La mecánica hamiltoniana y el enfoque de Tarsky*

ROLANDO ALVARADO** Y MÁXIMO AGÜERO GRANADOS***

Hamiltonian Mechanics and Tarsky´s Approach

Abstract. *In the present article we present an approach by using certain results reached by Tarsky to show, with the limitations made explicit in the introduction, that Hamiltonian Mechanics can be considered as a way of expressing propositions about subsets in the projective space. For this purpose we propose a very simplified formalized system in which the basic propositional functions express the properties that permit the partial reconstruction of the theoretical body of Hamiltonian Mechanics.*

Introducción

En este estudio presentamos una breve formalización de un segmento de la matemática en la mecánica clásica, que sirve como base para demostrar que los enunciados dentro de este trozo son siempre relativos a subconjuntos del espacio proyectivo. Para esto, tomamos como punto de partida un resultado de Alfred Tarsky (1956).

En este intento se toman como funciones proposicionales básicas aquellas que expresan la geometría local de las variedades lagrangianas; es decir, la construcción de la mecánica hamiltoniana está basada en proposiciones que, ineludiblemente, hacen referencia continua a esta geometría y, en particular, a las nociones de vectores tangentes y vectores normales a la variedad lagrangiana.

Las suposiciones que se hacen son un tanto restrictivas, pues en esta formalización lo expresable está dentro de un sistema sintáctico cuantificacional. Sin embargo, no es la intención el mostrar un esquema completo que reconstruya formalmente a la mecánica hamiltoniana y el conjunto completo de lo expresable en ella. Para eso, habría que formalizar primero las expresiones matemáticas sobre las que dicha mecánica está construida y erigir toda una semántica al respecto. Nuestra intención es mostrar que tal mecánica puede ser considerada como una forma de expresar proposiciones traducibles a un tipo especial de conjuntos: los conjuntos proyectivos. Y es aquí donde el trabajo de Tarsky resulta importante, debido a que si somos capaces de explicar que alguna parte de la mecánica hamiltoniana es reconstruible en términos de proposiciones basadas de manera exclusiva en expresiones acerca de conjuntos proyectivos, entonces el resultado de Tarsky nos indica que las proposiciones de la mecánica hamiltoniana son siempre acerca de subconjuntos del espacio proyectivo. Exponer la posibilidad de lo anterior es el objetivo del presente trabajo.

Para ello es necesario tratar de definir las funciones proposicionales primitivas, a partir de las cuales el edificio entero será construido mediante la consideración de la aplicación a éstas de las operaciones lógicas permitidas dentro del sistema elegido. La intención del trabajo es demostrar, primero, que dichas funciones proposicionales primitivas definen conjuntos proyectivos, así, el resultado es inmediato. Sin embargo, la dificultad estriba en que se requiere formalizar, aunque sea mínimamente, el lenguaje en el cual se expresan las proposiciones de la mecánica. Este lenguaje es usual, pero tecnificado, y será tal tecnicidad la base de nuestro intento.

El apartado I de este artículo aborda la mecánica hamiltoniana de las ecuaciones de segundo orden, porque está íntimamente relacionada con las ecuaciones diferenciales de orden dos; bajo este esquema, el conocimiento de una integral de la ecuación de Hamilton-Jacobi permite, en ocasiones, resolver la ecuación diferencial (re-

* *Este trabajo ha sido financiado en parte por el proyecto UAEM 1336/98 y gracias al apoyo constante del Centro de Estudios Multidisciplinarios de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Agradecemos los comentarios del Dr. Abraham Medina y del Dr. V. Serkin durante el proceso de preparación del manuscrito.*

