

Difracción rigurosa de un haz electromagnético por múltiples rendijas

Juan Sumaya Martínez*

Recepción: agosto 22 de 2001

Aceptación: noviembre 23 de 2001

* Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. Av. Instituto Literario No. 100, C.P. 50000. Col. Centro. Toluca, Estado de México, México.
Teléfono: (729) 296 55 56. Fax: (729) 296 55 54
Correo electrónico: jsumaya@uol.com.mx y jsumaya2000@yahoo.com.mx
Se agradece el apoyo del Conacyt-México y de la UAEM a través de los proyectos I35695-E y 1527/2001, respectivamente.

Resumen. En este trabajo presentamos una teoría rigurosa modal de la difracción de un haz electromagnético gaussiano TE-polarizado que incide normalmente sobre un sistema formado por N rendijas excavadas en una pantalla infinitamente conductora e infinitamente delgada. Se analiza numéricamente el espectro de difracción como función del número de rendijas dentro de las regiones escalar ($\lambda/\ell \leq 0.2$) y vectorial ($\lambda/\ell > 0.2$). Además, mostramos que la teoría de Huygens-Fresnel para este sistema tiene ciertas limitaciones cuando la longitud de onda es del orden del ancho de las rendijas. Finalmente, analizamos la influencia de algunos parámetros optogeométricos en el patrón de difracción y en el coeficiente de transmisión.

Palabras clave: difracción.

Rigorous Diffraction of an Electromagnetic Beam by Multiple Slits

Abstract. This paper studies the rigorous diffraction of an electromagnetic gaussian beam by N slits in a perfectly thin conducting screen (line finite grating of period D). The TE polarization case is considered, i.e. when the electric field is parallel to the slits.

The evolution of the diffraction pattern in far-field as a function of the number of slits and the wavelength is analyzed. We show that Huygens-Fresnel's classical theory cannot predict some features on the spectrum when the wavelength lies in the vectorial region. Finally, the transmission coefficient and the spectrum are studied as a function of several optogeometrical parameters.

Key words: Diffraction and scattering (PACS: 42.25.Fx).

Introducción

De hace algunos años a la fecha se ha incrementado el interés en la difracción de haces de ancho finito en visible y en la región de microondas, debido a sus aplicaciones tanto en la óptica (Andersen y Regan, 1989; Mata, 1991) como en la física del estado sólido (Mata, 1988). En particular se ha puesto especial atención en los haces de tipo gaussiano (Sasaki, 1980; Mata *et al.*, 1983; Toshitaka, 1990; Langlois *et al.*, 1985; Kraus, 1990), debido a que son el modo fundamental de emisión de un láser (Marcuse, 1982: 230). Sin embargo, a pesar de la extensa literatura sobre el tema, la mayoría de las teorías existentes no son exactas, ya que

están basadas en la aproximación de Kirchhoff o en la teoría geométrica de Keller (Keller, 1962).

Por otra parte, en un artículo previo (Mata y Chávez, 1993) se demostró que el problema general de la difracción puede ser clasificado con base en el valor que adquiere el cociente $\lambda\ell$, donde λ es la longitud de onda y ℓ el ancho característico de las aberturas. De este modo, si $\lambda\ell \leq 0.2$ el régimen es llamado escalar, mientras que si $0.2 < \lambda\ell$, entonces el problema pertenece al régimen vectorial. En la región escalar, los efectos de polarización se pueden despreciar, y una teoría como la de Kirchhoff (TK) o la de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) proporciona muy buenos resultados, mientras que en la zona vectorial es indispensable el uso de una teoría riguro-

sa que considere el tipo de polarización que posee la onda incidente (transversal eléctrico TE o transversal magnético TM). Entendemos por teoría rigurosa a aquella que resuelva sin aproximaciones el problema de la difracción usando las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera apropiadas, y cuya exactitud está limitada únicamente por la precisión de los métodos numéricos. Estas teorías rigurosas toman en cuenta las características de inhomogeneidad de amplitud y fase de la onda incidente, así como la existencia de borde, de espesor, y la naturaleza de la pantalla difractora.

