En Busca de una Manera Conectada de Saber: El Caso de una Profesora de Matemáticas

In Pursuit of a Connected Way of Knowing: The Case of one Mathematics Teacher

Cecilia Agudelo-Valderrama[1] *
Diana Martínez [2]

[1]Monash University, [2]Colegio Anexo San Francisco de Asís

En este artículo describimos momentos claves del proceso de pensamiento y aprendizaje que una profesora desarrolló en búsqueda de posibles conexiones entre los conceptos de pendiente de una recta y densidad de la materia; ofrecemos, al mismo tiempo, ilustraciones de dificultades con el conocimiento del contenido matemático. Este estudio de caso surge en el contexto del Proyecto PROMICE que incorporó un Programa de Aprendizaje Profesional (PAP). PROMICE apoyó la formación de equipos de trabajo conformados por profesores de matemáticas y de ciencias escolares, con el propósito de diseñar innovaciones de aula que promovieran la creación de conexiones entre matemáticas y ciencias. Las "preguntas inquietantes" que le surgieron a esta profesora durante los talleres de la Etapa de Inducción del PAP se convirtieron en el motor que la mantuvo involucrada activamente en un proceso de aprendizaje, en búsqueda de una comprensión más profunda, esto es, de una manera conectada de saber matemáticas – lo que contrastaba con el conocimiento fragmentado y compartimentalizado que, según ella, había caracterizado su aprendizaje de las matemáticas escolares. Proporcionamos ilustraciones de unos primeros pasos en la construcción de comprensión matemática que pueden convertirse en base importante para el desarrollo del conocimiento de las matemáticas para su enseñanza.

Descriptores: Conexiones entre matemáticas y ciencias escolares, Conocimiento de los profesores de las matemáticas para su enseñanza, Patrones lineales, razón, proporción, pendiente y densidad

In this paper we offer illustrations of a mathematics teacher's difficulties with content knowledge when trying to find connections between school mathematics and science. The paper is based on a sub-study that is part of a larger Colombian project, PROMESA (Creating Science and Mathematics Connected Learning Experiences that Open Opportunities for the Promotion of Algebraic Reasoning), which incorporated a Professional Learning Programme (PLP) seeking to integrate school science and mathematics teachers into working teams, in order to create science and mathematics connected learning experiences that considered the promotion of algebraic reasoning. The "challenging questions" which emerged for this teacher, during the workshops of the Induction Stage of the PLP, became the driving force for her continued engagement in learning mathematics content in a connected way, as opposed to the compartmentalised content-item thinking she had experienced as a school student. We provide illustrations of first steps in the development of a teacher's mathematical understanding which can support growth of mathematical knowledge for teaching.

Keywords: School mathematics and science connections, Mathematics teachers' knowledge of mathematics for teaching, Linear patterns, ratio, proportion, slope and density.

* agudelo.cecilia@gmail.com

ISSN: 1696-4713
www.rinace.net/reice/

Recibido:	3 de marzo 2015
1ª Evaluación:	20 de marzo 2015
2ª Evaluación:	1 de abril 2015
Aceptado:	18 de abril 2015

Original publicado en International Journal of Science and Mathematics Education. (Online first http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9598-x). Traducción al español con el amable permiso de Springer Science+Business Media

Introducción

Casi todas las actuales reformas curriculares del mundo, incluyendo el caso de Colombia, abogan por un enfoque interdisciplinario que promueva la integración y el establecimiento de conexiones entre las matemáticas y las ciencias escolares (ver Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998a, b, 2006; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000; National Research Council, 1996; ver, también, Czerniak, Weber, Sandmann y Ahern, 1999; Michelsen, 2005). Varios educadores matemáticos, y del área de ciencias (e.g., Basista y Mathews, 2002; Michelsen, 2005; Michelsen y Sriraman, 2009) recomiendan un enfoque curricular interdisciplinario para procurar el aprendizaje significativo, ayudando a los estudiantes a construir comprensiones más profundas mediante la formación de conexiones entre conceptos que son centrales en matemáticas y ciencias, y a desarrollar interés por el aprendizaje de estas áreas. Los lineamientos curriculares de ciencias y educación ambiental de Colombia (MEN, 1998a) defienden un enfoque de enseñanza para la comprensión, y ofrecen descripciones de posibles "procesos de pensamiento y acción" que los niños pueden desarrollar en el aula de ciencias. Tomamos estas descripciones como *señaladores* de oportunidades que los profesores pueden usar en el aula de ciencias, cuando el propósito es apoyar el desarrollo de procesos relacionados con la identificación y expresión de regularidades y relaciones entre variables cuantitativas del mundo físico. Los lineamientos curriculares de matemáticas también encarecen un enfoque de enseñanza para la comprensión (MEN, 1998b), en forma consistente con las recomendaciones de otros currículos de matemáticas del campo internacional (e.g., Department of Education and Early Childhood Development, 2013; NCTM, 1989, 2000), y subrayan la asignación de significado, por parte de los estudiantes, al mundo que los rodea, como un propósito central de las matemáticas escolares.

Nos identificamos con Zohar (2006), quien afirma que "comprender significa crear conexiones entre conceptos, conexiones entre los conceptos con que cuenta quien conoce y las formalizaciones conceptuales que está estudiando en la escuela, y conexiones entre conceptos específicos y sus contextos" (p. 1587). Zohar argumenta que los estudiantes que se empeñan en aprender con comprensión se mantienen en una búsqueda de conexiones entre el conocimiento y las experiencias con que cuentan, así como conexiones entre conceptos de una disciplina específica y conceptos de otras áreas curriculares. Las matemáticas tienen conexiones, prácticamente, con todo (Steen, 1999). La identificación de conexiones entre las matemáticas y otras áreas curriculares escolares, y prácticas sociales, pueden ayudar a los estudiantes en su búsqueda de significado y comprensión en su aprendizaje. El proyecto de donde surge esta publicación se centró en la creación de conexiones entre matemáticas y ciencias escolares porque muchos procesos y métodos de indagación en ciencias, como la identificaión de patrones, el establecimiento de relaciones hipotéticas entre variables cuantitativas y la prueba de conjeturas son, igualmente, parte de la resolución de problemas en matemáticas (cf. Ernest, 1989).

Cuando los estudiantes se involucran activamente en un aprendizaje para la comprensión, "están tratando de encontrarle sentido a lo que están aprendiendo mediante la creación de significado y la apropiación de las ideas" (Zohar, 2006, p. 1585). Esto significa que en el corazón de un aprendizaje basado en la comprensión está el aprendizaje con significado, y, en este punto, queremos resaltar que el significado en el aprendizaje emerge no sólo de la identificaión de conexiones entre conceptos o temas específicos y el conocimiento y expericias propias de los estudiantes sino, también, y muy importantemente, de la relevancia que las actividades y procesos de aprendizaje desarrollados revelan para el estudiante; esto es, de los vínculos que ella/él puede encontrar en la actividad/el proceso de aprendizje con su motivación o intención de aprendizaje (*i.e.*, las respuestas que encuentra a preguntas como ¿por qué/para qué tengo que aprender esto? ¿qué tiene que ver conmigo este tema?). La creación de significado no conlleva necesariamente el alcance de una comprensión profunda. Mientras que se necesita alguna comprensión para que algo empice a tener significado, una buena comprensión es un logro que requiere de un proceso largo –un recorrido– de aprendizaje que involucra "actos de comprensión tentativa, y la inclusión de éstos en una red de horizontes de sentido ya establecidos" (Sierpinska, 1994, p. 24).