** *Centro de Estudios Multidisciplinarios, Universidad Autónoma de Zacatecas. Apartado Postal 597-C, Zacatecas, México. C. P. 98070.*
Correo electrónico: ralva@cantera.reduaz.mx
*** *Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. Instituto Literario No. 100. Toluca, Estado de México. C. P. 50000.*
Correo electrónico: mag@coatepec.uaemex.mx

cuérdese la solución de D'Alembert de la ecuación de onda), además de establecer las direcciones en las cuales el problema de Cauchy está bien planteado (en el sentido de Hadamard). Por si lo anterior fuese poco, la integral completa se utiliza, también, para realizar expansiones asintóticas alrededor de ella misma en la forma de un tren de ondas moduladas:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} g_i\left(x_0,\ldots,x_N\right) T_i\left(S\left(x_0,\ldots,x_N\right)\right)$$

La existencia de esta integral nos permitirá utilizar libremente la ecuación de Hamilton-Jacobi como la propiedad definitoria de las normales exteriores, y las tangentes, a las variedades lagrangianas. Primeramente pretendemos motivar la elección de las funciones sentenciales básicas que utilizaremos para modelizar las expresiones. Posteriormente se llevará a cabo el proceso de formalización que, como todos los procesos de este tipo, limita la expresividad del lenguaje usual a cambio de una mayor precisión en el establecimiento de la deducción. Como en todo lenguaje formal que se considere como metalenguaje de algo, en esta sección se mencionan las construcciones básicas realizadas en el apartado I y se utiliza tal lenguaje formalizado para mostrar cómo las expresiones de la mecánica hamiltoniana son definitorias de conjuntos proyectivos. Este paso a la teoría de conjuntos nos asegura estar inmersos ya en la matemática. Además, el tránsito del lenguaje formal de la mecánica hamiltoniana a la teoría de conjuntos, nos asegura estar, propiamente, en la teoría matemática que la sustenta, la cual es, como proponemos, la teoría de los subconjuntos del espacio proyectivo. El nombre utilizado de "mecánica hamiltoniana" es para traer, inmediatamente, reminiscencias de partículas, ondas y similares. Por lo demás, ninguna característica semántica, aunque presente, es discutida con amplitud.

En resumen, el trabajo está dividido en tres partes: en la primera se presenta la mecánica hamiltoniana; en la segunda se exponen las ideas de Tarsky relativas a los conjuntos proyectivos y las funciones proposicionales y se indica cómo utilizarlas para demostrar que cualquier proposición de la mecánica hamiltoniana es una proposición sobre conjuntos proyectivos. En la tercera parte se discute lo expuesto en las secciones anteriores.

I. Mecánica hamiltoniana de las ecuaciones de segundo orden

En este apartado nos ocuparemos de la geometría local de las superficies de discontinuidad de la ecuación diferencial semilineal de orden 2 (Courant y Hilbert, 1989):

$$\sum_{i,j=0}^{N} b_{ij}\left(x_0,\ldots,x_N\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Psi + F\left(\Psi_0,\ldots,\Psi_N,\Psi,x_0,\ldots,x_N\right) = 0 \qquad (1)$$

donde $\Psi_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Psi$.

Al estudio de esta geometría lo llamaremos "mecánica hamiltoniana de las ecuaciones de orden 2". El principal objetivo de esta discusión es mostrar la importancia, para la geometría local de las variedades lagrangianas, de dos formas cuadráticas definitorias de conjuntos proyectivos. Estas superficies de discontinuidad, dadas siempre en términos de una parametrización local de Monge, se pueden definir, en la notación conjuntista, como sigue:

$$C = \left\{\left(x_0,\ldots,x_N\right) \middle| S\left(x_0,\ldots,x_N\right) = 0\right\} \qquad (2)$$

O sea, el conjunto de todos los puntos $(x_0,\ldots,x_N)$ tales que satisfacen la ecuación $S(x_0,\ldots,x_N) = 0$.

