

*UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA LA SUERTE DE VARAS
EN UNA FERIA TAURINA*

Joaquín Muñoz García*

A la memoria de José García Rexach, y
Antonio García – Baquero González.¹



I. INTRODUCCIÓN



uede decirse que el toreo es el arte y la ciencia que se pone de manifiesto a lo largo de la lidia del toro y ésta suele dividirse en tres tercios, el de picar, el de banderillar y el de matar. En todos ellos existen la componente artística y la metodológica-técnica. La primera es imposible de aprehender en un modelo matemático, pero la segunda componente será generalmente susceptible de ser modelada, y más en aquellos casos donde las suertes del toreo están sometidas a determinadas exigencias reglamentarias o/y condiciones científico-veterinarias del toro.

La suerte de varas en el primer tercio de la lidia del toro está condicionada por lo que recogen los reglamentos taurinos y a éstos se deben unir las consideraciones, recomendaciones y exigencias veterinarias, que pretenden, de forma general, mantener al toro en condiciones físicas adecuadas para su lidia pos-

* Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

¹ José García Rexach (mi abuelo), Antonio García-Baquero González (mi amigo): ambos me regalaban su magisterio taurino. Gracias.

terior. Estas restricciones legales y técnicas, junto a otras que se describirán en lo que sigue, es lo que conduce a que se considere la posibilidad de representar la suerte de varas mediante un modelo matemático.

Construir un modelo matemático para describir una determinada situación real, supone disponer de una expresión matemática que sea capaz de incluir las principales características del fenómeno que se está estudiando. Generalmente, la función matemática que se obtendrá en el proceso de modelización dependerá de ciertos parámetros, consiguiendo con ello una mayor flexibilidad en el modelo desde el punto de vista de su aplicación. Pero conviene resaltar que es difícil conseguir que un modelo matemático sea capaz de contemplar en su expresión todas las peculiaridades que pueda presentar el fenómeno que se pretende modelar.

La construcción de un modelo matemático para la suerte de varas, supone construir un modelo probabilístico o estocástico, ya que en la suerte de varas aparecen una serie de factores desconocidos o no controlables por actores directos de la corrida, como son los toreros y sus cuadrillas: muchos de ellos son relativos al toro o incluso a la propia reacción de las cuadrillas ante circunstancias inesperadas. Es este desconocimiento o imprevisión lo que hace que el modelo que se desarrolle a continuación tenga que contemplar determinadas componentes aleatorias o estocásticas.

Al modelar matemáticamente una realidad se suelen establecer un conjunto de hipótesis sobre el fenómeno que se estudia, lo que resulta necesario en muchas ocasiones, ya que se pretende que una expresión matemática represente un fenómeno complejo. En este caso también se han de fijar un conjunto de hipótesis, las cuales se clasificarán en dos grandes bloques. A las del primero se las calificará como “instrumentales” y serán aquellas que son estrictamente matemáticas y que no condicio-

nan ni afectan a lo que es y supone la suerte de varas. A éstas se les unirán también las que se derivan de las exigencias reglamentarias y/o técnicas. A las hipótesis del segundo bloque las denominaré de “modelo” y éstas pretenden evitar las posibles ambigüedades que puedan presentarse en la ejecución de la suerte de varas. No obstante, en un apartado posterior se aborda el hecho de las desviaciones que desde un punto de vista práctico se producen respecto a las hipótesis “modelo” establecidas, y se proponen soluciones que serán adecuadas tanto desde un punto de vista teórico como práctico.

El modelo estocástico que se desarrolla trabaja con la suerte de varas en tres dimensiones: dos dimensiones identifican el punto donde el vértice de la puya rompe la piel del toro y la tercera dimensión es la profundidad que alcanza la puya dentro del toro. Los puntos donde se perfora la piel del toro a lo largo de una feria constituyen un conjunto de puntos aleatorios distribuidos sobre la superficie del toro, representada por su piel, lo que puede identificarse dentro del campo de la probabilidad como un proceso puntual, pero en este caso ha de admitirse que el picador pretende picar bien o ajustarse a lo que indica el reglamento: por lo que tratará de picar en el morrillo del toro o lo más cerca posible de él, lo que nos conduce a que se presente una mayor densidad de puyazos en el morrillo o cerviguillo del toro, por lo que se ha de trabajar en el campo de los procesos puntuales no homogéneos. Además este proceso ha de ser marcado ya que se tiene que contemplar la tercera dimensión antes citada y que es debida a la profundidad del puyazo. Este esquema general será ajustado por un método que permita evaluar la proximidad o el alejamiento de las puyas del morrillo; en este caso se asumirá un modelo exponencial negativo por lo que ello supone de facilidad para la interpretación y análisis de lo que ocurre en la suerte de varas.

El modelo se construye para el primer puyazo y se complementa con otro modelo para el segundo puyazo, ya que en

éste las cuadrillas disponen de la información que se genera en la ejecución del primer puyazo y que contempla el hecho de que el picador pretenderá mejorar en lo posible la ubicación del segundo puyazo respecto al primero.

El modelo obtenido se aplica, en la vertiente en que es posible, a datos extraídos de los trabajos de Barona Hernández, Cuesta López y Montero Agüera (1999) y Fernández Sanz y Villalón González-Camino (1999). En el apartado de conclusiones se pone de manifiesto la necesidad de desarrollar nuevos estudios y modelos que complementen el propuesto. Se finaliza incluyendo una bibliografía que recoge a autores citados en el texto o textos utilizados para desarrollar el modelo estocástico de la suerte de varas en una feria taurina.