Al considerar un enfoque de enseñanza para la comprensión subrayamos, en esta publicación, dos aspectos relacionados con la creación de conexiones que consideramos están en el corazón de conceptualizaciones actuales del conocimiento del profesor que son significativas en el campo de la educación matemática; éstos son, a) conocimiento conectado del contenido, y, b) creación de interconexiones entre pensadores (e.g., profesores, estudiantes, compañeros, colegas).

a) Las actuales conceptualizaciones sobre el conocimiento de las matemáticas para su enseñanza (ver, por ejemplo, Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill y Ball, 2004; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ma, 1999) hacen énfasis en que el conocimiento de las matemáticas para su enseñanza necesita ser profundo, conectado y conceptual. El conocimiento de las matemáticas para su enseñanza tiene que ser útil pedagógicamente; requiere de "apreciación del razonamiento matemático, comprensión del significado de ideas y procedimientos matemáticos, y de cómo las ideas y los procedimientos se conectan" (Hill y Ball, 2004, p. 331); y nosotros sostenemos que, además, requiere de conocimiento sobre cómo los conceptos matemáticos se conectan tanto dentro de la propia disciplina como con otras áreas curriculares que hacen parte de focos centrales de atención y aprendizaje de los estudiantes escolares.

b) En el centro de una enseñanza para la comprensión está la interconexión de quienes participan en la co-construcción del conocimiento, pues el razonamiento se desarrolla *con* la participación del otro (Zohar, 2006). En verdad, para poder apoyar el aprendizaje de los estudiantes, los profesores necesitan escuchar atenta y detenidamente a sus estudiantes para poder responder con sensibilidad a sus iniciativas y necesidades de aprendizaje; de la misma manera, los estudiantes necesitan ser *oyentes activos* que se involucran completamente en las actividades de clase para poder participar en la construcción de conceptualizaciones conectadas y profundas. Para el profesor, sin embargo, no es posible alcanzar un conocimiento del pensamiento y los procesos de construcción conceptual de sus estudiantes si no cuenta con un conocimiento profundo y conectado de las matemáticas.

Un factor decisivo en el que se apuntala la implementación de una enseñanza de las matemáticas para el significado y la comprensión está representado en el conocimiento de las matemáticas para su enseñanza con que cuentan los profesores – en su forma de saber matemáticas: lo que ellos piensan que es saber matemáticas, sus actitudes hacia la interconectividad de los conceptos tanto dentro de la disciplina como con otras áreas del currículo escolar, y la conciencia que tengan del rol crucial que su conocimiento de las ideas matemáticas de los estudiantes juega en su práctica de enseñanza. Varios estudios que se propusieron apoyar una enseñanza que promoviera la creación de conexiones entre matemáticas y ciencias resaltan dificultades relacionadas con el conocimiento de las matemáticas y las ciencias de los profesores participantes (ver Woodbury, 1998; Basista y Mathews, 2002; Frykholm y Glasson, 2005). Estos estudios, sin embargo, no presentan ilustraciones de las dificultades específicas que, sobre el conocimiento de los contenidos, enfrentan los participantes cuando se intentan identificar o crear conexiones entre matemáticas y ciencias.

Este artículo ofrece ilustraciones de dificultades específicas con el contenido matemático que una profesora, Clara, encontró al tratar de identificar conexiones entre densidad y pendiente. En medio del trabajo organizado por PROMICE, Clara sintió el reto de encontrar una respuesta para su pregunta, ¿Qué tiene que ver la pendiente de una recta con densidad de una sustancia o materia? Esta pregunta, que se convirtió en desafío para Clara, surgió durante la primera etapa del PAP (la Etapa de Inducción, ver la tabla 1), cuando se examinó un caso de enseñanza del concepto de densidad (ver el caso de enseñanza de Mary, más adelante) que sugería la consideración del concepto de densidad como un ejemplo en el que la conexión matemáticas-ciencias está inmersa. Mostrando gran compromiso en su meta de alcanzar una mayor comprensión del tema correspondiente y, así, empezar a construir un conocimiento conectado, Clara se involucró activamente en el proceso de aprendizaje que describimos en este artículo. Aunque el proceso de aprendizaje de Clara, aquí reportado, fue activado por su participación en el estudio principal de PROMICE, la mayor parte de éste se desarrolló como un sub-estudio independiente de PROMICE ya que se enfocó en la pregunta específica de Clara. Al final del proyecto, Clara mostró gran entusiasmo en compartir esta experiencia de aprendizaje –que surgió al haberse involucrado activamente en un trabajo colaborativo con la investigadora principal (y primera autora)- porque, según ella, podría resultar de utilidad para otros profesores de matemáticas y ciencias.

1. Densidad y Pendiente

Comprender el concepto de densidad requiere compresión de los conceptos matemáticos de razón y proporción, y de sus aplicaciones en el campo de las ciencias naturales que involucran variables cuantitativas del mundo físico (Dawkins, Dickerson, McKinney y Butler, 2008). Según Dawkins y colegas, el concepto de densidad es complejo porque la densidad no es una medición directa; es la expresión de una relación matemática: la razón entre las medidas de la masa y el volumen de una sustancia o materia. Se necesita de una buena comprensión de la relación multiplicativa expresada en una razón para poder tener acceso a una variedad de conceptos y a la resolución de situaciones problema en ciencias naturales y matemáticas,

La representación cartesiana de valores de *masa* y *volumen*, que han sido recolectados durante exploraciones específicas de laboratorio, puede facilitar la identificación de relaciones entre estas dos variables. Por tanto, el análisis de la representación de valores en el plano cartesiano se convierte en una parte central de un posible proceso de construcción de comprensión del concepto de densidad. Aún más, el análisis de esta forma de representación de los datos se realiza mediante la identificación y expresión de razones y proporciones, un foco de enseñanza y aprendizaje que invita a la creación de conexiones entre los temas 'ecuaciones lineales' y 'pendiente de una recta'.

El concepto de pendiente de una recta es un concepto matemático fundamental incluido en el currículo de matemáticas de los Grados 8 y 9 en Colombia, y está basado en la noción de que ésta representa la *razón* que compara el cambio de los valores de la distancia '*y*' con el de los valores de la distancia '*x*'. La pendiente también describe la inclinación de objetos físicos como carreteras, pistas de esquiar y rampas (Stump, 1997). Aunque en el lenguaje popular se habla de la pendiente como el ángulo de inclinación, la pendiente es definida matemáticamente como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación que se forma entre la recta con el eje de las *x*. Los populares textos guía utilizados en el contexto escolar colombiano promueven un aprendizaje mecánico basado en la aplicación de una regla de procedimiento, dada, para calcular el valor de la pendiente; el tema se introduce presentando declaraciones como, 'En una ecuación lineal, $y = m\,x + \mathrm{b}$, m representa la pendiente'. 'Dados dos puntos, (x, y) y (x_1, y_1), la pendiente de una recta es la razón $(y-y_1)/(x-x_1)$. Partiendo de formalizaciones dadas, como éstas, el trabajo se mueve hacia el desarrollo de una serie de ejercicios para calcular el valor de la pendiente.

La pendiente puede ser vista como una *razón* o como una *tasa* de cambio, y ambas medidas requieren razonamiento proporcional (Lamon, 1999). "Una tasa de cambio puede ser vista como una razón ampliada –una razón que nos facilita pensar más allá de la situación enfocada- ... en este sentido, una razón puede verse como una instancia específica de una tasa de cambio" (Lamon, 1999, p. 204). Por ejemplo, en el caso de un refresco de frutas, la razón '*1225 ml de agua: 10 cucharas de azúcar*' es una instancia específica de la tasa (constante) de cambio: 2 cucharas de azúcar por cada 245 *ml* de agua'. Para poder ver la pendiente como el resultado de cambios proporcionales en las dos variables involucradas en una relación lineal específica se necesita una buena comprensión de la relación multiplicativa que expresa una razón – lo mismo, para poder identificar conexiones entre diferentes representaciones de la función lineal. A partir de esto, podemos pensar en tareas de identificación de patrones lineales como situaciones problema en las que para hallar la relación funcional se necesita identificar la relación multiplicativa entre los cambios de la coordenada *y*, y los de la coordenada *x* – esto es, identificar la razón, que también se puede expresar como una tasa de cambio. En relación con el contexto del aula escolar y la actividad de identificación de patrones lineales, MacGregor y Stacey (1995) reportan que cuando se les pide a los estudiantes encontrar una generalización, muchos de ellos simplemente producen una regla que expresa la recurrencia numérica que observan, en cambio de buscar una relación funcional que conecte parejas de valores. Nosotras sostenemos que en la actividad de identificación de patrones lineales, los estudiantes necesitan amplias oportunidades para examinar las estructuras aditivas que están presentes en la forma como cada variable involucrada cambia, y su conexión con las comparaciones multiplicativas que están plasmadas en las generalizaciones que ellos mismos producen. Este foco de atención en la actividad puede apoyar a los estudiantes en su proceso construcción de estructuras mentales fundamentales que contribuyen al logro de comprensión de las funciones lineales y, por consiguiente, de pendiente. Las estructuras mentales a las nos referimos incluyen la identificación de conexiones entre estructuras aditivas y multiplicativas, razón, tasa de cambio, estructura de una ecuación lineal, y pendiente.

