta pregunta, por lo que es muy posible que la dificultad en determinar la cota superior de la población redujera sus aplicaciones. Sin embargo, si se considera que la tasa de natalidad y la tasa de crecimiento de la población evolucionan de acuerdo con la logística, es muy probable que se esté más cerca de la realidad, ya que esta función reproduce la transición demográfica, a partir de cierto momento, lo cual está vinculado a la teoría de las poblaciones. Según observaciones en varios países, es aceptable suponer que la tasa de natalidad sigue una trayectoria de acuerdo con la función logística, sin embargo, la tasa de mortalidad desciende hasta un punto a partir del cual empieza a crecer. Esto se explica por el efecto de la estructura por edad de la población en la tasa de mortalidad.

Todo esto nos lleva a plantear que es más probable hacer un supuesto sobre la cota inferior de la tasa de crecimiento de la población que sobre la población misma o sobre la tasa de mortalidad. Es aceptable la hipótesis de que la dinámica en el ritmo de crecimiento demográfico total se comportará como la función logística. Podemos pensar que el crecimiento demográfico cero podría ser la asíntota inferior, mientras que es casi imposible decir cuál es el límite o cota superior al que tiende la población. Además podríamos establecer diversos escenarios, como por ejemplo, un límite positivo, digamos 0.5% y un límite negativo, como -0.5% anual. Esto permite analizar tres escenarios en el largo plazo. Es importante señalar que una característica de la función logística es que para valores pequeños de t nos recuerda a la exponencial, mientras que en el caso de valores grandes de t se estabiliza tendiendo cada vez más al valor límite.

Un problema que se presenta con estos modelos es la dificultad de avanzar en la teoría, debido a que la formulación matemática sobre la estructura por edad y otros indicadores demográficos se vuelve más compleja cuando suponemos que la tasa de crecimiento demográfico no es constante.

¿Podríamos usar la logística para representar la evolución de la tasa de crecimiento demográfico en el caso de la población del mundo? Éste es el propósito de este trabajo. Sabemos que desde finales de los sesenta empezó a descender la tasa de crecimiento demográfico. Debido a su forma gráfica, esta función no permite describir la dinámica de la intensidad del crecimiento poblacional antes de 1965, puesto que dicha tasa se incrementó hasta el segundo quinquenio de los sesenta donde se observó el máximo y luego inició su declinación. Sin embargo, sí es posible utilizarla cuando se encuentra en su fase descendente en la intensidad del crecimiento poblacional, porque es poco probable que en el corto y mediano plazo revierta su tendencia y empiece a crecer nuevamente. Es difícil pensar que la tasa de crecimiento de la población podría en el corto y mediano plazo cambiar su tendencia decreciente, debido a la inercia demográfica.[5]

1. Objetivo

El objetivo del presente trabajo es construir una función matemática que describa la dinámica de la tasa de crecimiento

5. El crecimiento de la población es uno de los mejores ejemplos que se pueden utilizar para analizar el concepto de inercia. Por ejemplo, supóngase un barco que va surcando los mares, ¿qué ocurre si lo queremos detener? A partir del momento en que paramos los motores comienza a perder velocidad, pero por la ley de la inercia sigue avanzando. Con el crecimiento poblacional se presenta un fenómeno similar. Aunque detengamos dicho crecimiento, la población sigue incrementándose. También significa que si quisiéramos aumentar el crecimiento de la población no lo podríamos hacer puesto que resulta muy difícil revertir procesos sociales en este tipo. Lo mismo ocurriría con el barco. ¿Por qué si disminuye la tasa de crecimiento demográfico se suma un número mayor de habitantes? Porque las poblaciones tienen oculto el impulso de su crecimiento en la estructura por edades. Con una población joven, el número de padres y madres potenciales van en aumento porque esas generaciones ya han nacido. A esto se le conoce como inercia demográfica.

demográfico y, en consecuencia, la evolución de la población entre 1980 y 2005, y sus perspectivas, a fin de establecer escenarios de lo que pudiera ocurrir en el corto, mediano y largo plazo. El panorama que se pronostique según las diversas alternativas de crecimiento demográfico será de utilidad para mantener o reformular las políticas poblacionales del siglo XXI en el planeta, pero sobre todo, avanzar en la teoría matemática de las poblaciones humanas.

Según observaciones en varios países, es aceptable suponer que la tasa de natalidad sigue una trayectoria de acuerdo con la función logística, sin embargo, la tasa de mortalidad desciende hasta un punto a partir del cual empieza a crecer.