La geometría local de este conjunto es en la que estaremos interesados en los párrafos restantes. Como se puede apreciar, esta superficie queda adecuadamente definida una vez que damos la forma explícita de la función S. Ésta se puede conocer si somos capaces de encontrar una solución de la ecuación característica de (1):

$$W = \left(p_0,\ldots,p_N\right) = \sum_{i,j=0}^{N} b_{ij} p_i p_j = 0 \qquad (3)$$

en la forma de una integral completa que incluya N constantes arbitrarias:

$$S = S\left(x_0,\ldots,x_N;x_0^0,\ldots,x_N^0\right) \qquad (4)$$

Esta superficie de discontinuidad es una variedad lagrangiana en la que, por definición, se anula la 2-forma simpléctica fundamental (Arnold, 1989):

$$\Omega|_C = 0 \qquad (5)$$

Es sencillo demostrar que esto es así tomando en cuenta al momento canónico $p_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} S$ y a la naturaleza antisimétrica de la 2-forma fundamental. Supondremos que vale el teorema de existencia de Cauchy-Kovalevsakaya (Courant y Hilbert, *op. cit.*) y que, por ende, la integral analítica completa existe. Esto hace de la ecuación característica una identidad que podemos utilizar libremente para definir las normales exteriores a la variedad lagrangiana.

Podemos ver fácilmente que la ecuación (3) define una forma cuadrática para las componentes de la normal exterior en cada punto de C:

$$C_N = \left\{ (p_0, \ldots, p_N) \mid W = \sum_{i,j=0}^{N} b_{ij} p_i p_j = 0 \right\} \tag{6}$$

Por lo que en cada punto de la variedad lagrangiana tenemos definida para las componentes de la normal exterior una cónica, que en el peor de los casos será un punto. En el haz tangente ocurre una situación similar, ya que las direcciones bicaracterísticas están también ubicadas sobre una cónica asignada a cada punto de C. Esto se puede ver al escribir las ecuaciones características de la ecuación (3):

$$x_i = \frac{\partial W}{\partial p_i} \tag{7}$$

$$p_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} \tag{8}$$

Si nos olvidamos de la ecuación (7) y nos detenemos en la ecuación (8), deducimos que las componentes de los vectores tangentes están relacionadas por afinidad con las componentes de la normal:

$$x_i = \sum_{i,j=0}^{N} b_{ij} p_j \tag{9}$$

Se puede invertir esta transformación para obtener:

$$p_i = \sum_{i,j=0}^{N} b_{ij}^{-1} x_j \tag{10}$$

donde con b_{ij}^{-1} denotamos los coeficientes de la matriz inversa a la de b_{ij}. De aquí se obtiene si se apela a la ortogonalidad de las componentes normales y tangenciales en una variedad lagrangiana (válida cuando existe la integral completa (*ibid.*)), la siguiente superficie en el espacio tangente a cada punto de C:

$$C_T = \left\{ (x_0, \ldots, x_N) \mid W^{-1} = \sum_{i,j=0}^{N} b_{ij}^{-1} x_i x_j = 0 \right\} \tag{11}$$

que es otra cónica. Las propiedades de estos conjuntos se pueden caracterizar en relación con la posición de la recta al infinito del plano proyectivo:

$$\Pi^N(\Re) = \Re^{N+1} - \{0\}/\sim \tag{12}$$

Sobre el conjunto de los números reales, la relación de equivalencia señalada es la que parte al espacio en clases de puntos homotéticos a uno dado. Para demostrar que los dos conjuntos anteriores son proyectivos, necesitamos enunciar la definición de subconjuntos del espacio proyectivo.

Definición 1

Decimos que un conjunto K es un subconjunto de $\Pi^N(\Re)$ si K, en la parametrización de Monge, está definido por una forma homogénea ϕ, de un orden cualquiera. Esta forma homogénea se escribe comúnmente en coordenadas homogéneas, por lo que define también un subconjunto de $\Re^{N+1}$.