Conocimiento de estudiantes y profesores sobre densidad y pendiente

De acuerdo con la literatura, la promoción del desarrollo de comprensión del concepto de densidad de la materia, por parte de los estudiantes, ha mostrado una historia difícil y problemática (cf. Dole, Clarke, Wright y Hilton, 2009; Smith, Maclin, Grosslight y Davis, 2005). Muchos estudiantes escolares piensan que peso y densidad es lo mismo (Smith, et al., 2005); también se ha observado baja comprensión del concepto de densidad por parte de estudiantes de educación superior (ver, por ejemplo, Roach, 2001). En contraste con estos resultados de investigación, Westbrook (1998) sostiene que un grupo de estudiantes de Grado 9 –expuesto a un currículo que integraba matemáticas y ciencias, con el objeto de propiciar la creación de conexiones entre los conceptos de *densidad* y *pendiente*– usó los datos y las gráficas de densidad para avanzar en la construcción conceptual de pendiente. La investigación en el área del conocimiento del profesor sobre el concepto de densidad para su enseñanza es prácticamente inexistente. Sin embargo, Dawkins et al. (2008), quienes examinaron el conocimiento conceptual de un grupo de estudiantes de Licenciatura en ciencias, resaltan la poca comprensión del concepto de razón implícito en el concepto de densidad con que cuentan estudiantes de nivel avanzado.

En cuanto al desarrollo de comprensión del concepto de pendiente por parte de estudiantes de secundaria, la investigación ha identificado varias dificultades que enfrentan muchos estudiantes; por ejemplo, Barr (1981), Birgin (2012) y Stump (2001) han documentado dificultades que tienen los estudiantes para considerar la pendiente como una razón. Esta dificultad se hace más evidente cuando en una ecuación dada, de la forma $y = m\,x + \mathrm{b}$, m es un entero (Moschovitch, 1996. Stump (2001) reporta que un grupo de estudiantes americanos, de los grados superiores de secundaria, demostró comprensión de pendiente en una situación funcional, pero muchos de ellos tenían dificultad para comprender la pendiente como una tasa de cambio. Varios estudios han mostrado que el tema de función lineal –y pendiente como uno de los atributos que la definen– es muy difícil de entender para los estudiantes; muchos estudiantes muestran particular dificultad para identificar interconexiones entre diferentes representaciones de pendiente (Birgin, 2012; Stump 2001). La investigación sobre el conocimiento del concepto de pendiente para la enseñanza, de parte del profesor, es escasa; sin embargo, los estudio de Stump (1997) and Zaslavsky, Sela, y Leron (2002) ofrecen profundizaciones importantes al respecto. Stump (1997) examinó la comprensión matemática de varias representaciones de pendiente con que contaba un grupo de profesores en ejercicio y un grupo de estudiantes de Licenciatura, e identificó vacíos en la comprensión de pendiente que mostraron tanto profesores en ejercicio como estudiantes de Licenciatura. Las evidencias obtenidas por Zaslavsky y colaboradores (2002) –obtenida de estudiantes avanzados en programas de Licenciatura en matemáticas, profesores de matemáticas de secundaria, educadores matemáticos y matemáticos –señala que existe una confusión en cuanto a la conexión entre la representación algebraica y la geométrica de pendiente, la representación a escala y el ángulo; los autores explican que "la confusión emerge cuando algunas asunciones erradas comunes, no declaradas, relacionadas con el isomorfismo entre el sistema algebraico y el geométrico son subestimadas" (p. 119). No se han encontrado estudios que investiguen la comprensión por parte de profesores sobre conexiones entre densidad y pendiente.

2. El Contexto en el que Surgió el Proceso de Aprendizaje de Clara

Como ya se advirtió, uno de los temas que fueron escogidos como foco de atención para ilustrar conexiones entre matemáticas y ciencias, durante la Fase de Inducción del PAP, fue la enseñanza y el aprendizaje del concepto de 'densidad'. La enseñanza de este concepto fue seleccionada como un foco de atención porque densidad es un concepto fundamental de ciencias que incorpora conceptos matemáticos claves. De acuerdo con información recolectada por la autora principal –de un grupo de profesores de ciencias escolares, antes de haberse construido la propuesta de PROMICE– una de las mayores dificultades que observan los estudiantes de los Grados 9 y 10 en las asignaturas del área de ciencias tiene que ver con la aplicación de la Regla de tres. Estos profesores declararon en forma unánime que la regla de tres se usa casi en todos los temas de ciencias, y que cuando los alumnos no saben cómo hacerlo, ellos simplemente les ayudan a plantear la regla y a hallar la respuesta.

Durante la Etapa de Inducción del PAP se dedicaron dos sesiones consecutivas de trabajo al estudio y discusión de un caso *ficticio* de enseñanza del tema de densidad, el caso de enseñanza de Mary: Mary organiza y pone en acción una secuencia de actividades de clase con el propósito de introducir a sus estudiantes de Grado 8 al tema de densidad y, eventualmente, estimularlos para que empiecen a identificar conexiones entre densidad y pendiente. A partir de actividades de exploración, utilizando diferentes líquidos transparentes (*e.g.*, agua, agua salada, alcohol) se generaron datos sobre diferentes masas y volúmenes; estos datos fueron organizados en tablas por los estudiantes y, luego, graficados, según las indicaciones de Mary, para tratar de identificar cómo se relacionaban matemáticamente. Habiéndose ubicado puntos (masa, volumen) para representar las densidades de los diferentes líquidos, Mary trazó, en el tablero, una gráfica de una escalera en el plano cartesiano para tratar de estimular a los estudiantes a que identificaran conexiones entre densidad y pendiente. Una dificultad sobresaliente se identifica cuando varios estudiantes no encuentran qué puede tener que ver la gráfica de la escalera con la gráfica que se produjo de las actividades de exploración sobre la densidad de los líquidos. El caso completo de enseñanza de Mary, sobre densidad, se encuentra en Agudelo-Valderrama y Vergel (2009a).

La pregunta, "¿Qué tiene que ver pendiente con densidad?" surgió, para Clara, durante la discusión sobre el escenario específico de la presentación de la escalera en la clase de Mary, y se convirtió en el origen del proceso de aprendizaje que, en su mayoría, desarrolló Clara en forma independiente del Proyecto PROMICE como se explica en la siguiente sección; aunque este proceso de aprendizaje fue construido en forma independiente del Proyecto PROMICE, en su mayor parte, éste tuvo lugar en el contexto y estructura de recolección de información de PROMICE; por ello, para describir el recorrido o proceso de aprendizaje de Clara se hace necesaria una breve descripción de PROMICE, descripción que presentamos a continuación.

El Proyecto PROMICE, que se desarrolló durante 14 meses, fue concebido bajo la asunción de que la interacción cercana y el trabajo en equipo entre profesores de matemáticas, profesores de ciencias y formadores de profesores– con el ánimo de crear experiencias de aula en donde las matemáticas y las ciencias se conectan – pueden proporcionar oportunidades valiosas para que tanto profesores como formadores de profesores se involucren activamente en procesos de aprendizaje profesional. Bajo la meta de explorar y crear posibilidades de desarrollo curricular en las propias aulas de clase de los profesores participantes se conformó un gran equipo integrado por los profesores (ocho de matemáticas y cinco de ciencias, de tres colegios de Bogotá) y dos formadores de profesores, quienes actuaron como colegas facilitadores e investigadores principales. Los profesores también indagaron sobre su propia práctica de enseñanza.

Tabla 1. Recolección de información para el caso de Clara, dentro de la secuencia de recolección de información de PROMICE

		INSTRUMENTO/ACTIVIDAD DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	CASO CLARA
FASE 1		Cuestionario Inicial Entrevista de seguimiento al Cuestionario: Entrevista 1	X* X*
FASE 2			
Etapas del trabajo desarrollado	Actividades		
i) Inducción (2 meses)	Secuencia de 5 talleres,2 de ellos enfocados en el Caso de enseñanza de Mary	•Grabaciones de los talleres desarrollados	X
ii) Diseño, puesta en acción y documentación de innovaciones de aula (8 meses)	Secuencia de 4 sesiones de trabajo en las que (con el apoyo de los investigadores principales) los profesores participantes diseñaron secuencias de actividades para el aula, y formas de documentar su puesta en acción.	•Grabaciones de sesiones de trabajo con subequipos, y planes de clase •Entrevistas de seguimiento al trabajo con subequipos: Entrevista 2 •Observación de clase y Entrevista de seguimiento: Entrevista 2A	X X* X*
iii) Evaluación del trabajo desarrollado (2 meses)	Tres sesiones: 1. Foco en la organización y el análisis de la información 2. Presentación de resultados 3. Foco en la elaboración del reporte final de proyecto	Cuestionario Final (segunda aplicación del cuestionario) Entrevista de seguimiento al Cuest. final: Entrevista 3 Reporte final del proyecto.	X* X*

Fuente: Elaboración propia. Nota: * Durante estas entrevistas se asignó un tiempo determinado, específicamente para explorar el proceso de aprendizaje de Clara, aquí reportado.