II. LA SUERTE DE VARAS

El primer tercio de la lidia del toro comprende la suerte de varas, y ésta resulta indispensable y fundamental para el desarrollo posterior de la lidia; una afirmación que se obtiene de diferentes investigaciones y estudios realizados al respecto. Es más, el Reglamento Taurino de Andalucía (2006) (en adelante RTA) recoge que el comportamiento de la res y la calidad en la ejecución en la suerte de varas es determinante para la concesión de premios taurinos a toros y/o picadores, además de ser elementos absolutamente importantes para el posible indulto de un toro.

La suerte de varas tiene como objetivo fundamental, tal como se desprende de Cossío (2007), quebrantar la pujanza del toro por medio de puyazos o heridas causadas por la puya de los picadores, que disminuyan sus facultades, sin una pérdida de sangre excesiva siendo lo suficiente para que el toro temple su ímpetu bronco, y pretendiendo al mismo tiempo ahormar su cabeza para que deje el cornear continuo y descompuesto. De una forma similar se expresa Prieto Garrido (2006), quien con-

templa tres finalidades para la suerte de varas: ahormar la cabeza para regular el acorrear del toro con movimientos menos bruscos y violentos, reducir su ímpetu y fuerza y valorar la bravura según las veces que entre al caballo o reaccione ante el castigo recibido por parte del picador.

Para conseguir lo indicado, resulta básico que el toro sea picado de forma correcta, poniendo el puyazo en la región anatómica precisa, la cual, siguiendo a Fernández Sanz y Villalón González-Camino (1999), se encuentra situada entre la cuarta y la séptima vértebra cervical del toro, zona que ellos representan por la Zona A.

El artículo 54.4 del RTA recoge:

«Cuando la res acuda al caballo, el picador efectuará la suerte por la derecha y, preferentemente, en el morrillo, borde dorsal del cuello en su posición caudal, quedando prohibido barrenar, tapar la salida de la res, girar alrededor de la misma, insistir o mantener el castigo incorrectamente aplicado....»

En Cossío (2007), también se recoge que el picador ha de poner la pica en el cerviguillo, que es la parte exterior de la cerviz y generalmente es una zona gruesa y abultada del toro.

Y Barona Hernández, Cuesta López y Montero Agüera (1999) lo expresan de la siguiente forma: «la puya eficaz debe colocarse en el morrillo, lugar en el que asienta la musculatura epiaxial del cuello, responsable de los movimientos de la cabeza y, por lo tanto, del acorrear».

Para picar el toro se utiliza una garrocha con una puya cuya longitud total, incluida la puya, según el RTA, será de 2,55 a 2,70 metros. La puya según lo indicado en el artículo 46.1 del RTA, consiste en lo siguiente:

«Las puyas tendrán la forma de pirámide triangular de acero con aristas o filos rectos y caras planas, y sus dimensiones, aprecia-

das con el escantillón, serán: 26 milímetros de largo en cada arista por 19 milímetros de ancho en la base de cada cara o triángulo; estarán provistas en su base de un tope de madera o plástico PVC que sujete la pirámide. El referido tope, de forma cónica, deberá tener 25 milímetros de diámetro en su base inferior y 50 milímetros de largo, terminando en una cruceta fija de acero, de brazos en forma cilíndrica, de 50 milímetros desde sus extremos a la base del tope y un grosor de 8 milímetros».

Esta descripción de las puyas genera una longitud de aproximadamente 7,23 centímetros (en adelante cm.), desde el vértice de la pirámide de la puya hasta el centro de la cruceta, sin incluir el grosor de ésta. Esa medida es conveniente fijarla, por el hecho de que el reglamento taurino prohíbe explícitamente barrenar al toro a través de la pica, es decir no consiente remover la pica a modo de barrena con el fin de hacer penetrar más la garrocha.

Por tanto, resulta evidente de lo descrito concluir, bien por el RTA o por los estudios realizados, que es necesario picar al toro en el morrillo o cerviguillo, además de no barrenarlo a través de la puya, ya que en caso contrario se mermaría la capacidad del toro para los siguientes tercios de la corrida.

Por último, conviene indicar que los reglamentos taurinos recogen las veces que el toro ha de acudir al caballo para someterse al puyazo del picador, lo que depende de la categoría de la plaza. Esto hará que se planteen dos modelos estocásticos: uno para el caso de un puyazo y otro para el caso de dos puyazos, ya que pueden corregirse ciertas conductas desde el conocimiento de lo ocurrido en el primer puyazo.

III. HIPÓTESIS Y FUNDAMENTOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO ESTOCÁSTICO

Para la construcción del modelo estocástico se suponen las siguientes hipótesis, las cuales pueden dividirse en “instrumentales” (y que se identificarán por I), que son las que representan condiciones matemáticas necesarias para el desarrollo del modelo y que no inciden en forma alguna en la ejecución de la suerte de varas. A éstas se unirán también las que se derivan del RTA, ya que debe suponerse que éstas han de cumplirse necesariamente, y las hipótesis “modelo” (que se representarán por M) y que tratan de imponer ciertas restricciones a la suerte de varas, con el fin de evitar posibles imprecisiones, indefiniciones o ambigüedades en el modelo estocástico que se construye:

Hipótesis Instrumentales:

1. Se dispondrá de un punto de referencia, que se denominará origen del sistema coordenado y que coincidirá con el centro geométrico del morrillo o cerviguillo (este punto se representará por O).
2. Sobre el origen se construye un sistema coordenado donde el eje de ordenadas Y correrá a lo largo del lomo del toro y el eje de abscisa X será por tanto perpendicular al eje de ordenada.
3. La escala de los ejes será expresada en centímetros.
4. El morrillo o cerviguillo de los toros que se lidien durante la feria tendrán una superficie similar.
5. El picador pretenderá poner el puyazo lo más cercano posible al origen del sistema coordenado.
6. El número de primeros puyazos dados en zonas diferenciadas del toro se consideran independientes.
7. La profundidad del puyazo será independiente del punto de contacto con la piel del toro.
8. El picador nunca barrenará al toro.