2. Metodología

Sea:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=r(t) \tag{5}$$

Donde $r(t)$ es la tasa instantánea de crecimiento de la población y es función del tiempo.
Supongamos que se puede representar una declinación a través de la logística, de la siguiente forma:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=k_1+\frac{k_2}{1+e^{a+bt}} \tag{6}$$

La ecuación anterior la podemos expresar también de la siguiente manera aprovechando las propiedades de la derivación:

$$\frac{d\ln P(t)}{dt}=k_1+\frac{k_2}{1+e^{a+bt}} \tag{7}$$

Integrando ambos lados de manera indefinida, tenemos:

$$\ln P(t)=\int(k_1+\frac{k_2}{1+e^{a+bt}})dt \tag{8}$$

De lo anterior se tiene la siguiente igualdad:

$$\ln P(t)=k_1t+\frac{k_2}{b}(bt-\ln(1+e^{a+bt}))+c \tag{9}$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados de la igualdad y estableciendo las condiciones iniciales, se tiene la ecuación final:

$$P(t)=P(0)(1+e^{a})^{\frac{k_2}{b}}e^{(k_1+k_2)t}(1+e^{a+bt})^{-\frac{k_2}{b}} \tag{10}$$

En la función de $r(t)$ se observa que cuando t tiende a infinito, $r(t)$ tiende a k_1. Esto significa que k_1 es la tasa de crecimiento demográfico a la que tiende la población cuando t tiende a infinito. Los dos primeros factores de la función $P(t)$ son constantes y quedan definidos cuando se realiza el cálculo de la función para $t = 0$, es decir, cuando se establecen las condiciones iniciales. Es importante aclarar que el momento $t = 0$ representa el año de 1980, que es el punto de arranque.
La función $P(t)$ está compuesta por dos constantes y dos funciones en t. La función $e^{(k_1+k_2)t}$ es creciente puesto que es exponencial, mientras que la función $(1+e^{a+bt})^{-\frac{k_2}{b}}$ es decreciente, por lo que amortigua o frena el aumento de la población total.

3. Resultados y su análisis

Para estimar a y b se parte de la ecuación:

$$r(t)=k_1+\frac{k_2}{1+e^{a+bt}} \tag{11}$$

Despejando $a+bt$ se tiene:

$$a+bt=\ln\left[\frac{k_2}{r(t)-k_1}-1\right]=Y(t) \tag{12}$$

La transformación de la ecuación a una forma lineal permite la aplicación del modelo de regresión, el cual posibilita la estimación a y b a través del método de los mínimos cuadrados. Los datos utilizados son las tasas de crecimiento demográfico del mundo calculadas a partir de la publicación de Naciones Unidas en 2005.[6] Estas son: de 0.0173 para 1980 y 1985; de 0.0161 para 1990, de 0.0143 para 1995, de 0.0128 para el año 2000 y de 0.0118 para 2005. La población estimada por Naciones Unidas[7] para 1980 fue de 4 442 millones, de 4 844 millones en 1985, de 5 279 millones en 1990, de 5 692 millones en 1995, de 6 086 millones en 2000 y de 6 465 millones de personas en 2005.

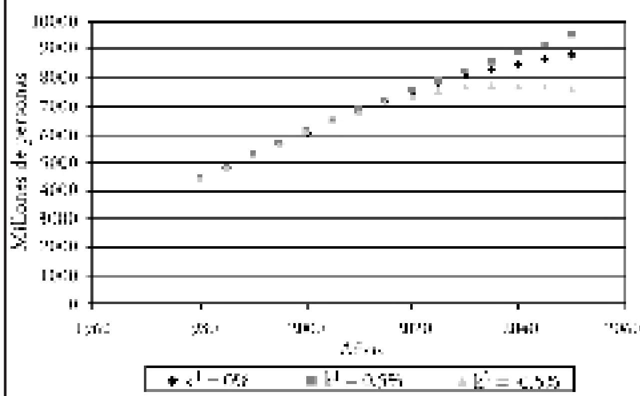
Se elaboraron escenarios para diversos valores de las asíntotas. Los valores de k_1 son: –0.5%, 0% y 0.5%, y los de k_2: 2.5%, 3.0% y 3.5%. Esto nos da un total de 9 escenarios posibles de

6. Las tasas de crecimiento demográfico estimadas para los años exactos, se estimaron tomando un promedio aritmético entre las tasas quinquenales de incremento poblacional de dos periodos consecutivos del libro: *World Population Prospects* de 2005 de Naciones Unidas.
7. *World Population Prospects* (2005). The 2004 Revision. Volume I: Comprehensive Tables, United Nations.

