Evidencia de un obstáculo epistemológico

Sergio Alarcón Vasco*

Resumen

El propósito de este artículo es mostrar la importancia de la noción de obstáculo epistemológico en la construcción de conceptos matemáticos y cómo estos obstáculos pueden ser identificados en los estudiantes, mediante el estudio de los errores recurrentes y del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos. De esta forma, se muestra un ejemplo de una experiencia de evidencia de obstáculo epistemológico relacionada con el concepto matemático de recta tangente a una curva. Esta experiencia hace parte del trabajo de investigación "El obstáculo euclídeo en la construcción del concepto de tangente", presentado por Sergio Alarcón Vasco y Carlos Suescún Arteaga, para optar al título de Magíster en Educación Matemática en la Universidad de Antioquia, y que está enmarcado en el proyecto de investigación "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite ", COLCIENCIAS 1115-11-12704, desarrollado por el grupo de investigación "Educación Matemática e Historia" de la Universidad de Antioquia y EAFIT.

* Matemático, Magíster en Educación Matemática, con énfasis en Pensamiento Matemático Avanzado de la Universidad de Antioquia. En la actualidad se desempeña en el ITM como docente ocasional y hace parte en la misma institución del grupo de investigación Da Vinci y del grupo de investigación CTS. Además integra el grupo de investigación Educación Matemática e Historia de las universidades de Antioquia y Eafit.
E-mail: sergioalarcon@itm.edu.co.

Palabras clave

Obstáculo epistemológico, Error recurrente, Concepción euclídea.

Abstract

The purpose of this paper is to show the importance of the notion of epistemological obstacle in the construction of mathematical concepts and how these obstacles can be identified in the students through study of the recurrent mistakes and of the historical development of the mathematical concepts. It is shown an example of an experience of evidence of epistemological obstacle, related with the mathematical concept of tangent right at a curve. This experience makes part of the research work "The Euclidean Obstacle on the Construction of Tangent Concept", presented by Sergio Alarcón Vasco and Carlos Suescún Arteaga for to reach to Magister degree in Mathematics Education in the University of Antioquia, and it is framed in "An Alternative Metodologic for the Teaching and Learning of the Concept of Limit" research project, COLCIENCIAS 1115-11-12704, developed by the "Educación Matemática e Historia" research group of the University of Antioquia and EAFIT.

Key words

Epistemological obstacle, Recurrent mistake, Euclidean conception.

INTRODUCCIÓN

Durante los procesos de construcción de conceptos matemáticos se hace importante estudiar los errores recurrentes de los alumnos, ya que éstos ayudan a detectar la presencia de cierto tipo de problemas cognitivos que impiden una adecuada comprensión de tales conceptos. En los últimos años ha tomado gran relevancia el estudio de los *obstáculos epistemológicos*, donde se caracterizan los procesos de producción de conocimientos en términos de errores rectificables de obstáculos superados.

La noción de *obstáculo epistemológico* fue introducida por Gaston Bachelard en su libro *La formación del espíritu científico* (1938). Allí se refiere a la importancia del estudio de los errores, de la ignorancia y de la irreflexión de los alumnos durante el periodo de conocimiento de una idea científica. Bachelard se expresa como sigue:

> "Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización." [1]

Un obstáculo epistemológico es, por tanto, una concepción, un conocimiento que resulta ser eficaz ante ciertas situaciones, pero que cuando es enfrentado a otro tipo de situaciones, resulta ser inadecuado, llevando a que se obtengan conclusiones erróneas.

Es importante hacer notar que un obstáculo epistemológico no es un error, sin embargo se puede manifestar a partir de los errores recurrentes de los alumnos. Por lo tanto, no debe ser ignorado, debe ser enfrentado de manera consciente hasta que logre ser superado, de modo que haya una reconstrucción cognitiva, destruyendo el viejo conocimiento y transformándolo en un nuevo concepto satisfactorio. Esta debe ser la razón por la cual de la Torre habla de los antecedentes en la mayéutica socrática del concepto de obstáculo epistemológico, donde Platón, en el diálogo de

Menón, hace ver la importancia pedagógica del entorpecimiento o "adormecimiento" intelectual. Esto es lo que dice Platón:

> "SÓCRATES. –Mira ahora de nuevo, Menón, lo que ha andado el esclavo en el camino de la reminiscencia. No sabía al principio cual es la línea con que se forma el espacio de ocho pies, como ahora no lo sabe; pero entonces creía saberlo, y respondió con confianza como si lo supiese; y no creía ser ignorante en este punto. Ahora reconoce su embarazo, y no lo sabe; pero tampoco cree saberlo.
>
> MENÓN. –Dices verdad.
>
> SÓCRATES. –¿No está actualmente en mejor disposición respecto de la cosa que él ignoraba?
>
> MENÓN. –Pienso que no.
>
> SÓCRATES. –Por el contrario, le hemos puesto, a mi parecer, en mejor posición para descubrir la verdad. Porque ahora, aunque no sepa la cosa, la buscará con gusto; mientras que antes hubiera dicho con mucho desenfado, delante de muchas personas y creyendo explicarse perfectamente, que el espacio doble debe formarse con una línea doble en longitud.
>
> MENÓN. –Así sería.
>
> SÓCRATES. –¿Piensas que hubiera intentado indagar y aprender lo que él creía saber ya, aunque no lo supiese, antes de haber llegado a dudar; si convencido de su ignorancia, no se le hubiera puesto en posición de desear saberlo?
>
> MENÓN. –Yo no lo pienso, Sócrates.
>
> SÓCRATES. –El adormecimiento le ha sido, pues, ventajoso.
>
> MENÓN. –Me parece que sí." [2]

Durante el ejercicio de evidenciar en los alumnos la presencia de obstáculos epistemológicos, el estudio del desarrollo histórico de una idea científica se convierte en una herramienta pedagógica de gran importancia. Se ha observado, por ejemplo, que muchas de las dificultades presentadas por los matemáticos del pasado durante el periodo de desarrollo de un concepto matemático son similares a las que se presentan en los alumnos de hoy. Es así como el estudio de las condiciones históricas en las cuales un obstáculo es evidenciado y luego superado, puede ayudar a comprender los orígenes y la naturaleza de un obstáculo similar descubierto en los alumnos.

La transposición a la didáctica de las matemáticas de la noción de obstáculo epistemológico ha sido posible gracias a los trabajos de G. Brousseau, quien en 1983 llevó a cabo una serie de investigaciones cuyo fin era, además de identificar los obstáculos epistemológicos conectados con las matemáticas que se enseñan en la secundaria, elaborar medios didácticos para que los alumnos pudieran superar dichos obstáculos [3]. Brousseau recalca de nuevo la importancia de estudiar los obstáculos epistemológicos, tanto desde el análisis del desarrollo histórico de un conocimiento como en la enseñanza. Es así, como da una lista de tres aspectos importantes hacia donde deben de dirigirse las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos en matemáticas. Esta lista es la siguiente:

1. Encontrar los errores recurrentes y mostrar que ellos se agrupan alrededor de concepciones.
2. Encontrar los obstáculos en la historia de las matemáticas.
3. Confrontar los obstáculos históricos con los obstáculos de aprendizaje y establecer su carácter epistemológico.

Además de Brousseau, otros investigadores han dado grandes aportes al estudio de la noción de obstáculo epistemológico. Sobresalen los trabajos de Ana Sierpinska [4] y B. Cornu [5] sobre el concepto de límites y, recientemente en nuestro país, los trabajos de Alarcón y Suescún sobre el concepto de recta tangente [6].

Ejemplo de una experiencia de evidencia de un obstáculo epistemológico

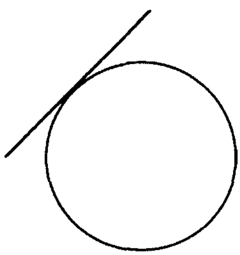
A continuación se hace un análisis de una experiencia de evidencia de un obstáculo epistemológico relativo a un concepto matemático, el concepto de recta tangente a una curva en un punto dado. Esta experiencia hace parte de una serie de entrevistas realizadas por Alarcón y Suescún [6] a algunos estudiantes de segundo semestre de Ingeniería de Sistemas y del quinto semestre de Educación Matemática y Física de la Universidad de Antioquia.