En el espacio $\Re^N$ la forma que determina al subconjunto proyectivo es no homogénea, pero la transformación: $x_i^0 = \frac{x_i}{x_0}$ con $i = 1,\ldots,N$ la homogeneiza, es decir:

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\sigma} \phi(x_0, \ldots, x_N) = \phi(1, x_1^0, \ldots, x_N^0) \tag{13}$$

Con la transformación aducida, la posición de la recta al infinito queda caracterizada por la línea: $x_0 = 0$. Así, si se apela a esta definición, la naturaleza proyectiva de C_N y C_T, así como la autopolaridad de los vectores normal y tangente en cada punto, queda de manifiesto. Las rectas al infinito de las superficies C_N y C_T están caracterizadas por las ecuaciones: $p_0 = 0$, $x_0 = 0$. Los resultados de la geometría proyectiva establecen que si la recta al infinito no toca a la cónica, entonces ésta es una elipse. O sea, es homeomorfa a una circunferencia.

En vista de lo anterior, resulta natural el plantear una integral completa de la forma ($x_0 = t$):

$$S = \Phi(x_1, \ldots, x_N) - \omega t \tag{14}$$

por lo que la recta al infinito, en el caso de C_N, queda como $\omega = 0$. En esta integral hemos omitido las constantes arbitrarias por comodidad en la notación. En el espacio tangente la recta al infinito determina la parametrización en términos de t.

II. El teorema de Tarsky

En este apartado y en lo que resta del artículo, se utilizara libremente la notación de Lebesgue para conjuntos (Tarsky, 1956). Ésta es:

$$E_{x_0, \ldots, x_N} \Phi(x_0, \ldots, x_N) \tag{15}$$

y se lee: el conjunto en el espacio de las variables mostradas; en este caso: $x_0,\ldots,x_N$; que satisface la condición Φ. Debemos recalcar que Φ es el enunciado de tal condición, por lo que es posible, en esta notación, escribir la fórmula:

$$E_{x,y}(x \leq y)$$

que determina el plano, con borde incluido, sobre la recta: $x = y$. Introducimos esta notación de Lebesgue porque con ella es sencillo formular la dualidad logicomatemática requerida para pasar de una construcción sintáctica –en nuestro caso un sistema sintáctico cuantificacional– a la teoría de conjuntos.

Por ejemplo, el predicado Fx, que podría decir: x es rojo, tiene, en la notación de Lebesgue, por conjunto de elementos que lo satisfacen, el de todos aquellos objetos que sean rojos: $E_x(Fx)$. La utilización de símbolos sincategoremáticos como los paréntesis y las comillas obedece a una necesidad de claridad en la exposición, debido a que mediante tales símbolos es posible fijar la unicidad de la lectura. Sin embargo, podrían evitarse siempre y cuando no se afecte la univocidad del texto, aunque se utilizarían frases de lectura difícil, como el símbolo de Sheffer, o la notación de Lukasiewicz. Los conjuntos (2), (6) y (11) del apartado anterior se pueden escribir fácilmente en la notación de Lebesgue.

El teorema de Tarsky (*ibid.*) es el siguiente:

Teorema 1

Las cinco operaciones lógicas, cuando son aplicadas a funciones proposicionales proyectivas, siempre conducen a funciones proposicionales del mismo tipo.

En su trabajo original, Tarsky, definió las funciones proposicionales de la siguiente manera: en primer término, fijó las funciones proposicionales primitivas, que correspondían a las proposiciones básicas de la aritmética de los números reales y, posteriormente, definió a las funciones proposicionales como el menor conjunto formado mediante la aplicación, un número finito de veces, de las cinco operaciones lógicas que manejó en su construcción sintáctica. Tales operaciones son: cuantificación universal (∀), cuantificación existencial (∃), negación (¬), disyunción (∨) y conjunción (∧).[1] En este trabajo utilizaremos dos predicados como funciones proposicionales primitivas en la formalización de la mecánica hamiltoniana, y definiremos el conjunto de funciones proposicionales recursivamente.

Llamaremos conjunto proyectivo a aquel que satisfaga la primera definición del segundo apartado. Así, las condiciones impuestas bajo el símbolo de Lebesgue serán expresadas en términos de formas homogéneas para asegurarnos la proyectividad del conjunto.

La definición que proporciona Tarsky, siguiendo a Lusin, de un conjunto proyectivo se detiene en la caracterización de sus propiedades topológicas. La definición es como sigue:

Definición 2

Un conjunto de puntos es proyectivo cuando es obtenido a partir de un conjunto cerrado mediante la aplicación, un número finito de veces, de dos operaciones: proyección ortogonal y complementación.