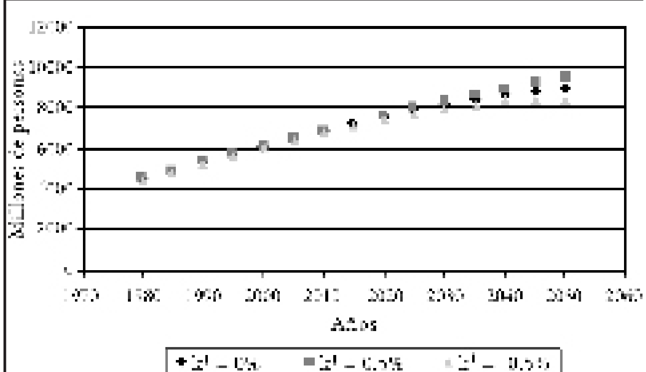
Tabla 1. Valores de los parámetros en escenarios.

k_1 (%)	k_2 (%)	a	b	c
0	2.5	-0.920	0.041	0.96
0	3.0	-0.402	0.033	0.96
0	3.5	-0.061	0.029	0.96
0.5	2.5	-0.093	0.042	0.95
0.5	3.0	-0.249	0.038	0.95
0.5	3.5	-0.503	0.035	0.95
-0.5	2.5	-2.249	0.063	0.96
-0.5	3.0	-1.160	0.037	0.96
-0.5	3.5	-0.642	0.029	0.96

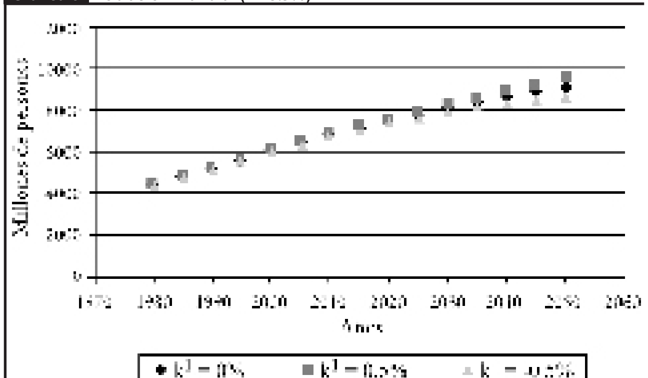
Gráfica 1. Población mundial (k^2=2.5%).



Gráfica 2. Población mundial (k^2=3.0%).



Gráfica 3. Población mundial (k^2=3.5%).



proyecciones de población. Se suponen tres posibles escenarios de k_1 que implican un crecimiento cero, un crecimiento demográfico lento y un decrecimiento de la población.

Los valores de los parámetros se pueden consultar en la tabla 1.

En todos los casos el coeficiente de determinación es mayor o igual a 0.95, lo que muestra en todos los casos un excelente ajuste.

Es posible señalar que los resultados estimados de las poblaciones, derivados de la función matemática son semejantes a los observados, lo que significa que el modelo reproduce de manera adecuada la dinámica demográfica mundial del periodo 1980-2005.

¿Qué ocurre cuando t tiende a infinito y $k_1 = 0$? Si analizamos la parte variable de la ecuación $P(t)$, es decir, la parte que es función de t, a la que llamaremos $c(t)$ se tiene:

$$c(t) = e^{(k_1+k_2)t}\left(1+e^{a+bt}\right)^{-\frac{k_2}{b}} \tag{13}$$

Tomando límites cuando t tiende a infinito, se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty}\left[e^{(k_1+k_2)t}\left(1+e^{a+bt}\right)^{-\frac{k_2}{b}}\right] \tag{14}$$

Simplificando la expresión anterior y sabiendo que k1 es igual a cero, se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty}\left[e^{-bt}\left(1+e^{a+bt}\right)\right]^{-\frac{k_2}{b}} \tag{15}$$

multiplicando los términos que son afectados por el límite, la expresión es igual a:

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-bt}+e^{a}\right]^{-\frac{k_2}{b}} \tag{16}$$

Como t tiende a infinito y a, b, y k_2 son conocidas, con a negativa y b positiva, el límite es igual a: $e^{-\frac{ak_2}{b}}$

4. Análisis de sensibilidad de los valores de las asíntotas

Con el fin de analizar diferentes escenarios sobre el número de personas que habría al final del siglo XXI, se realizaron nueve pronósticos de población a partir de tres hipótesis respecto al valor de k_1 y tres respecto de k_2.

En los anexos se presentan los cuadros con los resultados de los nueve escenarios.

En conclusión, un rango en el valor de k_1 entre -0.5% y 0.5% anual y de k_2 entre 2.5% y 3.5% que parecería ser pequeño en ambos casos, produce grandes diferencias en el número de habitantes al 2050, que va de 7 598 millones de personas según la hipótesis de k_1 =-0.5% y de k_2 = 2.5%, a 9 574 millones en el supuesto de k_1 = 0.5% y k_2 = 3.5%, es decir, una variación de 1 976 millones en la población, es decir, casi dos mil millones de diferencia.