9. Existe una profundidad fijada “ m ” expresada en cm. para los puyazos, recomendada por los veterinarios.

Hipótesis Modelo.

A. La piel del toro se supone una superficie plana y cada punto z de la superficie vendrá identificado por sus coordenadas respectivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

B. Cada puyazo será identificado por el punto de contacto, donde el vértice de la pirámide de la puya atraviesa la piel del toro, y su referencia será. $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ El centro del morrillo será el punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

C. Se considera también la profundidad del puyazo asociado a z y que se representa por m_z , expresándolo en cm.

D. Una vez marcada la puya no se permite rectificar al picador.

E. No existirán dos puyazos en un mismo punto o para una misma vara².

El desarrollo del modelo tendrá como fundamento las hipótesis indicadas, pero éstas están acompañadas por una serie de factores y vicisitudes que surgen durante la lidia del toro y que son imposibles de fijar para todas las suertes de varas que se llevan a cabo durante una feria taurina. Y éstas transcurren desde que el toro sale a la plaza, pasando por el acto de poner al toro en suerte, y el picador llama su atención para que acuda al caballo. Esto constituye una serie de momentos o conjunto de instantes, que podrían evaluarse como infinito, en los que se

² Para el modelo estocástico que se construirá a continuación se consideran sinónimos vara y puyazo.

presentan una serie de circunstancias que no son previsibles por los actores de la corrida. Así se pueden citar: las dimensiones y peso del toro, la distancia desde donde se arranca al picador, la velocidad con que acude el toro, las transformaciones que ha ido sufriendo éste desde que salió a la plaza, la forma de lanzar la pica al picador, etc. Todo ello conduce a que deba afirmarse que el encuentro de la pica con la piel del toro tiene un conjunto de componentes aleatorias que hacen que la hipótesis B deba estar condicionada a los efectos de la aleatoriedad o azar que confluyen en el acto de picar el toro.

La presencia del azar o la aleatoriedad en una corrida de toros es algo intrínseco a ella. Baste citar como ejemplo que se utiliza el sorteo para asignar los lotes de los toros a los toreros, o que el término *suerte*, tan usado para la descripción de determinados momentos o hechos durante una corrida de toros, está relacionado con fortuna y azar como puede verse en Russ (1999).

Por lo tanto, se pretende construir un modelo estocástico para la suerte de varas en una feria taurina, en la que al final de la misma se tendrá un conjunto de puntos marcados por los puyazos dados de forma aleatoria en una superficie delimitada por la piel del toro, aunque condicionado por la intención del picador de aproximarse lo máximo posible al morrillo o, más precisamente, al origen del sistema coordenado O . Y a cada punto se le asociará la profundidad que alcanza el correspondiente puyazo dentro del toro.

Para la construcción del modelo estocástico se utiliza la teoría de los procesos puntuales espaciales, que son modelos probabilísticos apropiados para el estudio de la dispersión aleatoria de puntos en un espacio dado.

IV. MODELO ESTOCÁSTICO PARA UN PUYAZO

El modelo estocástico para un puyazo se abordará en dos etapas bien diferenciadas. En la primera se construirá el modelo puntual espacial para los puntos que se obtienen al romper la puya rompe la piel del toro y en la segunda etapa se construye el modelo final al unir “marca”, terminología propia de los procesos puntuales, que recoge la profundidad que alcanza en el toro cada uno de los puyazos.

IV.I. Modelo puntual espacial.

La aleatoriedad existente en la suerte de varas se recoge en el clásico espacio probabilístico, al que le supone completo y que se refleja en la tripleta (Ω, \mathcal{D}, P) siendo Ω el espacio muestral, la \mathcal{D} sigma-álgebra asociada a dicho espacio, y P la correspondiente medida de probabilidad. Los puntos $z' = (x, y)$ (con (\cdot) se representa el vector traspuesto) que se obtienen en el contacto de la pica con la piel del toro se supondrán puntos de un espacio métrico (R^2, d) , con R^2 el espacio real bidimensional y d la métrica o distancia euclídea. Cualquier zona de la piel del toro donde se observen los puyazos no serán más que borelianos B del sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(R^2)$, lo que genera un nuevo espacio medible $(R^2, \mathcal{B}(R^2))$ sobre el que se considera el espacio M_0 de las medidas puntuales con valores en el espacio de los números enteros no negativos, de forma que un proceso puntual en R^2 es una variable aleatoria ξ definida sobre M_0 y que puede expresarse de la siguiente forma

$$\xi_B = \xi(B) = \sum_i \delta_{z_i}(B) \quad \text{con}$$

$$\delta_{z_i}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_i \in B \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde, $z_i \quad i \in I$ son los puntos que se observan en el espacio R^2 .

De Diggle (2003), se sabe que dado un boreliano $B \subset R^2$, la aleatorización completa de un conjunto de puntos en dicha región se obtiene si se verifican las siguientes dos condiciones

* El número de puntos en cualquier región plana B con área representada por $|B|$ sigue una distribución de Poisson con media $\mu/B|$. Siendo μ el número medio de puntos por unidad de área.

* Dados n puntos z_1 en una región B , las z_1 son una muestra aleatoria independiente extraída de un modelo uniforme en B .

Lo que desde un punto de vista práctico significa que sería admisible poner el puyazo en cualquier lugar de la piel del toro, y que el número de puyazos que existiría en cualquier zona de dicha piel resultaría proporcional a la superficie de la correspondiente zona.