No trataremos de demostrar aquí la equivalencia de la definición 1 y la definición 2, sin embargo, recalcaremos que, en el contexto de Tarsky, la definición 2 tuvo un papel prominente para mostrar la generalidad de su teorema.

En nuestro caso, en el contexto de la mecánica hamiltoniana, podemos razonar del siguiente modo: parte de la geometría local de las variedades lagrangianas, definidas por el frente de onda S, está contenida en las formas homogéneas W, W^{-1} y, por ende, en los conjuntos proyectivos:

$$E_{p_1,\dots,p_N} W,\; E_{z_1,\dots,z_N} W^{-1}$$

El teorema de Tarsky nos asegura que todas las funciones proposicionales, construidas a partir de tomar todas las proposiciones y relaciones entre las formas cuadráticas W, W^{-1}, nos llevará siempre a conjuntos proyectivos.

Aquí se requiere un poco más de explicación: los símbolos W, W^{-1} que aparecen bajo el E de Lebesgue se deben interpretar –como ya se mencionó en la introducción– como predicados que expresan una propiedad, en este caso, la propiedad de que las componentes del vector al cual afecten satisfaga a la forma cuadrática que representan. Es decir, son predicados poliádicos.

Por ejemplo, escribiremos $W(p)$ para expresar que $p = (p_1,\dots,p_N)$ satisface a la ecuación característica; en tanto que el conjunto C_N no es más que $E_{p_1,\dots,p_N} W(p)$. Aseverar la existencia de un vector en $C_N \cap C$ es aseverar que $\exists(x)\ W(x) \wedge W^{-1}(x)$. La dualidad lógico-matemática nos da la fórmula:

$$E_x\big(\exists(x)\, W(x)\wedge W^{-1}(x)\big)=\bigcup_x E_x W(x)\wedge W^{-1}(x)=$$
$$\bigcup_x\big[E_x W(x)\cap E_x W^{-1}(x)\big]=\emptyset \tag{16}$$

que tiene una interpretación geométrica muy sencilla si recordamos que la fórmula:

$$E_x \exists(y)\, W(x)\wedge W(y)=\bigcup_y E_x W(x)\wedge W^{-1}(y)$$

es la proyección del conjunto $E_{x,y}\ W(x) \wedge W^{-1}(y)$ sobre el eje Y.

En nuestro ejemplo representa proyección sobre el eje X; lo que definitivamente no es el caso. La fuerza, y en último caso la debilidad de la formalización, depende de que podamos escribir un gran número de funciones proposicionales en términos de las proposiciones primitivas

1. Por supuesto que es posible reducir el número de símbolos, ya que, por ejemplo, mediante consideraciones semánticas podemos expresar la conjunción mediante la disyunción, negación o algún cuantificador en términos del otro y los restantes signos.

W y W^{-1}. Con la realización de eso como paso preliminar, la dualidad logico-matemática nos permite pasar a la teoría de conjuntos. Aseverar la existencia de una variedad lagrangiana es, en nuestra formalización, aseverar que $\exists(p)\, W(p)$, aspecto que suponemos satisfactorio. De este modo, podemos enunciar la siguiente:

Teorema 2

Las proposiciones de la mecánica hamiltoniana son proposiciones acerca de conjuntos proyectivos.

Lo anterior se consigue de inmediato a partir del teorema de Tarsky, si se tienen en cuenta las siguientes consideraciones: por mecánica hamiltoniana entenderemos aquel conjunto de proposiciones generado recursivamente a partir de los predicados W y W^{-1}. Como se probó antes, estos predicados son definitorios de conjuntos proyectivos, por ende, al aplicar el teorema de Tarsky se obtiene el teorema 2. Esta forma de demostración es inductiva. Tal inducción se estableció por el teorema de Tarsky.