PROMICE se desarrolló en dos fases. Durante la Fase 1 – cuyo propósito era explorar las concepciones de los profesores participantes sobre las matemáticas y las ciencias escolares, y sobre las posibilidades de poner en acción un enfoque de enseñanza que conecta las dos asignaturas – se recolectó información a través de un Cuestionario (el *Cuestionario inicial*) y una entrevista de seguimiento al cuestionario (*Entrevista 1*). Ver la tabla 1. La Fase 2 que incorporaba el PAP, tuvo lugar en 3 etapas durante un período de 12 meses: i) *Inducción*, conformada por una secuencia de seminarios-taller enfocados en el estudio de situaciones de clase en donde se conectaban las matemáticas y las ciencias. ii)

Diseño, puesta en acción y documentación de un proyecto de aula. iii) *Evaluación* de los proyectos de aula desarrollados.

3. Recolección de la Información

Las fuentes de información utilizadas para la construcción del caso de Clara consistieron principalmente de: el cuestionario y su entrevista de seguimiento (aplicados al inicio y al final del proyecto); las transcripciones de las grabaciones de los talleres, las sesiones de trabajo con cada sub-equipo (cada pareja, en el caso del colegio de Clara); y las entrevistas. La tabla 1 describe el ciclo completo de recolección de información de PROMICE, incluyendo la estructura de trabajo desarrollado en la Fase 2. Durante las entrevistas programadas de PROMICE, de común acuerdo, se asignó tiempo para hacer seguimiento al desarrollo del razonamiento de Clara.

Estudios de caso. Seis de los participantes, entre los que se encontraba Clara, fueron seleccionados como estudios de caso, una vez que terminó la Etapa de Inducción, dada la determinación que tomaron estos participantes de trabajar en parejas (uno de matemáticas y uno de ciencias) para desarrollar su proyecto de aula a través de la co-enseñanza. De estos profesores se recolectó información adicional mediante observaciones de clase y entrevistas de seguimiento a la observación (ver la tabla 1). Esto significa que los profesores estudios de caso, como Clara, participaron en cuatro entrevistas; como hubo interacción entre los profesores participantes y los investigadores a través de correos electrónicos, los correos se convirtieron en otra forma de recolección de información.

4. Análisis de la Información

Este estudio de caso se desarrolló con el propósito de ofrecer una profundización sobre la situación reportada por la investigación previa, la cual subraya que en proyectos que han intentado promover la identificación de conexiones entre matemáticas y ciencias escolares, han surgido dificultades con el conocimiento sobre el contenido disciplinar de los profesores participantes. Las profundizaciones aquí presentadas se obtuvieron al explorar y describir el desarrollo del pensamiento de Clara, mientras ella se enfocaba en la identificación de conexiones entre pendiente y densidad, a lo largo de un proceso de trabajo apoyado por una continua interacción con la asesora/investigadora. La interacción más productiva se observó durante el desarrollo de soluciones, por parte de Clara, a situaciones problema que se proporcionaron con la intención de activar su pensamiento matemático en relación con los conceptos de razón, pendiente y proporción, y durante la discusión sobre su propio proceso de desarrollo de comprensión. Como Clara se involucró activamente en la búsqueda de una mayor comprensión de los conceptos implicados en las situaciones problema ya mencionadas – tanto durante su propio espacio de trabajo como durante las entrevistas – las entrevistas, que fueron entrevistas clínicas, representaron una forma exitosa de explorar su razonamiento matemático. Las entrevistas, transcritas palabra por palabra, que incluyen las explicaciones dadas por Clara a través de diagramas y escritos específicos constituyen un componente importante de la base de datos del estudio de caso (Yin, 2003), base que fue construida organizando en forma cronológica la información recolectada a través de las diferentes actividades e instrumentos de recolección de información descritos en la tabla

1. Esta base de datos fue examinada muchas veces para poder identificar momentos críticos y segmentos del pensamiento de Clara en donde se evidenciara cambio y avance en la comprensión de los conceptos e ideas matemáticas involucradas (e.g., razón, tasa de cambio, proporción patrones lineales, relaciones funcionales y estructura de la ecuación, pendiente y densidad) para construir explicaciones razonables sobre la conexión entre pendiente y densidad, en este caso específico. La frecuente comparación de la información (Glaser y Strauss, 1967), incluyendo la recolectada durante la Fase 1 del estudio principal, apoyó la construcción de la secuencia de aprendizaje reportada en este artículo.

5. La Historia de Clara

Clara es profesora de matemáticas desde el año 2002 en un colegio de Bogotá que atiende estudiantes de bajos recursos económicos. Además de ser licenciada en matemáticas, Clara cuenta con una especialización en educación matemática cuyo foco es el 'inicio del trabajo algebraico escolar'. Clara mostró un gran interés por hacerse participante de PROMICE pues, según ella, quería "aprender a crear situaciones problema que motivaran a los estudiantes por el estudio de las matemáticas y, especialmente, por el del álgebra" (Cuestionario *inicial*) –y se convirtió en una participante muy entusiasta y comprometida con el trabajo propuesto. Como el tema de la enseñanza del concepto de densidad fue uno de los enfocados durante la Etapa de Inducción con el propósito de ilustrar conexiones entre ciencias y matemáticas –y no para ser tomado como tema para los proyectos de aula de los participantes– cada subgrupo de profesores escogió su tema foco de trabajo. Clara y su compañero de ciencias escogieron el tema de la "conservación del agua", y diseñaron una secuencia de actividades que incluía la elaboración de un filtro casero de agua, de cuyo uso se recolectaron datos cuantitativos que fueron tomados luego para apoyar la identificación y expresión de relaciones matemáticas entre el "volumen del agua filtrada" y el "tiempo". Una descripción amplia de este proyecto y todos los demás se encuentra en Agudelo-Valderrama y Vergel (2009b). La información recolectada en la Entrevista 2 muestra que entre los participantes del colegio de Clara no hubo ninguna discusión adicional sobre el caso de enseñanza de Mary (del concepto de densidad) porque los participantes del área de ciencias no se sentían cómodos con las matemáticas involucradas en éste. Para Clara, este hecho representó otro motivo para su búsqueda de respuestas a las preguntas que sobre el tema le habían surgido.

5.1. Las preguntas que, luego, se convirtieron en un desafío

Dos temas que se convirtieron en objeto de discusión durante los talleres de inducción fueron, *i*) la relevancia de las tablas de valores y sus correspondientes gráficas cartesianas –que Mary, en el caso de enseñanza examinado, les pidió realizar a sus estudiantes– y *ii*) la pregunta de si el concepto de razón estaba involucrado en el concepto de densidad. Mientras que Clara y otro profesor de matemáticas expresaron que los números de la tabla no facilitaban la identificación de una relación entre las variables –una observación pertinente– ningún participante del área de ciencias se quiso pronunciar al respecto. No haber llegado a respuestas o argumentos concluyentes en relación con estas preguntas –más el hecho de que Mary, al final de la tercera sesión de clase, trazó en el tablero una representación de masa *vs.* volumen en forma de escalera–

le dejó a Clara una serie de preguntas que se convirtieron en retos para ella. Como explicó en la Entrevista 2, la pregunta más importante estaba relacionada con la conexión entre pendiente y densidad:

> *El caso de enseñanza de Mary para el tema de densidad me dejó con unas preguntas muy difíciles... ¿Se acuerda que al final de la secuencia de actividades, ella tenía el diagrama de la escalera en el tablero? Yo me he estado preguntando, por qué tenía ese diagrama de la escalera cuando estaba enseñando densidad. Creo que eso tenía que ver con pendiente. Me he estado diciendo a mí misma que tiene que haber una razón para que Mary les hubiera presentado a los estudiantes ese diagrama de la escalera ... ¡y esas preguntas me han estado dando vueltas en la cabeza todo el tiempo!* (Entrevista 2)

5.2 El recorrido de Clara en su búsqueda de conexiones entre pendiente y densidad

Como se puede apreciar en los siguientes párrafos, Clara inició su trayectoria de aprendizaje centrando su atención, y dedicando tiempo, a explorar su propia comprensión del concepto de pendiente.