Sin embargo, en el caso de la suerte de varas no se presentaría nunca una aleatorización completa debido a que no se admite poner la vara en cualquier punto de la piel del toro, y principalmente, a lo que se recoge en la hipótesis 5, por la que el picador tenderá a acercarse lo máximo posible al origen definido en el morrillo del toro. Esta hipótesis puede representarse a través de una medida $\Lambda \in M$, siendo M el espacio de medidas sigma-finitas, que se denomina medida de intensidad y que generalmente se toma de forma que sea absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue; siendo su derivada de Radon Nikodym lo que se denomina función intensidad y se representará por $D(z)$.

Por consiguiente, la suerte de varas según lo descrito en el apartado segundo y lo establecido en ciertas hipótesis, ha de presentar una mayor densidad de puntos (puyazos) en las proximidades del origen O , decreciendo la densidad del número de puyazos a observar, conforme nos alejemos del citado origen O .

Todo esto, puede representarse por una función f que alcance su valor máximo en el origen O , y que decrezca respecto a la distancia de un punto cualquiera $z = (x, y)$ de la piel al origen O ; la distancia viene dada por $d(z, O) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

Una forma de expresar lo indicado es que f sea función de una exponencial negativa que dependa a su vez de la distancia $d(z, O)$. Es decir la presencia de puyazos disminuye exponencialmente conforme éstos vayan alejándose del centro del cerviguillo. Todo esto se expresa de forma genérica por

$$\lambda(z) = f(e^{-d^2}) = f(e^{-z'z}) = f(e^{-(x^2+y^2)}) = f(\exp(-(x^2 + y^2)))$$

y para mayor comodidad en el tratamiento e interpretación posterior, y que no supondrá restricción alguna respecto a este modelo general, se toma como función intensidad de la aproximación del puyazo del picador al origen O la siguiente

$$\lambda(z) = \lambda(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right) \right)$$

Por tanto las marcas del primer puyazo en una feria debe generar un proceso de Poisson no homogéneo con función intensidad descrita previamente.

Un resultado de interés para la aplicación práctica del modelo propuesto, es conocer el valor esperado ($E(\xi(B))$). Significa la esperanza matemática o el valor que se espera alcance la variable ($\xi(B)$) de puyazos a observar en un boreliano B y que viene dada por

$$E[\xi(B)] = \Lambda(B) = \int_B \lambda(z) dz = \int_B \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} dx dy$$

IV.2. Modelo puntual marcado y modelo estocástico para un puyazo.

El puyazo de un picador no está únicamente caracterizado por el punto donde impacta la pica y que se ha representado por z , sino que también es necesario considerar la profundidad que alcanza la puya en el interior del toro en dicho punto z , y esto se representa por m_z , por supuesto expresada en cm. Lo que da lugar a lo que se conoce como un proceso puntual marcado, definido por los puntos

$$\chi = \{(z, m_z) / z \in B, m_z \in L \subset R\}$$

siendo el conjunto de los números reales.

Por tanto el modelo estocástico que se tiene será un proceso de Poisson no homogéneo marcado, con función de intensidad D . Y para la variable aleatoria M , que representará a las marcas (o profundidad del puyazo), se supondrá una distribución con función de densidad dada por $h(m_z)$. Para esta función se supone que existe un único valor modal m , que verifica

$$\underset{m_z}{\text{máx}} h(m_z) = h(m)$$

Este valor modal será el previsto en la hipótesis 9, y a partir de este valor el resto de las profundidades que se observen se comportarán según la clásica distribución de errores es decir

$$m_z = m + \varepsilon_z \quad \text{con} \quad \varepsilon_z \in N(0, \sigma_m^2)$$

donde $N(0, \sigma_m^2)$ representa la distribución normal de media cero y varianza σ_m^2 .

Es decir la función de densidad de las marcas vendrá dada por

$$h(m_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(m_z - m)^2}{\sigma_m^2}\right\}$$

Luego el modelo estocástico para un puyazo genera la siguiente función de intensidad conjunta del proceso de Poisson no homogéneo,

$$g(z, m_z) = \lambda(z)h(m_z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right) \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(m_z - m)^2}{\sigma_m^2}\right\}$$

IV.III Precisión del modelo estocástico para un puyazo en una Feria Taurina.

El modelo que se ha construido para el primer puyazo depende de una serie de parámetros inicialmente desconocidos $(\sigma_x^2, \sigma_y^2, m, \sigma_m^2)$. Estos parámetros pueden estimarse mediante los estimadores que más adelante se obtendrán, pudiendo utilizarse a continuación para aplicar las técnicas de inferencia estadística adecuadas.

No obstante, y para este trabajo, se plantea la posibilidad de que los parámetros puedan ser fijados mediante los oportunos acuerdos por la correspondiente Feria Taurina (lo que permitiría valorar las exigencias de la feria respecto a la suerte de varas), de forma que al final de la misma pueda analizarse si el primer tercio de la lidia durante la feria se ajusta a lo previsto reglamentariamente para dicho tercio y lo exigido por la propia feria.

Sobre los parámetros (σ_x^2, σ_y^2) hay que plantearse inicialmente, si se admitirá la igualdad entre ellos $(\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$ o no. Si una feria asume que $(\sigma_x^2 < \sigma_y^2)$, se está admitiendo por parte de la feria ser más condescendiente con un puyazo trasero o delantero que con un puyazo caído; si ocurriera $(\sigma_x^2 > \sigma_y^2)$ se estaría admitiendo lo contrario. Por tanto parece lógico que las ferias taurinas adopten para el modelo la igualdad $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. El hecho de que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ significa que la sección horizontal del modelo de la función de intensidad $\lambda(z)$ del proceso puntual será de tipo circular.