Discusión y conclusiones

Se construyó un sistema sintáctico cuantificacional (Van Frassen, 1987) finitamente axiomatizable, y libremente generado:[2]

$$H = < P, Var, \Im, O >$$

A tal sistema lo llamamos "mecánica hamiltoniana", donde P es el conjunto de predicados (W y W^{-1}), Var es el conjunto de variables (los vectores tangentes $\dot{x}$ y los vectores normales p), $\Im$ es el conjunto de símbolos lógicos y O es el menor conjunto construible de oraciones con los elementos de los conjuntos anteriores (contiene a los predicados que afectan a las variables, a los predicados formados mediante conjunciones, negaciones o cuantificaciones). En este caso la capacidad de axiomatización finita del sistema proviene de la construcción misma. Dentro de este contexto se utilizó el homomorfismo:

$$\Theta : O \rightarrow \Gamma$$

donde $\Gamma \subseteq \prod^{N}(\Re)$ es el conjunto asignado a la proposición de O, introducido por Tarsky en la demostración del teorema 1. De este modo, el teorema 2 es fácilmente demostrable a través del homomorfismo aducido, que representa el paso inductivo en la demostración inductiva.

De hecho, podemos ir más lejos sobre la sola base del resultado de Tarsky al considerar elementos semánticos. Así, asignaríamos el conjunto vacío a aquellos predicados carentes de extensión, como en el caso de (16), por lo que estaríamos definiendo entonces un modelo $M = < \Theta, \Gamma >$ de nuestro sistema sintáctico cuantificacional.

La verdad y falsedad quedarían fijadas al establecer el mapeo (la asignación):

$$\Delta : Var \rightarrow \Gamma$$

que sirve para inducir la valuación mediante la fórmula conocida:[3]

$$\upsilon\,(Q \in O) = \text{verdad} \Leftrightarrow M \models Q\,[\Delta]$$

Con esto se comprueba que la ecuación (13) pone de manifiesto el carácter insatisfactorio de la proposición expresada en H por lo que M no es un modelo de (16).

Con esto queremos decir que la interpretación adecuada del teorema de Tarsky es en términos de la teoría de los modelos, y que el teorema 1 es el establecimiento de un modelo del cálculo proposicional de la aritmética de números reales definibles mediante funciones proposicionales proyectivas.

Si consideramos el hecho sencillo de que las teorías físicas son acerca de eventos que ocurren efectivamente en la realidad, no se puede estimar al lenguaje construido como una axiomatización de algún trozo de la mecánica clásica, ya que ésta nos pretende hablar acerca de eventos que suceden; sino sólo como una formalización de la teoría matemática subyacente. En rigor, el sistema construido sólo consta de presuposiciones formales y semánticas y no del tipo "el símbolo tal denota a la entidad tal". Bunge (1967) llama a los homomorfismos "internos", porque van de conceptos a conceptos, en tanto que si el homomorfismo tiene por codominio algún conjunto de objetos "reales" (como cuerpos sólidos), se le llama "externo".

Cabe señalar que el sistema no es completo si se considera que los teoremas de la mecánica se deducen solamente a partir de los dos predicados básicos introducidos; sin embargo, el principio de la mínima acción sí lo es, al menos en el espacio libre, ya que este fundamento se puede ver en los siguientes términos: la funcional de acción es generadora de transformaciones canónicas, por ende, la solución del problema dinámico es reductible al conocimiento de la transformación canónica que lo disminuye a su forma más simple. Ésta se puede conocer si, y sólo si, se resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi. Pe-

2. El que esto sea así proviene de considerar que los lenguajes con sintaxis cuantificacional son libremente generados (Enderton, 1987: 141).

3. Esta fórmula se lee: la preposición Q es satisfactible en M bajo la asignación Δ. La notación es la que se utilizó en Van Frassen, 1987.

ro la existencia de esta solución no es otra cosa que $\exists(p)(W(p))$. Evidentemente, es deseable el tratar de incluir un considerable número de relaciones para tener la posibilidad de una mayor expresividad, sin embargo, ello conlleva un intento de ampliar el modelo introducido para la sintaxis de H, en el cual se satisfagan las nuevas proposiciones. No discutiremos, en este espacio, más sobre lo anterior.