En este artículo presentamos una teoría rigurosa de la difracción de un haz electromagnético por N rendijas iguales de ancho ℓ y separación d . Esta teoría rigurosa funciona tanto en la región escalar como en la vectorial, aunque en este trabajo nos enfocaremos de manera particular en esta última región. Esta clase de problema es importante no solamente a nivel fundamental, sino desde el punto de vista tecnológico, en el diagnóstico de superficies mediante microondas, ondas milimétricas, láser o haces ultrasónicos y especialmente en el desarrollo de varios tipos de dispositivos ópticos. Finalmente, cabe mencionar que a pesar de que en la literatura se presentan algunas teorías rigurosas de la difracción por un número finito de rendijas, sólo consideran el caso particular de ondas planas incidentes (Hugonin y Petit, 1977; Leeb, 1973; Otsuki, 1990).

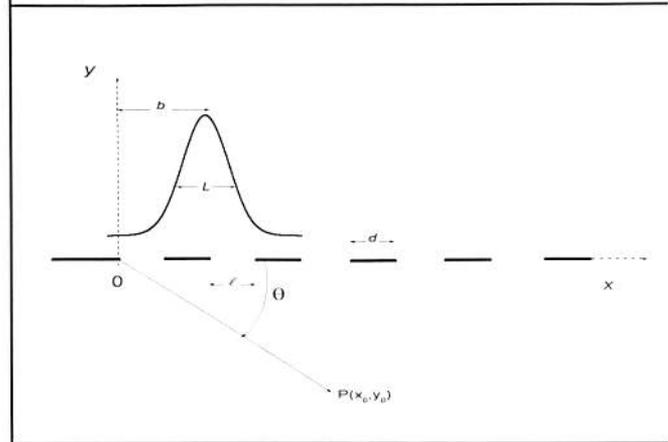
La organización general del trabajo es como sigue: en la primera parte presentamos una teoría rigurosa modal, y determinamos las expresiones para el cálculo de los campos dispersado y transmitido. En la segunda estudiamos numéricamente el patrón de difracción (en transmisión) para un haz gaussiano a incidencia normal, y analizamos la influencia de diversos parámetros optogeométricos en dicho espectro, así como en el coeficiente de transmisión. Los parámetros considerados en el análisis son: el número de rendijas, la longitud de onda y el ancho de la cintura del haz. Las conclusiones finales se enuncian en la tercera parte.

I. Formulación de la teoría

1. La base de Fourier

Consideremos una pantalla plana infinitamente conductora e infinitamente delgada (espesor cero), colocada en el vacío, sobre la cual se excavan N rendijas paralelas de longitud infinita, de ancho fijo y con una separación constante entre las rendijas, es decir, de periodo $D=\ell+d$ (véase figura 1). Escogemos un sistema coordenado rectangular $Oxy\zeta$, de tal manera que la pantalla coincida con el plano $Ox\zeta$ y que las rendijas sean paralelas al eje $O\zeta$. Las rendijas son iluminadas por

Figura 1. Configuración del problema. La N rendijas de ancho ℓ y separación d son paralelas al eje Oz , es decir, son perpendiculares al plano de la figura. El ángulo θ se utiliza para describir el espectro.



un haz monocromático de forma gaussiana y de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k_0$ (k_0 es el vector de onda en el vacío), el cual es independiente de la variable ζ (onda cilíndrica), y que incide normalmente sobre la pantalla.

La unicidad de la solución y la condición de invarianza del sistema bajo una traslación paralela al eje $O\zeta$ garantizan que tanto el campo eléctrico total E , como el campo magnético total H son independientes de la coordenada ζ (onda cilíndrica). Si, como en nuestro caso, el campo eléctrico incidente E^i es paralelo a las rendijas, se dice que se tiene el caso fundamental de polarización transversal eléctrico (TE). Por lo anterior, el campo eléctrico $E=E(x, y)$ debe satisfacer la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_0^2 E = 0 \quad (1)$$

Definimos la transformada de Fourier del campo eléctrico $E(x, y)$ con respecto a x como

$$E(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\alpha, y) \exp(i\alpha x) d\alpha \quad (2)$$

y su transformada inversa

$$\hat{E}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \exp(-i\alpha x) d\alpha. \quad (3)$$