Estos supuestos permiten analizar qué mundo queremos en el largo plazo. ¿Un planeta que continúe creciendo y que en medio siglo tenga 3 574 millones de habitantes más que en 1999? ¿Un mundo que sólo se incremente en 1 598 con respecto a la población de final del siglo XX y en el largo plazo tienda a la extinción?, o ¿un mundo que se estabilice en el crecimiento cero, es decir, que se llegue a la cifra mágica en la tasa global de fecundidad de 2.1 hijos por mujer? ¿Qué queremos? ergo

Bibliografía

Chanu, P. (1982). *Historia y Población. Un futuro sin porvenir*. Fondo de Cultura Económica, México.

Coontz, S. H. (1960). *Teorías de la población y su interpretación económica*. Fondo de Cultura Económica, México.

Keyfitz, N. (1979). *Introducción a las matemáticas de la población*, Santiago de Chile, Centro Latinoamericano de Demografía.

Lotka, A. (1969). *Teoría analítica de las asociaciones biológicas*. Santiago de Chile, Centro Latinoamericano de Demografía.

Ordorica, M.

_______ (1990). "Ajuste de una función expo-logística a la evolución de la población total de México, 1930-1985", *Estudios Demográficos y Urbanos*, Vol. 5, Núm. 3, El Colegio de México.

_______ (2006). "Cuatro escenarios de la población de México para fines del siglo XXI construidos a través de una función expo(exponencial)", Lezama, J. L. y J. B. Morelos (Coord.). *Población, ciudad y medio ambiente en el México contemporáneo*. CEDUA, El Colegio de México.

Pearl, R. and L. J. Reed (1920). "On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the Unired States of America*. Vol. 6 (6).

Naciones Unidas

_______ (1953). "Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas", *Estudios sobrepoblación*. Núm. 17.

Verhulst.

_______ P. F. (1838). "Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement". *Correspondance mathématique et physique*. Núm. 10.

_______ (1845). *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*.

_______ (2005). *World Population Prospects. The 2004 Revision*. Volume I: Comprehensive Tables.

Anexos

Cuadro A1. Mundo. Diferentes escenarios de la población futura, según valores de $k_1 = 0$, $k_1 = 0.5\%$ y $k_1 = -0.5\%$ y $k_2 = 2.5\%$ (millones de habitantes).

Año	Crecimiento demográfico k_1 = 0%	Crecimiento demográfico k_1 = 0.50%	Crecimiento demográfico k_1 = -0.50%
1980	4 442	4 442	4 442
1985	4 844	4 846	4 842
1990	5 253	5 253	5 255
1995	5 662	5 658	5 672
2000	6 065	6 057	6 081
2005	6 456	6 447	6 470
2010	6 827	6 827	6 823
2015	7 175	7 194	7 127
2020	7 497	7 549	7 371
2025	7 786	7 893	7 551
2030	8 046	8 226	7 665
2035	8 275	8 549	7 719
2040	8 475	8 864	7 720
2045	8 648	9 173	7 676
2050	8 796	9 477	7 598

Fuente: Cálculos propios

Cuadro A2. **Mundo. Diferentes escenarios de la población futura, según valores de $k_1 = 0$, $k_1 = 0.5\%$ y $k_1 = -0.5\%$ y $k_2 = 3.0\%$ (millones de habitantes).**

Año	Crecimiento demográfico $k_1 = 0\%$	Crecimiento demográfico $k_1 = 0.50\%$	Crecimiento demográfico $k_1 = -0.50\%$
1980	4 442	4 442	4 442
1985	4 845	4 847	4 844
1990	5 253	5 253	5 253
1995	5 660	5 657	5 664
2000	6 061	6 055	6 068
2005	6 452	6 445	6 458
2010	6 827	6 826	6 826
2015	7 183	7 197	7 167
2020	7 517	7 556	7 473
2025	7 827	7 906	7 739
2030	8 112	8 246	7 963
2035	8 371	8 579	8 144
2040	8 605	8 904	8 280
2045	8 814	9 223	8 375
2050	9 000	9 538	8 430

Fuente: Cálculos propios

Cuadro A3. **Mundo. Diferentes escenarios de la población futura, según valores de $k_1 = 0$, $k_1 = 0.5\%$ y $k_1 = -0.5\%$ y $k_2 = 3.5\%$ (millones de habitantes).**

Año	Crecimiento demográfico $k_1 = 0\%$	Crecimiento demográfico $k_1 = 0.50\%$	Crecimiento demográfico $k_1 = -0.50\%$
1980	4 442	4 442	4 442
1985	4 846	4 847	4 845
1990	5 255	5 253	5 253
1995	5 659	5 657	5 661
2000	6 059	6 054	6 063
2005	6 450	6 444	6 454
2010	6 827	6 826	6 827
2015	7 186	7 198	7 176
2020	7 527	7 560	7 498
2025	7 828	7 914	7 789
2030	8 143	8 259	8 045
2035	8 415	8 596	8 265
2040	8 668	8 927	8 447
2045	8 896	9 253	8 594
2050	9 106	9 574	8 705

Fuente: Cálculos propios