La feria taurina también puede fijar el valor de σ para valorar de una forma más precisa la suerte de varas. Para ello se ha de indicar que mientras más pequeño se fije el valor de σ mayor número de puyazos tendrán que estar próximos al origen. Si se tomaran $\sigma = 0$ todos los primeros puyazos de todos los picadores deberían de haberse puesto en el origen O . Desde un punto de vista reglamentario sería aconsejable fijar para σ un valor que sea función de la superficie del morrillo del toro, tratando de adecuarse en ese momento a lo que fija la hipótesis 4. Si se fija $\sigma = a$ cm y el morrillo del toro se admite que tiene una superficie de $4a^2$ cm². en torno al centro O , el porcentaje de puyazos que deberían encontrarse al final de la feria en la citada área no debería desviarse significativamente del 70,77%.

Respecto al parámetro m relacionado con la marca del proceso y que representa la profundidad del puyazo, puede procederse igual que en el caso anterior, bien se estime como se verá en un apartado posterior, o bien se fije por parte de la feria; en este caso, y tal como se definió a la hora de construir el modelo, se tomará para m aquel valor que se desea se presente con mayor frecuencia a lo largo de la feria. Es decir lo que se conoce estadísticamente como el valor modal del modelo. Según se ha indicado por lo que contiene el RTA, hay una longitud de aproximadamente 7,23 cm., desde el vértice de la pirámide de la puya hasta el centro de la cruceta, sin incluir el grosor de ésta, pero por lo general el valor modal m será mayor que 7,23 cm., ya que ésta tenderá a incrementarse por el sentido opuesto de las fuerzas que ejercen picador y toro (estudios realizados sobre la suerte de vara como el de Fernández Sanz y Villalón González-Camino (1999)³, recogen que la profundidad del puyazo puede

³ En este trabajo la puya tiene una dimensión diferente aunque muy parecida a la actual del RTA.

llegar a alcanzar unos valores extremos que oscilarían en torno a los 30 cm.). Sobre el parámetro hay que indicar, al igual que en el caso anterior, que cuanto más pequeño se fije más exigente se será con el hecho de que los picadores alcancen la profundidad modal fijada m .

		60%	70%	80%
$m = 10$	$\sigma_m = 2$	(8.3,11.7)	(7.9,12.1)	(7.4,12.6)
	$\sigma_m = 3$	(7.45,12.55)	(6.85,13.15)	(6.1,13.9)
	$\sigma_m = 4$	(6.6,13.4)	(5.8,14.2)	(4.8,15.2)
$m = 12$	$\sigma_m = 2$	(10.3,13.7)	(9.9,14.1)	(9.4,14.6)
	$\sigma_m = 3$	(9.45,14.55)	(8.85,15.15)	(8.1,15.9)
	$\sigma_m = 4$	(8.6,15.4)	(7.8,16.2)	(6.8,17.2)
$m = 14$	$\sigma_m = 2$	(12.3,15.7)	(11.9,16.1)	(11.4,16.6)
	$\sigma_m = 3$	(11.45,16.55)	(10.85,17.15)	(10.1,17.9)
	$\sigma_m = 4$	(10.6,17.4)	(9.8,18.2)	(8.8,19.2)
$m = 16$	$\sigma_m = 2$	(14.3,17.7)	(13.9,18.1)	(13.4,18.6)
	$\sigma_m = 3$	(13.45,18.55)	(12.85,19.15)	(12.1,19.9)
	$\sigma_m = 4$	(12.6,19.4)	(11.8,20.2)	(10.8,21.2)
$m = 18$	$\sigma_m = 2$	(16.3,19.7)	(15.9,20.1)	(15.4,20.6)
	$\sigma_m = 3$	(15.45,20.55)	(14.85,21.5)	(14.1,21.9)
	$\sigma_m = 4$	(14.6,21.4)	(13.8,22.2)	(12.8,23.2)

Para evaluar lo que significa fijar los valores de m y σ_m por parte de la feria, se presenta una tabla donde, fijado m y σ_m en centímetros, se obtiene el intervalo aproximado de profundidades, expresadas también en centímetros, entre cuyos extremos se deben encontrar un determinado porcentaje de primeros puyazos del total que se ha ejecutado en la feria,

De esta tabla puede concluirse que cuanto mayor sean m y σ_m más permisividad se tiene con la profundidad que puede alcanzar el puyazo del picador; y, para un valor de m y σ_m fijados, exigir un mayor porcentaje de varas dentro de determinados márgenes supone incrementar el valor del extremo superior del intervalo, mientras el inferior toma valores que pueden ser en general asumibles.

V. INFERENCIA ESTADÍSTICA PARA LA FERIA TAURINA

Establecido el modelo estocástico para el primer puyazo de un picador se ha de plantear el hecho de aplicarlo a los puyazos que se observan durante una feria taurina. Los pasos a seguir serán los que generalmente suelen darse cuando se trata la inferencia estadística de modelos paramétricos: se establecerá la función de verosimilitud de la muestra resultante en la correspondiente feria, para a continuación pasar a calcular los estimadores de los parámetros desconocidos.

V.1. Función de verosimilitud para el primer puyazo en una feria taurina.