Si se sustituye la ecuación (2) en la ecuación (1), se obtendrá una ecuación diferencial lineal de segundo orden para la transformada $\hat{E}(\alpha, y)$, cuya solución es

$$\hat{E}_1(\alpha, y) = A(\alpha)\exp(-i\beta y) + B(\alpha)\exp(i\beta y) \quad (\text{para } y > 0) \quad (4)$$

$$\hat{E}_2(\alpha, y) = C(\alpha)\exp(-i\beta y) + D(\alpha)\exp(i\beta y) \quad (\text{para } y < 0) \quad (5)$$

donde $\beta^2 = k_0^2 - \alpha^2$, con $\beta \geq 0$ o $\beta/i \geq 0$. Además, las condiciones de propagación exigen que $D(\alpha)$ sea nula para todo α , y que $A(\alpha)$ tenga su soporte en $|\alpha| \leq k_0$. El primer término del lado derecho de la ecuación (4) representa la transformada de Fourier en x del campo incidente, mientras que el segundo representa al campo dispersado. Finalmente, el término restante de la ecuación (5) con coeficiente $C(\alpha)$ es la onda transmitida.

De las ecuaciones (2) a (5) y de los razonamientos anteriores, se obtiene que los campos eléctricos E_1 y E_2 están dados por los siguientes desarrollos en ondas planas

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_0}^{k_0} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha \quad (\text{para } y > 0), \quad (6)$$

$$E_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha \quad (\text{para } y < 0). \quad (7)$$

Denotemos por $E_3(x)$ el campo eléctrico en las rendijas ($y=0$). La condición de conductividad infinita implica que E_3 es nulo en la pantalla, por lo tanto podemos escribir

$$E_3(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \phi_{n1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2} \phi_{n2}(x) + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nN} \phi_{nN}(x) \quad (8)$$

donde las $\phi_{np}(x)$ ($p=1, 2, 3, \dots, N$) están dadas por:

$$\phi_{np} = \begin{cases} \text{sen} \left[(x - (p-1)(d+\ell)) \frac{n\pi}{\ell} \right] \\ \text{si } (p-1)(d+\ell) \leq x \leq \ell + (p-1)(d+\ell) \\ 0 \text{ en cualquier otro } x, \end{cases} \quad (9)$$

y satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\langle \phi_{np}, \phi_{mq} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{np} \phi_{mq}^* dx = \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \delta_{pq}, \quad (10)$$

con $n, m=1, 2, \dots, \infty$ y $p, q=1, 2, \dots, N$. Con lo anterior, hemos determinado tres diferentes expresiones para el campo eléctrico total, dadas por las ecuaciones (6), (7) y

(8), que son válidas en tres diferentes regiones, quedando únicamente por encontrar a las funciones $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, y a los conjuntos constantes $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nN}$. Para determinar estas incógnitas aplicaremos las condiciones de continuidad del campo eléctrico en las rendijas.

2. Condiciones de continuidad

De la continuidad de E_1 y E_3 en $y=0$, y usando las ecuaciones (4), (5) y (8), obtenemos

$$A(\alpha) + B(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \phi_{n1}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2} \phi_{n2}(\alpha) + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nN} \phi_{nN}(\alpha) \quad (11)$$

$$C(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \phi_{n1}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2} \phi_{n2}(\alpha) + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nN} \phi_{nN}(\alpha) \quad (12)$$

donde ϕ_{np} denota la transformada de Fourier de $\phi_{np}(x)$ dada por

$$\phi_{np}(\alpha) = e^{-i\alpha[(p-1)(d+\ell)]} \times \frac{n\pi}{\sqrt{2\ell}} \left[\frac{1 - (-1)^n \exp(-i\alpha\ell)}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - \alpha^2} \right], \quad (13)$$