El primer contacto que tienen los alumnos con el concepto de tangente es en sus cursos de geometría, a partir de la definición III-2 del libro de los *Elementos* de Euclides:

"Definición III-2: Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta." [7]

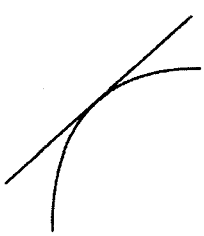
De acuerdo con esta definición, la tangente al círculo puede tener una representación visual como la siguiente:

FIGURA 1



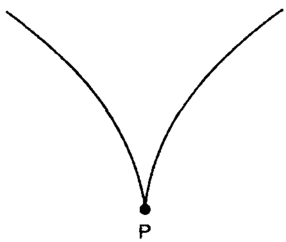
Según Vinner [8], este cuadro puede llevar al alumno a construir una imagen mental para el concepto de tangente en otros casos como el que se muestra en la siguiente figura:

FIGURA 2



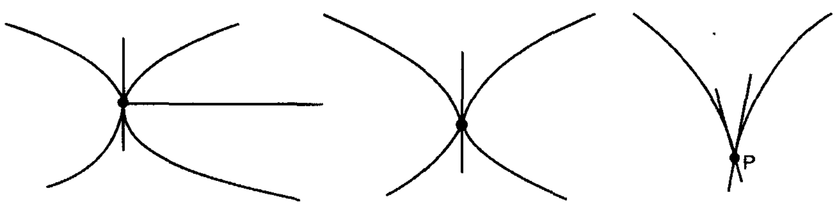
La segunda curva mostrada a los alumnos es la siguiente:

FIGURA 5



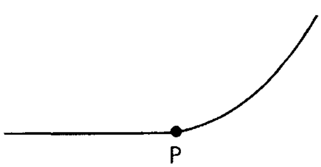
Cuando se les pide que tracen la tangente por el punto señalado, algunos hicieron los siguientes cuadros:

FIGURA 6



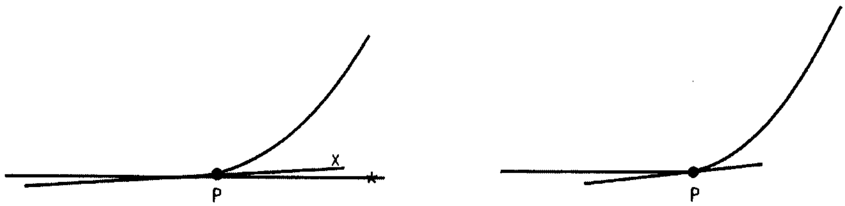
Obsérvese cómo los alumnos fuerzan las curvas evocando, de nuevo, cuadros como los de la figura 2, es decir, evocando la concepción euclídea. Algo similar ocurre con la siguiente curva:

FIGURA 7



Los alumnos fuerzan la curva de la siguiente manera:

FIGURA 8



De nuevo se ve claramente el forzamiento, evocando la concepción euclídea de recta tangente.

CONCLUSIONES DE LA EXPERIENCIA

De acuerdo con lo observado en la experiencia, puede concluirse lo siguiente:

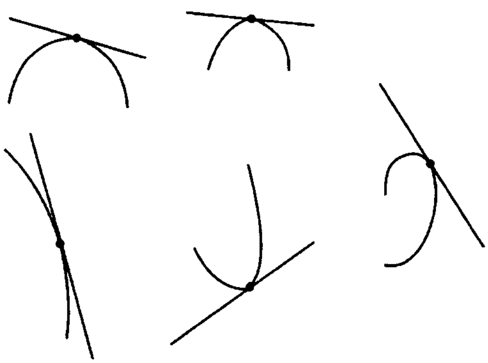
1. Los alumnos, aunque en su curso de cálculo han estudiado la tangente como el límite de una secante variable, mantienen presentes la "concepción euclídea" de recta tangente a una curva, como una recta que toca a la curva en un solo punto y prolongada no la corta.
2. A los alumnos la concepción euclídea les funciona cuando se trata de hallar la tangente a ciertas curvas, pero no da resultado cuando se trata de hallar las tangentes a otros tipos de curvas, llevando a que se saquen conclusiones erróneas. Por ejemplo, al no aceptar tangentes por puntos de inflexión o forzar las curvas evocando la concepción euclídea.
3. Este mismo problema parece haberse dado en periodos de pleno desarrollo del concepto de tangente, por ejemplo con Descartes, quien a pesar de haber usado un método general para hallar la tangente, se mantuvo fiel a la concepción euclídea de recta tangente, hecho que le impidió aceptar la tangentes por puntos de inflexión.