Clara fija su atención en un patrón lineal

Una vez terminó la primera clase – de las cinco que formaban la secuencia de trabajo diseñada por Clara y su compañero para su proyecto PROMICE de aula – Clara le comentó a la asesora que estaba "a punto de encontrar una clarificación importante relacionada con la [pregunta sobre] pendiente y el caso de Mary", pues las ideas de sus alumnos habían actuado como una chispa para ella. "Creo que estoy encontrando una conexión entre el número que se repite en un patrón [figural] que trabajamos en una clase de Grado 8, y pendiente", declaró con entusiasmo. Por razones de tiempo, la interacción con Clara sobre estas ideas específicas sólo pudo continuarse cuatro semanas más tarde, durante la Entrevista 2A. En la siguiente transcripción, y todas las demás, usamos las letras C y E para referirnos a Clara y Entrevistadora respectivamente.

> *E: ¿Podríamos hablar ahora sobre la conexión, que mencionaste el otro día, entre 'el número que se repite' en un patrón y pendiente?*
>
> *C: . . . estábamos trabajando con mis estudiantes de Grado 8 en un ejercicio de un patrón con cuadritos (ver la figura 1). Cuando algunos de ellos, estando trabajando en grupos, empezaron a decir: "en cada posición el número de cuadritos se aumenta en 2". . . yo pensé: entonces 2 debe ser la pendiente de la [correspondiente] recta*[1]*.*
>
> *E: ¿Por qué pensaste en pendiente en ese momento?*
>
> *C: Me acordé de las generalizaciones que mis estudiantes de Grado 11 hacían sobre la recta '$y = 2x + 1$', cuando ellos decían que los valores de y se incrementaban en 2 cada vez – y me pregunté: ¿es ésta la misma situación [que la del patrón en Grado 8]? El número de cuadraditos se incrementa en 2 en cada figura, luego mi pregunta era si la generalización del patrón tenía un '$2n$' [$2n – 1$, con n representando el 'Número de la figura', era la regla que Clara tenía escrita, en su diario, como generalización]. He dedicado una cantidad de tiempo desarrollando patrones. Durante una semana estuve haciendo tablas de valores y chequeando para ver si esto era verdad, y ¡la idea de seguir comprobándolo se me convirtió en una obsesión! Estuve todo el tiempo chequeando si el número que se repite en el patrón era la pendiente, la m.* (Entrevista 2A)

Para Clara fue de gran impacto haber encontrado que las generalizaciones de los patrones en los que ponía a trabajar a sus estudiantes tenían la misma representación

[1] La evidencia señala que para Clara era claro que los pares de valores obtenidos del patrón figural representaban un conjunto de puntos, y no una recta.

algébrica de una ecuación lineal, $y = mx + b$, pues como ella misma lo explicó, la intención para los ejercicios de identificación de patrones que les ofrecía a sus estudiantes era que ellos produjeran una regla de procedimiento (que los estudiantes expresaban verbalmente), para encontrar valores específicos del número de cuadritos de una figura cualquiera de la secuencia. MacGregor y Stacey (1995) encontraron situaciones similares en aulas de clase australianas, y subrayaron que en cambio de examinar explícitamente la regla que conecta las dos variables involucradas en el patrón, los estudiantes simplemente buscaban una regla de procedimiento para hallar respuestas. Para nuestro foco específico de atención, en el caso de Clara, era muy importante tratar de identificar el significado y la representación matemática que ella tenía para la expresión "en cada posición, el número de cuadritos se incrementa en 2", en términos del cambio coordinado de 'x' y 'y' – esto es, de la relación matemática involucrada en la correspondiente *razón.* Si examinamos el escenario del trabajo con patrones que Clara describe en la siguiente transcripción, se hace difícil no conectarlo con las dificultades de los estudiantes que MacGregor y Stacey encontraron en los grupos de estudiantes de su estudio.

Ésta es una sucesión de figuras hechas con pequeños cuadrados:

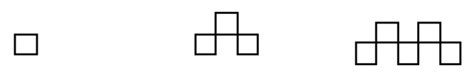

Figura No. 1 *Figura No. 2* *Figura No. 3*

Dibuje la Figura No. 4.

¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 7?

¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 13?

¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 100?

Diga qué fue lo que hizo para encontrar el número de cuadraditos de la Figura No. 100.

Escriba una regla a seguir para hallar el número de cuadritos en la Figura No. 1000 *o* en cualquier otro número de figura.

Figura 1. Patrón figural de donde salió la idea de "el número que se repite"
Fuente: Elaboración propia.

En el escenario de enseñanza de Clara, los estudiantes no son orientados, ni apoyados, para que desarrollen un proceso de aprendizaje que enfoque la construcción y registro de una regla algebraica que conecte las dos variables involucradas (*i.e.*, la relación funcional):

> *E: ¿Cuál era el propósito de aprendizaje para esta tarea o pregunta?*
>
> *C: Encontrar el patrón.*
>
> *E: ¿Y eso qué requiere en términos del trabajo de los estudiantes? ¿Qué hacen los estudiantes?*
>
> *C: A medida que van contestando las preguntas dadas, ellos van mirando el número de cuadraditos para cada caso para, luego, encontrar la regla . . . la mayoría escribió,*

> *"multiplico la posición por 2 y luego resto 1". Algunos escribieron [escribe en una hoja]: "número de la posición × 2 menos 1".*
>
> *E: ¿Y luego? ¿Qué hacen normalmente cuando tú les pides encontrar un patrón como éste? ¿Examinaron o discutieron algo de esa generalización?*
>
> *C: No. Eso fue todo. Normalmente no se hace más nada.*
>
> *E: Entonces, en este patrón, ¿ellos no enfocaron o discutieron sobre el porqué o sobre lo que significa 'el número que se repite', o sobre la conexión con pendiente, por ejemplo?*
>
> *C: ¿La conexión? ¡Yo encontré la conexión! Fui yo. Ellos no hacen eso.* (Entrevista 2A)

La conexión que Clara señaló, entre "el número que se repite" en el patrón figural y pendiente, en este punto del trabajo, estaba identificada a través del uso mecánico de la fórmula $m = (y-y_1)/(x-x_1)$ para, a partir de la tabla de valores, chequear que 2, el coeficiente de *n* en la generalización del patrón también era el coeficiente de *x* en la correspondiente ecuación: $y = 2x - 1$ – y no a través de la identificación de una comparación multiplicativa entre los cambios de '*x*' y de '*y*' al considerar $(y-y_1)/(x-x_1)$, como lo muestra en sus explicaciones:

> *E: A medida que nos movemos hacia adelante en la secuencia de figuras, el número de cuadraditos aumenta en 2, cada vez. Y, ¿cómo fue que encontraste que la pendiente de la recta 'y = 2x + 1' era 2?*
>
> *C: Ése es el valor de m [señalando el 2; el resultado de los cálculos que había hecho en su cuaderno, e.g., (3-1)/(2-1)=2, (5-3)/3-2)=2, etc. hechos a partir de los valores de las parejas ordenadas: (1, 1); (2, 3); (3, 5), etc.]*
>
> *E: Pero lo que se tiene es la razón 'dos a uno' [escribe 21], que también podemos escribir así: 2:1. Si tenemos 21 como pendiente, ¿qué nos dice ese 21 sobre la forma como los valores de las variables 'x' y 'y' cambian o están cambiando a medida que nos movemos en la gráfica?*
>
> *C: ¿Sobre la forma como los valores de las variables 'x' y 'y' cambian? [con expresión de sorpresa se queda en silencio].*
>
> *E: ¿Qué significa o qué nos dice 21 como pendiente, en este caso?*
>
> *C: La pendiente es la constante que acompaña la variable independiente, la x; y ésta nos da una idea de la posición de la recta en el plano cartesiano, acerca del ángulo que la recta forma con la coordenada x; por ejemplo, ese ángulo para la recta y = x es más pequeño que el de la recta y = 2x; y el de 2x es más pequeño que el de la recta 3x . . .* (Entrevista 2A)

En este escenario, Clara estaba usando los coeficientes de *x* para indexar un conjunto de pendientes, y no para analizar e interpretar el cambio de valores de las variables involucradas. Al mencionar la representación trigonométrica de pendiente, Clara se refirió al ángulo de inclinación, al ángulo entre la gráfica de la función y el je de las *x* – no a la tangente del ángulo que, en el sistema de coordenadas, es la razón $(y-y_1)/(x-x_1)$. No se exploró más el pensamiento de Clara sobre pendiente y ángulo de inclinación en este momento[2]..