Sean $(z'_1, m_{z'_1}), (z'_2, m_{z'_2}), \dots, (z'_n, m_{z'_n})$ las coordenadas correspondientes a n primeros puyazos observados en una superficie B y para una determinada feria taurina, donde la componente $z'_i = (x_i, y_i)$ son los puntos de contactos donde la puya atraviesa la piel del toro y $m_{z'_i}$ la profundidad que alcanza el puyazo i -ésimo, $i=1,2,\dots n..$ Todo ello da lugar a una muestra de tamaño

n , que se expresará por $\{z_i', m_{z_i'}\}_{i=1,2,\dots,n}$ procedentes de un proceso puntual no homogéneo con función de intensidad $\lambda(z_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ y donde la marca $m_{z_i} \in N(m, \sigma_m^2)$ $i = 1, 2, \dots, n$

La función de verosimilitud conjunta de la muestra es el producto de las funciones de verosimilitud respectivas al proceso puntual y a la marca de cada uno de los puyazos, lo que es debido a la independencia que se da entre las variables z y m_z ,

$$L((z_1, m_{z_1})(z_2, m_{z_2}) \dots (z_n, m_{z_n})) = L_Z(z_1, z_2, \dots, z_n) L_M(m_{z_1}, m_{z_2}, \dots, m_{z_n})$$

Tomando logaritmos se tiene

$$\ln(L((z_1, m_{z_1})(z_2, m_{z_2}) \dots (z_n, m_{z_n}))) = \ln(L_Z(z_1, z_2, \dots, z_n)) + \ln(L_M(m_{z_1}, m_{z_2}, \dots, m_{z_n}))$$

donde, $L_Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$, que es la verosimilitud asociada al proceso puntual, y $L_M(m_{z_1}, m_{z_2}, \dots, m_{z_n})$ la verosimilitud asociada a la variable marca del proceso puntual y que en este caso sería la correspondiente a la profundidad del puyazo.

La verosimilitud $L_Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ se obtiene a través de la función de densidad de Janossy siguiendo a Daley y Vere - Jones (1988); o bien utilizando la continuidad absoluta de la función de intensidad respecto a la medida de Lebesgue, tal como se recoge en Kutoyants (1998). En ambos casos se obtiene considerando que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, por las razones ya expuestas en el apartado anterior

$$L_Z(z_1, z_2, \dots, z_n) = \exp\{-\Lambda(B)\} \prod_{i=1}^n \lambda(z_i)$$

y

$$\ln L_Z(z_1, z_2, \dots, z_n) = -n \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) - \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_B \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Y por otro lado se tiene que el logaritmo de la función de verosimilitud para las marcas del proceso o profundidad del puyazo viene dada por

$$\ln L_M(m_{z_1}, m_{z_2}, \dots, m_{z_n}) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(m_{z_i} - m)^2}{\sigma_m^2}$$

Luego el logaritmo de la función de verosimilitud conjunta que será la correspondiente al primer puyazo es

$$\ln L(z_1, z_2, \dots, z_n) = -(n+1)\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) - \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_B \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt - \frac{n}{2}\ln \sigma_m^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(m_{z_i} - m)}{\sigma_m^2}$$

V.II Estimadores de máxima verosimilitud

A continuación se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos en la última ecuación y que son (σ, m, σ_m^2) . Para una mayor comodidad en las expresiones a obtener se supondrá que B es un rectángulo (lo que no supondrá restricción alguna por lo que se describe más adelante), definido de la siguiente forma $B = (a,b] \times (c,d]$, siendo $(a,b]$ el intervalo X del eje semiabierto por la izquierda, de extremos a y b y $(c,d]$ el correspondiente al eje Y que también será semiabierto por la izquierda pero con los extremos c y d .

Los estimadores de máxima verosimilitud se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{d \ln L_Z}{d \sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{\partial \ln L_M}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_m^2} = \frac{\partial \ln L_M}{\partial \sigma_m^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Para la primera ecuación resulta la siguiente solución

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) + E[X^2 / a < X \leq b] + E[Y^2 / c < Y \leq d]}{n - \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma^*}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma^*}\right) \right) - \left(\Phi\left(\frac{d}{\sigma^*}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sigma^*}\right) \right)}$$

donde $\Phi(\bullet)$ representa el valor de la función de distribución normal tipificada, $E[\cdot]$ representa la expresión de una esperanza condicionada, y como $\hat{\sigma}^2$ se obtendrá por métodos aproximados σ^* representa valores que se tendrán que ir fijando sucesivamente para obtener la mejor solución.

Y para el resto de ecuaciones se obtienen las soluciones ya conocidas

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{z_i}$$

$$\text{y} \quad \hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_{z_i} - \hat{m})^2$$

VI. MODELO ESTOCÁSTICO PARA EL SEGUNDO PUYAZO

Según los reglamentos taurinos, en las plazas de primera categoría el toro ha de ser llevado por segunda vez al caballo para que reciba un segundo puyazo por parte del picador. Así, si se establece la hipótesis de independencia entre ambos puyazos, bastaría aplicar de nuevo lo que se ha descrito para el primer puyazo.

No obstante, respecto a este segundo puyazo existen ciertos niveles de dependencia debido a dos posibles formas de abordar los dos puyazos sucesivos en la suerte de varas. Una de ellas es infringirle al toro el menor castigo posible en el primer puyazo, para en el segundo, tras ver como ha reaccionado al primero, proporcionar un castigo adecuado para la lidia posterior. La contraria es castigar al toro en lo posible en el primer puyazo y el segundo hacerlo más liviano. Pero lo que sí se ha de reconocer es que no existe una forma única de abordar lo descrito, y por supuesto no la habrá. Ante esta ambigüedad no se ha construido un modelo estocástico para estudiar los dos puyazos conjuntamente.

Sin embargo, sí se admitirá que debe existir una cierta relación en la acción de los picadores cuando un toro es picado

de forma sucesiva, lo que se reflejará en una nueva hipótesis instrumental que será la décima:

10. El picador tratará de poner el segundo puyazo a una distancia del origen menor que la distancia con la que puso el primer puyazo.