para $n=1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ y $p=1, 2, 3, 4, \dots, N$. Esos resultados nos proporcionan dos ecuaciones con un número infinito de incógnitas $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ y a_{np} . Para que el sistema sea soluble, truncamos el sistema al orden N_0 , que es el número de coeficientes modales elegido de acuerdo a la convergencia de nuestros resultados y al cumplimiento del teorema de conservación de la energía. Esto nos da lugar a un sistema lineal con $N_0 \times N + 2$ incógnitas, por lo que debemos recurrir a otras $N_0 \times N$ ecuaciones. Para esto, apliquemos la continuidad de la derivada normal del campo en $y=0$. Así, obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial E_2}{\partial y}(x, 0), \phi_{mq}(x) \right\rangle = 0 \quad (14)$$

con $m=1, 2, \dots, N_0$ y $q=1, 2, \dots, N$. Además, si aplicamos el teorema de Parseval–Plancherel $\langle f(x), g(x) \rangle = \langle \hat{f}(\alpha), \hat{g}(\alpha) \rangle$ a la ecuación (14) resulta

$$\left\langle \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial y}(\alpha, 0) - \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial y}(\alpha, 0), \hat{\phi}_{mq} \right\rangle = 0 \quad (15)$$

Por tanto, el sistema (15) nos proporcionará las ecuaciones restantes.

Finalmente, si después de derivar las ecuaciones (4) y (5) y sustituir en la ecuación (15), se elimina a $B(\alpha)$ y $C(\alpha)$ mediante las ecuaciones (11) y (12), se obtendrá el siguiente sistema finito de ecuaciones lineales en las incógnitas a_{nm} :

$$\sum_{n=1}^{N_0} a_{n1} \langle \beta \hat{\phi}_{n1}, \hat{\phi}_{mq} \rangle + \sum_{n=1}^{N_0} a_{n2} \langle \beta \hat{\phi}_{n2}, \hat{\phi}_{mq} \rangle + \dots + \sum_{n=1}^{N_0} a_{nN} \langle \beta \hat{\phi}_{nN}, \hat{\phi}_{mq} \rangle = \langle \beta A(\alpha), \hat{\phi}_{mq} \rangle \quad (16)$$

con $n, m=1, 2, \dots, N_0$ y $q=1, 2, \dots, N$, el cual puede ser representado en forma matricial.

De este modo, si a^1, a^2, \dots, a^N son matrices columna formadas por los respectivos coeficientes modales a_{np} , y M^{pq} son matrices cuadradas que miden el grado de acoplamiento entre la p -ésima y la q -ésima rendija, obtenemos

$$\begin{aligned} M^{11} a^1 + M^{12} a^2 + \dots + M^{1N} a^N &= S^1 \\ M^{21} a^1 + M^{22} a^2 + \dots + M^{2N} a^N &= S^2, \\ \dots & \\ M^{N1} a^1 + M^{N2} a^2 + \dots + M^{NN} a^N &= S^N \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$[M^{pq}]_{mn} = M^{pq}_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta \hat{\phi}_{np} \hat{\phi}_{mq}^*(\alpha) d\alpha, \quad (18)$$

$$[S^q]_n = S^q_n = 2i \int_{-k_0}^{k_0} \beta A(\alpha) \hat{\phi}_{mq}^*(\alpha) d\alpha, \quad (19)$$

con $\beta(\alpha) = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2}$. La matriz de acoplamiento M^{pq} dada por la ecuación (18) contiene los elementos optogeométricos del sistema, mientras que la matriz S^q es proporcional a la amplitud del haz incidente $A(\alpha)$. Al resolver por inversión matricial el sistema (17) encontraremos los coeficientes modales a_{np} y, por lo tanto, el campo en las ranuras mediante la ecuación (8). Finalmente, si reemplazamos estos coeficientes en (11) y (12) determinaremos las amplitudes $B(\alpha)$ y $C(\alpha)$, y por sustitución de éstas en (6) y en (7) obtendremos el campo dispersado y el transmitido, respectivamente. De este modo, hemos obtenido la solución formal del problema.