Una razón es vista por Clara como un cociente o como un índice

Al considerar *m* como la pendiente, la atención de Clara estaba en el valor numérico resultante de la división (el cociente) entre el valor de la distancia *y*, y el valor de la

[2] Clara evidenció comprensión de la conexión entre ángulo, razón y pendiente, 4 meses después de la finalización de PROMICE, durante el trabajo desarrollado en una Unidad de trabajo de un curso de posgrado.

distancia x –no en la relación multiplicativa entre éstos. En otras palabras, ella no enfocaba la comparación que se hace mediante una razón —comparación que sustenta el razonamiento proporcional— se estaba enfocando en el número 2: "la constante que acompaña la x", en el resultado de la división. Clara misma explicó —durante una sesión de trabajo cuyo propósito era examinar el diseño de las últimas actividades de la secuencia de clase elaborada dentro del marco de PROMICE– que no estaba consciente de la comparación implicada en una razón:

> *Cuando me enseñaron proporcionalidad, la palabra razón aparece cuando a uno le dicen qué es una proporción . . . 'a/b = c/d es una proporción; la igualdad de dos razones. Le enseñan que en la razón a/b, a es el antecedente and b es el "consecuente". . . y luego siguen ejercicio de hallar el término desconocido, pero, luego, el tema de razón no se toca más en el programa de matemáticas. Cuando yo enseñé proporcionalidad en Grado 7, repetí algunas cosas de las que me enseñaron y luego pasé rápidamente a otro tema . . . Yo pensé que eso no era importante.*

Las mismas ideas fueron identificadas en la información recolectada en la Fase 1, a través del Cuestionario inicial, y la correspondiente entrevista de seguimiento, en una de las preguntas que enfocaba el tema subrayado por un grupo de profesores de ciencias sobre la dificultad de los estudiantes con la regla de tres (ver la figura 2).

C4. Juan, un profesor de ciencias naturales declaró:

> Una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes en la clase de ciencias es que no saben aplicar la regla de tres. Si yo les doy la pregunta: ***la masa de 20 ml de alcohol es 18 g. Cuál es la masa de 50 ml de ese mismo alcohol*** - no pueden hallar la regla de tres, y esa falta de comprensión del concepto matemático los tranca . . . . ¿Que qué hago? Pues les digo cómo cuadrar la regla, y que luego se multiplica en cruz . . . .

a) ¿Qué opina de los planteamientos del profesor Juan sobre la dificultad de los alumnos?

b) Si el profesor Juan le pidiera a usted que, como profesor(a) de matemáticas, le dicra una idea sobre cómo apoyar a los alumnos para que superen la dificultad arriba descrita, ¿qué idea(s) le daría usted a Juan?

Figura 2. Pregunta C4 del Cuestionario
Fuente: Elaboración propia.

Para Clara, una tarea que requería el uso de razonamiento proporcional era, por ejemplo, aquella en la que había que identificar el coeficiente de x, en la generalización simbólica de un patrón lineal (*i.e.*, el valor de m en $y = mx$ + b), que, en este caso, era un entero. Clara le recomendaría a su colega:

> *Hacer una tabla de valores para identificar cómo se relacionan las dos variables y luego identificar una forma de hallar el valor pedido sin usar la regla de tres. (Parte b de la Pregunta C4, Cuest. Inicial) . . . . Por ejemplo, para cocinar 1 taza de arroz se necesitan 2 tazas de agua . . . basados en esta proporción dada, pueden calcular cualquier otro valor y luego encontrar la generalización . . . o sea, si x es tazas de arroz, y = 2x. Para encontrar y se multiplica x por 2.* (Entrevista 1)

Aunque Clara habló de una "proporción dada", ella no dejó ver una consideración explícita o su atención la relación de 2 a 1 para, luego, considerar diferentes formas de expresión de la razón. Su preocupación inmediata era buscar la constante que multiplica a x. La urgencia de, simplemente, identificar el coeficiente de x también fue observada en sus planes iniciales de clase para la secuencia de PROMICE –en la que, como ya se dijo, se enfocaba en la identificación de la relación entre las variables "volumen del agua filtrada" y "tiempo– eliminándose así el espacio para la consideración y el trato explícito de la razón como "unidad", y/o como unidad iterada –a la que Singh (2000) denomina "unidad compuesta" ("*composite unit*"). Claramente, esta forma de abordar situaciones proporcionales elimina la necesidad de establecer otros valores para una razón dada, en coordinación con una unidad compuesta, esto es, de establecer "un esquema coordinado para la unidad" (Singh, 2000, p. 280) –esquema que evidenciaría la existencia del pensamiento multiplicativo que está en la base del razonamiento proporcional. Para que Clara creara conexiones entre proporcionalidad y pendiente y, además, asignara algún significado que apoyara una mejor comprensión de la situación problema específica enfocada, era necesario que identificara y mantuviera en mente la comparación multiplicativa entre las dos cantidades presentes en el coeficiente de x (en la generalización $y = \mathrm{m}x$); pero su foco de atención en un coeficiente entero –esto es, en el resultado de la división de las dos cantidades que se están comparando– oscurecía el significado de la razón y de la situación problema porque ella la veía como un índice (Lamon, 1999).

Clara encuentra un punto de entrada hacia el alcance de su propósito

A los profesores participantes se les entregó material de lectura de fácil comprensión, basado en investigaciones sobre el razonamiento de estudiantes de secundaria mientras trabajan en preguntas sobre pendiente como medida (esto es, como razón) y como tasa de cambio[3] Además de esto, a los profesores de matemáticas seleccionados como estudio de caso se les pidió que trabajaran en la solución de situaciones problema específicas, diseñadas con el propósito de activar su pensamiento sobre pendiente como razón (ver la figura 3), y que trataran de socializar sus soluciones con sus compañeros de proyecto. La conversación con Clara acerca de su búsqueda de una conexión entre pendiente y densidad continuó en la Entrevista 3, cuando manifestó que había estado trabajando activamente en la exploración de las preguntas que se les había planteado:

> *Estuve buscando en Internet sobre el tema de pendiente . . . leí, otra vez, el artículo sobre pendiente, y trabajé con un colega, lo que fue muy productivo: Discutimos sobre el significado de razón y de comparación de razones, y trabajamos en las situaciones problema que ustedes nos dieron ...* (Entrevista 3)

Las profundizaciones que Clara había alcanzado se evidenciaban en los registros que había hecho en su diario de reflexión, y en sus respuestas al Cuestionario *final.* La primera reflexión que quería compartir era que las ideas sobre pendiente que había expresado en las anteriores entrevistas no estaban basadas en la identificación de pendiente como razón:

> *Nunca imaginé que cuando uno da la pendiente de una recta, uno está comparando la distancia vertical con la distancia horizontal. Cuando yo aprendí lo de pendiente, me dijeron la fórmula para calcularla: m = razón $(y-y_1)/(x-x_1)$. Uno simplemente aprende y usa esa fórmula de memoria; y yo siempre lo vi como, "haga la división": divida el valor de la distancia y por el valor de la distancia x para hallar el valor de la pendiente de la recta, pero uno nunca piensa que se están comparando los dos valores ¡mucho menos que los está comparando por medio de la multiplicación! . . . . .* (Entrevista 3)

[3] El artículo de Stump (2001), traducido al español con la autorización de su autora fue proporcionado a los participantes de PROMICE durante la Etapa de Inducción.

En la Pregunta C4 del Cuestionario *final*, ella había recomendado, nuevamente, que en cambio de usar la regla de tres, los estudiantes necesitaban hacer cálculos usando la razón dada, pero esta vez había propuesto un ejemplo que sugería el uso de unidades compuestas de la razón:

> *. . . dándoles situaciones similares pero con números sencillos para que puedan ver fácilmente una forma de hacer los cálculos basados en la proporción dada; por ejemplo, para 200 ml de limonada se necesitan 40 g de azúcar. Ellos pueden calcular la cantidad de azúcar para cualquier cantidad de limonada hasta llegar a la cantidad deseada.* (Parte b - Pregunta C4, Cuestionario final)

Cuando se le preguntó a Clara, qué le había ayudado para que llegara a ver la pendiente como una razón, en forma reiterada identificó "dos momentos importantes" de su trabajo. El primer momento fue "cuando [entendió] que en una razón se están comparando las dos cantidades"; y "el segundo, que realmente se volvió el más importante" para su nueva forma de pensar sobre pendiente fue "el trabajo sobre inclinación de una rampa" (ver la figura 3). Con respecto al primer momento, Clara subrayó como dificultad inicial, el hecho de ver la razón como el resultado de la división:

> *. . . por ejemplo, cuando uno dice, dos pocillos de agua por uno de arroz, obviamente está comparando las dos cantidades: uno está diciendo el número de pocillos de agua es el doble del número de pocillos de arroz, pero el problema estaba en que yo pensaba siempre en razón como una división, no como una razón . . . aunque ahora me he concientizado más de que cuando uno hace una división lo hace a través de la multiplicación; o sea que los está comparando mediante la multiplicación . . .* (Entrevista 3)

Para colaborarle a Clara en la descripción del segundo memento, la entrevistadora le ofreció una hoja con un diagrama simplificado de la situación problema sobre el nivel de inclinación de una rampa de *TransMilenio* (ver la figura 3).