Es decir, si $z_{[1]} = (x_{[1]}, y_{[1]})$ es el punto donde el picador puso el primer puyazo y $z_{[2]} = (x_{[2]}, y_{[2]})$ es el punto donde el mismo picador pone el segundo puyazo, se deberá cumplir para un porcentaje $(1-p)\%$ fijado que los segundos puyazos que los picadores ponen durante una feria taurina deberán estar incluidos en un círculo de radio $r_{[2]}$ que verifique

$$r_{[2]} = d(O, z_{[2]}) = \sqrt{x_{[2]}^2 + y_{[2]}^2} \leq \sqrt{x_{[1]}^2 + y_{[1]}^2} = d(O, z_{[1]}) = r_{[1]}$$

Por tanto, si

$$\lambda(z_{[2]}) = \lambda(x_{[2]}, y_{[2]}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{[2]}^2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{[2]}^2} (x_{[2]}^2 + y_{[2]}^2)\right) \right)$$

se ha de verificar que

$$\int_{\sqrt{x_{[2]}^2 + y_{[2]}^2} \leq r_{[1]}} \lambda(z_{[2]}) dz_{[2]} = \int_{\sqrt{x_{[2]}^2 + y_{[2]}^2} \leq r_{[1]}} \frac{1}{2\pi\sigma_{[2]}^2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{[2]}^2} (x_{[2]}^2 + y_{[2]}^2)\right) \right) dx_2 dy_{[2]} = 1 - p$$

y haciendo el cambio de variable oportuno se obtiene

$$1 - \exp\left(-\frac{r_{[1]}^2}{2\sigma_{[2]}^2}\right) = 1 - p$$

lo que nos delimita el valor del parámetro desconocido $\sigma_{[2]}^2$ que debe observarse para la función intensidad del segundo puyazo. Este valor podrá ser comparado con el valor del estimador de máxima verosimilitud que se obtenga para las observaciones que se realicen, y estudiar si presenta cierta desviación significativa respecto al valor del parámetro $\sigma_{[2]}^2$ que se establezca.

VII. APLICACIÓN DEL MODELO.

Se describe de forma resumida la aplicación del modelo descrito, dejando una mayor precisión para un trabajo posterior.

Lo primero a realizar sería una teselación de la piel del toro, es decir, dividir la piel del toro en polígonos. Lo más aconsejable para el caso que nos ocupa es que los polígonos fueran cuadrados y/o rectángulos. Además, siempre ha de verificarse que el cerviguillo esté incluido en un único polígono o, si es necesario, en más de uno, pero sin que ellos puedan contener punto alguno que no corresponda al morrillo del toro. La teselación podría realizarse también de acuerdo con los diferentes músculos del toro, con el fin de que si se desea pueda hacerse de una forma más o menos precisa un análisis de los efectos que la suerte de vara, puede ejercer sobre el organismo del toro.

Una vez hecha la teselación y para el modelo estocástico construido, se determinará en cada toro el polígono donde se produce el puyazo, las coordenadas asociadas al mismo según el sistema coordenado descrito y por supuesto la profundidad del puyazo.

Aplicando lo desarrollado a datos provenientes del trabajo de Fernández Sanz y Villalón González – Camino (1999), y que sean compatibles con el modelo estocástico obtenido, puede afirmarse que la ubicación de las primeras varas en la segunda parte de la Feria de San Isidro de 1998 difieren significativamente ($\alpha < 0.1 \times 10^{-50}$) del proceso de Poisson no homogéneo desarrollado admitiendo para el morrillo un área de $4 \sigma^2$ tal como se describió en 4.3. Por tanto, el comportamiento del primer puyazo para la suerte de varas en la feria taurina analizada se desvía marcadamente de lo actualmente previsto en el RTA.

Del análisis realizado y al presentar una desviación tan marcada del modelo, deberá indicarse que los puyazos analizados en dicha feria tienen una tendencia acusada a desviarse del

morrillo, o que existe cierta impericia de los picadores, o como indica Barona Hernández, Cuesta López y Montero Agüera (1999) se «confirma el poco interés por implantar bien la puya», etc., o quizás algo más benévolo, pensar que la feria que se analizó es una feria *outlier* (feria que en lo analizado se desvía marcadamente del resto de las ferias).

VII.I. Desviación de las hipótesis establecidas

La construcción de un modelo matemático supone generalmente establecer un conjunto de hipótesis. De las establecidas, algunas de ellas pueden ser consideradas de carácter instrumental, pero hay otras que son necesarias para poder disponer de una expresión adecuada para el modelo. Estas últimas hipótesis, cuando el modelo se lleva a la práctica plantean a veces ciertos problemas sobre su cumplimiento. Por ello, a continuación, se plantean determinadas situaciones y la opción a tomar en el caso en que no se verifique de una forma precisa la hipótesis establecida

Varas en un mismo punto: Puede ocurrir que al tomar los datos que surjan de la suerte de varas en una feria taurina, se obtenga que ciertos puyazos coincidan en un mismo punto, lo que es bastante posible, ya que teóricamente se habla del «punto de contacto del vértice de la pirámide de la puya al atravesar la piel del toro» y lo que se observará en la práctica será que el punto de contacto queda enmascarado por la anchura de la garrocha. Por tanto si se tiene que $z_j = z_l$ para $j \neq l$, se transformaría una de ellas por ejemplo $z_l^t = z_j + \tau$ siendo $\tau = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix}$ y τ_x , y τ_y serán valores tan pequeños como se quieran, pero verificando la condición de que el valor de las coordenadas que se obtengan, mantengan los puntos z_l^t y z_j en el polígono que estuvieran en la teselación realizada.