Conviene recordar que los conjuntos proyectivos son fundamentales en la física teórica a partir del reconocimiento de que toda fórmula ha de ser dimensionalmente homogénea. Este hecho es de grandes alcances, pues nos permite establecer que toda fórmula, y en general toda solución de la ecuación diferencial, integral o integrodiferencial, por mencionar sólo algunas, utilizada para describir el fenómeno, sea invariante ante homotecias y, en consecuencia, reductible del espacio proyectivo al espacio real mediante la ecuación (13). Esta es la base, por ejemplo, del conocido teorema de Buckingham-Vaschy en la hidrodinámica, que nos permite expresar en función de variables adimensionales (invariantes por cambio de unidades) la solución de las ecuaciones básicas del medio continuo.

En conclusión, podemos decir que hemos introducido en este trabajo dos predicados a través de los cuales nos fue posible demostrar un teorema simple relativo al lenguaje formalizado que denominamos "mecánica hamiltoniana" construido con base en esos dos predicados. También describimos un modelo de dicho lenguaje construido sobre un resultado de Tarsky.

Por supuesto, quedan abiertos innumerables asuntos relativos a este lenguaje que podría abordarse en otro artículo.

Bibliografía

Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag: Graduate Texts in Mathematics 60. 2ª ed.

Bunge, M. (1967). "Physical Axiomatics", en *Rev. Mod. Phys.* Vol. 39. Núm. 2, abril.

Courant, R. D. (1989). *Hilbert: Methods of Mathematical Physics.* Vols. II. John Wiley and Sons.

Enderton, H. B. (1987). *Una introducción matemática a la lógica.* UNAM, México.

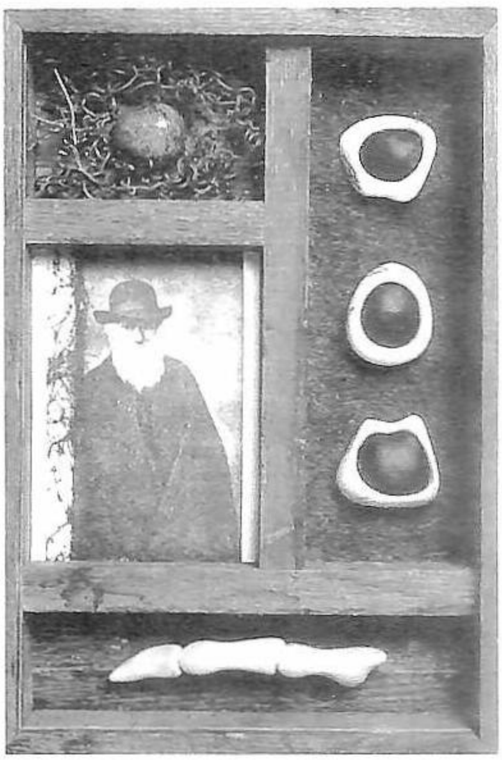
Rees, E. (1986). *Notes on Geometry.*

Tarsky, A. (1956). *Logic, Semantics, Meta-mathematics.* Oxford at the Clarendon Press.

Van Frassen, Bas C. (1987). *Semántica formal y lógica.* UNAM, México.

CIENCIAS

FÍSICA
LÓGICA
FILOSOFÍA
ECOLOGÍA
GEOLOGÍA
ANTROPOLOGÍA
MATEMÁTICAS
BIOLOGÍA
MEDICINA
HISTORIA
ASTRONOMÍA
EVOLUCIÓN



revista de difusión

SUSCRIPCIONES Y NÚMEROS ANTERIORES
Cubículos 319, 320 y 321, Departamento de Física
Facultad de Ciencias, UNAM, Coyoacán, 04510. México, DF
Tel. 5622 4935 Fax: 56160326
email: revistac@soledad.astrocu.unam.mx