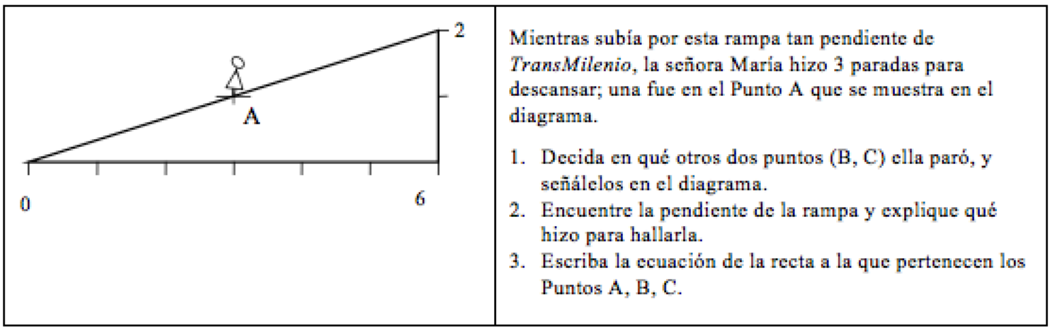

Figura 3. Diagrama simplificado que muestra el nivel de inclinación de una rampa de TransMilenio
Fuente: Elaboración propia.

En una hoja de su cuaderno cuadriculado, Clara hizo la representación gráfica que se muestra en la figura 4. Mientras dibujaba la gráfica, y explicaba lo que pensaba, usó la pendiente como razón y como tasa de cambio; también explicó por qué la representación de la escalera estaba presente en su gráfica. La cita que aparece después de la figura 4 sintetiza sus explicaciones.

Marcando con su lápiz, un vez más, las distancias horizontales entre cada uno de los puntos mencionados (Punto A y aquellos cuyas coordinadas x son 4, 5 y 6) lo mismo que el correspondiente incremento de 1/3) en la vertical (ver los valores de y, escritos sobre cada punto, y las flechas con explicaciones), Clara dijo, "Y ahí tenemos la escalera". Clara había identificado la representación de la escalera, antes de esta entrevista, cuando la investigadora, de manera intencionada, le había pedido que volviera a pensar en la razón por la que ella había asociado 'el número que se repite', en el patrón figural, con la pendiente de la recta $y = 2x - 1$; y también que observara con atención lo que este número indicaba en la representación cartesiana. En respuesta, Clara desarrolló un trabajo sistemático y extenso que mostraba tres formas de representación y conteo para los cuadritos de la secuencia del patrón figural: diagramas, tablas de valores (*i.e.*, tablas de dos columnas, una de las cuales mostraba la iteración del 2 como sumando que se repite), y las correspondientes representaciones cartesianas; en una de las observaciones con que terminó el trabajo, subrayó: "2, el número que se repite, representa la altura de cada escalón de la escalera porque en ésta los valores de x cambian de 1 en 1. . . luego, el valor 2 viene de la razón 2/1(trabajo enviado por correo electrónico).

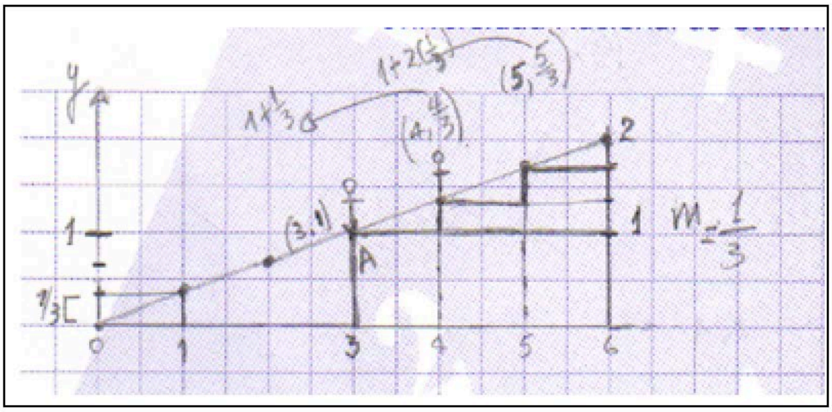

Figura 4. Representación gráfica que Clara hizo para la pendiente de una rampa de TransMilenio

Fuente: Elaboración propia.

> *El hecho de tener que hallar los valores de las coordenadas de los tres puntos me hizo mantener en foco los valores de la horizontal y la vertical para los tres puntos al mismo tiempo. El diagrama me muestra claramente que para cualquier punto que uno quiera considerar, la horizontal es 3 veces la vertical; mejor dicho, la vertical es 1/3 de la horizontal . . . . Cuando uno se mueve una unidad en la horizontal, por ejemplo, de 3 a 4, el movimiento en la vertical es 1/3; y ahí es cuando uno empieza a ver la escalera porque por cada unidad de x que uno se mueve [hacia la derecha], el incremento de y es 1/3. Por eso es que la pendiente de la recta es 1/3 . . . . Al solucionar esta pregunta nos dimos cuenta [mi compañero y yo] que para hallar la pendiente de una recta no necesitábamos usar la fórmula de los 2 puntos, [$(y-y_1)/(x-x_1)$], como siempre la habíamos creído.* (Entrevista 3)

La identificación de las estructuras aditivas que están detrás de las tablas de valores (x, y) de la correspondiente ecuación lineal –tanto en la exploración sistemática del crecimiento del patrón figural como en el trabajo estratégico para la pregunta sobre la pendiente de la rampa– se convirtió, para Clara, en una herramienta analítica que apoyó su comprensión de la pendiente como una comparación multiplicativa de dos variables que cambian en forma coordinada. La adición repetida del "2, el coeficiente de x" en el patrón figural, también manifiesta en la gráfica cartesiana, se convirtió en un medio importante para la identificación de conexiones entre estructuras aditivas y multiplicativas, razones equivalentes y representaciones algebraicas de funciones lineales. El trabajo y explicaciones de Clara en la pregunta sobre la pendiente de la rampa representa, para nosotras, un refuerzo de los actos de comprensión manifiestos en su examen del patrón figural. En este punto del trabajo, la representación de la escalera que asociaba masa y volumen, en el caso de enseñanza de Mary, tenía sentido para Clara, ya que ahora ella podía ver una conexión entre pendiente y densidad. Después de explicar que "densidad (D), o sea la razón *masa/volumen*, puede ser asociada con la pendiente en la ecuación $D \,.\, x = y$", afirmó:

> *Ahora tengo claro que la relación masa/volumen de cualquier materia también es una razón . . . y cada vez que representamos un pareja de valores [masa, volumen], esa razón está presente . . . . Y razón es un concepto que se usa en la mayoría de los temas de física; por eso me alegra haber comprendido esto . . . . Ahora, volviendo a mirar lo que pasó en el aula de clase de Mary, pienso que los estudiantes necesitaban dedicar atención y tiempo a las comparaciones entre masa y volumen, porque eso no sucedió . . . .* (Entrevista 3).

Al retomar la conversación sobre el caso de los estudiantes que usan la Regla de tres, en forma mecánica, Clara proporcionó evidencia de que había empezado a desarrollar comprensión sobre una problemática de la enseñanza de proporcionalidad. Después de examinar las formas de dar solución a preguntas especificas de la prueba final (aplicada como parte de la recolección de información de PROMESA) de algunos de sus estudiantes, y encontrar que plantearon una regla de tres y obtuvieron una respuesta, sin más explicación, Clara declaró: "Saber aplicar una regla de 3 no quiere decir que se cuente con un razonamiento proporcional . . ." y, luego, afirmó con énfasis, ". . . el cambio tiene que darse en la enseñanza de proporcionalidad en la escuela, pero para ello, primero los profesores tenemos que aprender unas matemáticas diferentes . . . porque todo está conectado ..."