Varas con más de un puyazo. En este caso el punto de contacto no plantea problema, pero sí la posible profundidad de los

puyazos. En este caso se tomaría la marca mayor, es decir el puyazo de mayor profundidad.

Puyazos con más de una trayectoria. También puede ocurrir que un puyazo presente más de una trayectoria. Si ello fuera así se tomará como marca del puyazo la trayectoria que haya dado lugar a una mayor profundidad, tal como se indicaba en el caso anterior.

Reglamentarias. Lo desarrollado previamente se ha centrado a veces en el RTA. No obstante, lo dispuesto en otros reglamentos para la suerte de varas es bastante similar, y si se producen algunas desviaciones de carácter técnico, como puede ser la arista de la pirámide de la puya, éstas no influyen en el modelo propuesto.

VIII. CONCLUSIONES.

Se ha modelado la suerte de varas en una feria taurina. Sin embargo, este mismo modelo es útil para otras situaciones, como puede ser el análisis de la suerte de varas o castigo que han sufrido los toros de una misma ganadería toreados a lo largo de la temporada taurina; o bien para que un picador pueda analizar el trabajo por él realizado a lo largo del año, etc. Es decir, es útil siempre que se fije determinado factor y se disponga de un número de varas adecuado para poder realizar los procesos de inferencia estadística con una determinada calidad.

El modelo teórico diseñado y los resultados obtenidos representan la suerte de varas ajustada a los requerimientos exigidos por el reglamento taurino, que es el deseo de los principales actores que intervienen en las corridas de toros y que van desde el público hasta los veterinarios, pasando por toreros, ganaderos, etc. Por tanto, una de las posibles utilidades del modelo es la valoración media del comportamiento de los picadores a lo largo de una feria taurina, lo que puede ser útil para

debates y análisis posteriores de ganaderos-toreros-empresarios de plazas, ya que la no realización correcta de la suerte de varas puede afectar al toro en la lidia posterior y por supuesto al torero, ya que, como recoge Ortiz (1999), «sin buen picador, no hay buen matador».

El modelo será complementado en un trabajo posterior, que pretenderá ser más explícito desde un punto de vista práctico conteniendo simulaciones del modelo. También se propondría un programa informático que contenga el método aproximado necesario para el cálculo de uno de los estimadores propuestos.

El modelo propuesto podría generalizarse considerando las dos varas de forma conjunta, lo que quizás pueda trabajarse mediante una mixtura de procesos Poisson no homogéneos, tratando con ello de asumir la indefinición indicada previamente. Además resultaría adecuado el diseño de un nuevo modelo que permita medir la desviación que se está produciendo en la suerte de varas respecto al modelo teórico, ya que ello permitiría mejorar la técnica de la suerte de varas, si se desea. Asimismo se podría analizar si las desviaciones que se produzcan pueden ser más o menos intencionadas, lo que se fundamentaría principalmente en el tamaño de la desviación. Además este modelo deberá contemplar la posibilidad anisotrópica para valorar si los picadores tienen tendencia a desviarse hacia alguna dirección del plano definido por el morrillo, ya que si ello fuese así el hecho podría tener valoraciones veterinarias desde el punto de vista de los músculos del toro que se pretenderían afectar, y, por tanto, permitiría conocer el posible efecto de dichas varas en el toro y en su comportamiento posterior durante la lidia.

BIBLIOGRAFÍA

- Barona Hernández, L.; Cuesta López, A. y Montero Agüera, I. (1999): “¿Cumplen las puyas su misión?” en *Revista de Estudios Taurinos*. nº 9, (págs. 95-112), Sevilla, Fundación de Estudios Taurinos, Real Maestranza de Caballería de Sevilla.
- Cossío, J.M. (2007): *Los Toros*. Ed. Espasa Calpe, Madrid.
- Daley, D.J. and Vere - Jones, D. (1988): *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Ed. Springer - Verlag.
- Diggle, P.J. (2003): *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. Second Edition. Ed. Arnold.
- Fernández Sanz, J. y Villalón González – Camino, J. (1999): “Estudio de las lesiones producidas por la suerte de varas en la segunda parte de la Feria de San Isidro de 1998”. *Revista de Estudios Taurinos*. nº 9, (págs. 113-139), Sevilla, Fundación de Estudios Taurinos, Real Maestranza de Caballería de Sevilla.
- Kutoyants, Yu. A. (1998): *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*. Lecture Notes in Statistics, nº 134. Ed. Springer.
- Junta de Andalucía (2006): Decreto 68/2006, de 21 de Marzo, por el que se Aprueba el Reglamento Taurino de Andalucía. Edita Consejería de Gobernación. Dirección General de Espectáculos Públicos y Juego.
- Karr, A.F. (1986): *Point Processes and their Statistical Inference*. Ed. Marcel Dekker.
- Moller, J. and Waagepetersen, R.P. (2004): *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Ed. Chapman & Hall/CRC.
- Muñoz García, J; Moreno Rebollo, J.L. and Pascual Acosta, A. (1990): “Outliers: A formal approach”. *Internacional Statistical Review*. Vol. 58, págs. 215-226.

- Ortiz, S. (1999): *El Arte de ver Toros. Una tauromaquia educativa*. Madrid. Ed. Espasa Calpe.
- Prieto Garrido, J. L. (2006): *Cómo ver el Toro en la Plaza*, Madrid, Ed. Almuzara.
- Russ, J. (1999): (Diccionario) *Léxico de Filosofía. Los conceptos y los filósofos en sus citas*, Madrid, Ed. Akal.
- Stoyan, D.; Kendall, W.S. and Macke, J. (1995): *Stochastic Geometry and its Applications*. Second Edition. Ed. John Wiley & Sons.