En sus cursos de cálculo, aunque los alumnos adquieren la definición formal de tangente como "el límite de una secante variable", la concepción euclídea se mantiene presente en la mayoría de ellos, convirtiéndose en un obstáculo que les impide hallar la tangente a ciertas curvas por algunos puntos de éstas.

A continuación se transcriben apartes de algunas entrevistas y se hace un análisis de las manifestaciones de los alumnos.

A un alumno se le pide que trace en un papel cinco curvas, luego se le indica que ubique en cada una un punto y que por cada uno de estos puntos trace la tangente a cada curva. El alumno hace los siguientes trazos:

FIGURA 3



Las curvas trazadas por el alumno muestran que éste mantiene presente cuadros como los de la figura 2 que, como se ha dicho antes, es una representación visual de la tangente al círculo. De esta forma, el alumno manifiesta la presencia de la concepción euclídea de recta tangente. Esto queda totalmente confirmado cuando se le pregunta por qué las rectas que traza son tangentes. El alumno responde como se muestra a continuación:

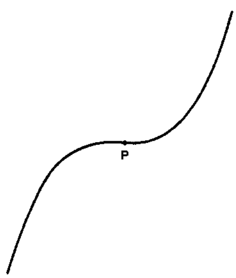
Profesor: *¿Por qué esas rectas trazadas son tangentes?*

Alumna: *Porque es donde la curva cambia, donde cambia de positivo a negativo. O sea, que baja y después sube.*

De acuerdo con esta respuesta, parece ser que el alumno sólo acepta las tangentes, por decirlo así, en las "crestas" de las curvas, lo cual es una clara manifestación de la concepción euclídea de recta tangente a una curva.

Para mostrar que esta concepción euclídea se convierte en un obstáculo que impide hallar la tangente a ciertas curvas, por algunos puntos de éstas, se muestra a los alumnos tres curvas. La primera curva es la siguiente:

FIGURA 4



Cuando se pregunta a un alumno cuál es la tangente a la curva por el punto señalado en ella, éste responde como sigue:

Profesor: *Ahora dime, en esta curva ¿cuál es la tangente que pasa por el punto P dado?*

Alumno: *Eh ... aquí no hay recta tangente.*

Profesor: *¿Por ahí no pasa tangente?*

Alumno: *No pasa por ahí, porque esto es un punto donde cambia la concavidad de la curva, entonces a pesar de que es continua, no tiene tangente.*

Este hecho parece insinuar, que el alumno no acepta las tangentes en puntos de inflexión. De acuerdo con Sierpinska, este hecho ha sobrevivido a través del desarrollo del concepto de tangente y nos muestra cómo Descartes, a pesar de haber desarrollado un método general para la construcción de tangentes, rehusó hablar de tangentes en puntos de inflexión.

4. De esta forma, la “concepción euclídea” se convierte en un obstáculo que les impide a los alumnos hallar la tangente a algunas curvas por puntos estratégicos de éstas.

Referencias bibliográficas

[1] Bachelard, G. *La formación del espíritu científico*, Siglo XXI, México, 1993, p. 15.

[2] De la Torre G., Andrés. *Modelización del espacio y del tiempo*. Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 2003. p. 24.

[3] De la Torre, Andrés. *Los conflictos epistemológicos relativos al concepto de límite*, Resumen de la ponencia en el IX Encuentro ERM, Neiva, 2003.

[4] Sierpinska, A. *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, en: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 1985, 5-67.

[5] Cornu, B. *Limits*, en: Tall, D. O. Ed. *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Boston, 1991, p. 159.

[6] Alarcón S. y Suescún C. *El obstáculo euclídeo en la construcción del concepto de tangente*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, 2005.

[7] Euclides. *Elementos de Geometría*, en: Vera, F., *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid, 1970, Vol. I, p. 750.

[8] Vinner, S. *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*, en: Tall, D. O. Ed. Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Boston, 1991, p. 75.