6. Discusión

Nuestra intención en esta publicación no es resaltar deficiencias en la forma de saber matemáticas de una profesora. Mediante la escritura de este artículo nos hemos unido al interés de Clara por hacer pública esta trayectoria de trabajo y aprendizaje colaborativo, pues, según ella, "puede representar un recurso útil para profesores de matemáticas y ciencias". La dificultad de Clara al tratar de identificar conexiones entre pendiente y densidad estaba arraigaba en un conocimiento del contenido matemático itemizado, y basado en la aplicación de reglas de procedimiento recibidas, que sustentaba su concepción de pendiente como un número que acompaña la x en una ecuación de la forma $y = mx + b$. Su enfoque computacional del concepto de razón, evidenciado también en su enseñanza de patrones, no le ayudaba a encontrar significado a la representación de masa *vs* volumen de la escalera que usó Mary en el caso de enseñanza; esto produjo un desequilibrio en su pensamiento sobre pendiente, que le proporcionó el ímpetu para involucrarse activa y comprometidamente en un proceso de exploración del tema, con el objeto de encontrar una respuesta para su pregunta sobre la conexión entre pendiente y densidad. A través de un proceso de interacción con la investigadora, y la exploración continua de las situaciones problema sugeridas, alcanzó un desarrollo conceptual mediante la identificación de conexiones entre ideas matemáticas personales iniciales y nuevas, entre situaciones del contexto de la vida diaria y conceptos de matemáticas y ciencias. El desarrollo de mayor profundidad en el pensamiento matemático, buscado por Clara, emergió del examen de una actividad de identificación de patrones figurales lineales; durante tal examen, haber enfocado la atención en la adición repetida, y su viva representación en estructuras multiplicativas, manifiestas en diferentes formas de representación, facilitó el alcance de una comprensión de pendiente como razón y como tasa de cambio; esta comprensión de razón le ayudó a identificar y explicar una conexión con densidad.

Tanto para Clara como para la asesora y primera autora, el proceso de trabajo e interacción descrito ofreció aprendizajes importantes, pues este trayecto fue construido a través de un trabajo apoyado por el compromiso profesional mutuo, en el que la asesora prestó oído atento a las ideas y propósitos de aprendizaje de Clara – y Clara mantuvo el rol de oyente y estudiante *activa* a lo largo de los 14 meses que duró PROMICE. Su incansable dedicación al trabajo y tareas propuestas, y la disposición excepcional que mantuvo por su continuo aprendizaje profesional muestran que Clara había creado una especie de "apego al objeto [matemático] que se propuso comprender" mejor – una característica de quienes buscan "una forma conectada de conocer" (Zohar, 2006). En este escenario vemos una ilustración de la *interconexión* de quienes participan en el acto de pensar, uno de los dos aspectos relacionados con la enseñanza para la comprensión subrayados en este artículo: la continua interacción con los estudiantes, y la atención a su pensamiento y a sus motivaciones e intenciones de aprendizaje – necesarias en las aulas de clase de matemáticas – de donde el profesor construye continuamente su conocimiento de sus estudiantes y su aprendizaje. Para que esto tenga lugar en forma eficiente, el profesor de matemáticas necesita un conocimiento profundo y *conectado* del contenido matemático – el otro aspecto resaltado.

Mientras que la historia de Clara ofrece ilustración de dificultades específicas con el contenido matemático que un profesor puede tener cuando se piensa en una *enseñanza para la comprensión* – y cuando se intenta promover la creación de conexiones entre las matemáticas y las ciencias escolares – esta historia, de manera más importante, ofrece un sólido ejemplo de *la forma de saber* que necesita el profesor de matemáticas. La historia de Clara y las evidencias obtenidas del estudio principal (ver Agudelo-Valderrama y Vergel, 2009a, b) sugieren fuertemente que un foco principal de los programas de aprendizaje profesional debe ser la organización de trabajo matemático que apoye a los profesores en el desarrollo de una comprensión más profunda de conceptos matemáticos fundamentales. Los profesores escolares necesitan amplias oportunidades de participación en programas de aprendizaje profesional de largo plazo, que se enfoquen en el contenido matemático, para involucrarlos activamente en la construcción de un conocimiento profundo y ampliamente conectado de las matemáticas para la enseñanza. La efectividad de estos programas necesariamente debe convertirse en foco de investigación.

Referencias

Agudelo-Valderrama, C. y Vergel, R. (2009a). *Informe final del Proyecto PROMICE. Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: Integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital.* Bogotá: IDEP, Secretaría de Educación Distrital.

Agudelo-Valderrama, C. y Vergel, R. (2009b). La apertura del aula de ciencias para promover el desarrollo del pensamiento algebraico: el caso del profesor Simón, participante del Proyecto PROMICE. En L.F. Acuña y L. Zea (Eds.). *Universidad-escuela y producción de conocimiento pedagógico: resultados de la investigación IDEP- Colciencias* (pp. 245-258). Bogotá: IDEP.

Ball, D.L., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Nueva York: McMillan.

Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School, 10*(1), 14-17.

Basista, B. y Mathews, S. (2002). Integrated science and mathematics professional developmnet programs. *School Science and Mathematics, 102*(7), 359-370.

Birgin, O. (2012). Investigation of eight-grade students' understanding of slope of the linear function. *Bolema, 26*(42), 139-162.

Czerniac, C., Weber, W., Sandman, A. y Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics. *Integration, School Science and Mathematics, 99*(8), 421-430.

Dawkins, D., Dickerson, D., McKinney, S. y Butler, S. (2008). Teaching density to middle school students: Pre-service science teachers' content knowledge and pedagogical practices. *A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 82*(1), 21-26.

Department of Education and Early Childhood Development. (2013). *Principles of Learning and Teaching P-12*. Recuperado de http://www.education.vic.gov.au/

Dole, S., Clarke, D., Wright, T. y Hilton, G. (2009). Developing year 5 students understanding of density: implications for mathematics teaching. En R. Hunter, B. Bicknell y T. Burges (Eds.). *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (*pp. 153-160). Palmerston North, NZ: MERGA.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33.

Frykholm, J. y Glasson, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141.

Glaser, B. y Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory*. Chicago, IL: Aldine Publishing Co.

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H.C., y Ball, D.L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MacGegor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on student perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Michelsen, C. (2005). Expanding the domain: variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics. En A. Beckmann, C. Michelsen y B. Sriraman (Eds.), *Proceedings of the 1st international symposium of mathematics and its connections to the arts and sciences* (pp. 201-214). Gmünd: The University of Education.

Michelsen, C. y Sriraman, B. (2009). Does disciplinary instruction raise students' interest in mathematics and the subjects of the natural sciences? *ZDM Mathematics Education, 41*(1-2), 231-244.

Ministerio de Educación Nacional. (1998a). *Lineamientos curriculares de ciencias naturales y educación ambiental.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998b). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadan*as. Bogotá: Magisterio.

Moschkovich, J. (1996). Moving up and getting steeper: negotiating shared descriptions of linear graphs. *The Journal of the Learning Sciences, 5*(3), 239-277.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Academy Press.

National Research Council. (1996). *The National Science Education Standards.* Washington D.C.: National Academy Press.

Roach, L. (2001). Exploring students' conceptions of density. *Journal of College Science Teaching, 30*(6), 386-389.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Londres: The Falmer Press.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292.

Smith, C., Maclin, D., Grosslight, L. y Davis, H. (1997). Teaching for understanding: A study of students' preinstruction theories of matter and comparison of the effectiveness of two approaches to the teaching about matter and density. *Cognition and Instruction, 15*(3), 317-393.

Steen, L.A. (1999). Does everybody need to study algebra? In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking grades K-12: readings from NCTM's school journal and other publications* (pp. 49-51). Reston, VA: NCTM.

Stump, S. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as a measure. *School Science and Mathematics, 101*(2), 81-89.

Stump, S. (1997). Secondary mathematics teachers' knowledge of the concept of slope. Comunicación presentada en el *The annual meeting of the American educational research association.* Chicago, IL: EDRS.

Westbrook, S. (1998). Examining the conceptual organization of students in an integrated algebra and physical science class. *School Science and Mathematics, 98*(2), 84-92.

Woodbury, S. (1998). Rhetoric, reality, and possibilities: interdisciplinary teaching and secondary mathematics. *School Science and Mathematics, 98*(6), 303-311.

Yin, R.K. (2003). Cas*e study research: design and methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Zaslavsky, O., Sela, H. y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 119-140.

Zohar, A. (2006). Connected knowledge in science and mathematics education. *International Journal of Science Education, 28*(13), 1579-1599.