3. Conservación de la energía

Definiremos al coeficiente de transmisión (τ) al cociente entre la energía transmitida a través de las N rendijas y la energía total incidente (I_0). El coeficiente de reflexión (ρ)

será el coeficiente entre la energía reflejada y la energía incidente. Así, la conservación de la energía se expresa como

$$\rho + \tau = 1 \quad (20)$$

Estos coeficientes se calculan empleando el vector de Poynting complejo y están dados por

$$\tau = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |C(\alpha)|^2 d\alpha}{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |A(\alpha)|^2 d\alpha} = \frac{\text{Re} \left\{ \sum_{p=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} a_{np}^* S_n^p \right\}}{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |A(\alpha)|^2 d\alpha} \quad (21)$$

$$\rho = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |B(\alpha)|^2 d\alpha}{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |A(\alpha)|^2 d\alpha} = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) \{C(\alpha) - A(\alpha)\}^2 d\alpha}{\int_{-k_0}^{k_0} \beta(\alpha) |A(\alpha)|^2 d\alpha} \quad (22)$$

Además, la intensidad transmitida como función del ángulo θ (en campo lejano) es

$$I(\theta) = \frac{k_0^2}{2\mu_0 \omega} \text{sen}^2 \theta |\hat{E}_3(k_0 \cos \theta, 0)|^2 \quad (23)$$

A menos que se indique lo contrario, todos los patrones de difracción presentados en este artículo estarán normalizados a la intensidad incidente I_0 , es decir, se graficará el cociente $I(\theta)/I_0$.

II. Resultados numéricos

Supondremos que el sistema es iluminado por un haz gaussiano normalmente incidente, cuya distribución de intensidad en el eje x esta dada por

$$I(x) = \exp \left[-\frac{4(x-b)^2}{L^2} \right] \quad (24)$$

donde L es el ancho de la gaussiana en $y=0$, y b es el parámetro de posición del haz respecto al eje $0y$ (véase figura 1). $L/2$ es el semiancho de la cintura del haz cuando su intensidad disminuye hasta $(1/e)$ de su valor máximo.

La amplitud espectral asociada a este haz es

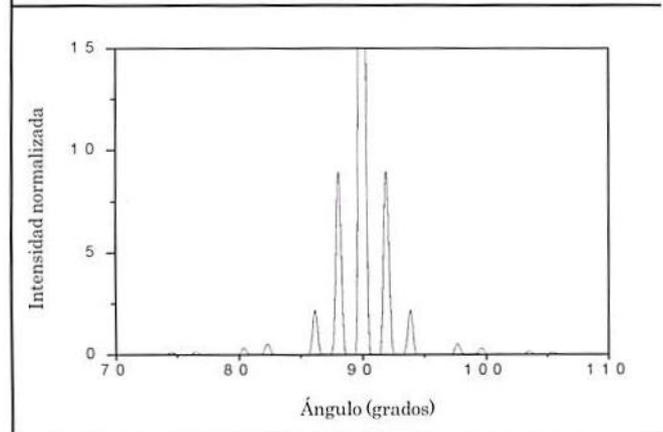
$$A(\alpha) = \frac{L}{2} \exp(-i\alpha b) \exp \left(-\frac{\alpha^2 L^2}{8} \right) \quad (25)$$

A menos que se indique lo contrario $b=\Lambda/2$, donde $\Lambda=N\ell+(N-1)d$ es la longitud de la rejilla finita, es decir, consideraremos que el haz está centrado sobre el sistema. Cabe mencionar que la teoría aquí presentada es válida para cualquier otra forma del haz, por ejemplo para modos Hermite-Gauss, Bessel, haces distorsionados e incluso fractálicos.

Durante la explotación sistemática de los programas numéricos se cuidó el cumplimiento de la conservación de la energía con una precisión mínima de 10^{-4} , así como la estabilización de los resultados al aumentar el número de coeficientes modales N_m . Otro tipo de validación es la consistencia de nuestros resultados con el caso de la difracción de un haz gaussiano por una rendija en la región escalar (Mata y Chávez, 1995), y por dos rendijas en la región vectorial (Mata y Chávez, 1993). Para esto último, iluminamos con un haz angosto ($L=5\ell$) una y dos rendijas de un sistema formado por cinco y seis rendijas respectivamente, colocando las restantes rendijas lejos de estas últimas ($d=40\ell$). Los patrones así obtenidos son idénticos hasta la tercera cifra decimal. Por otra parte, también hemos comparado nuestra teoría con cálculos recientes obtenidos mediante la teoría aproximada de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) para la dispersión de haces gaussianos por N rendijas (Mata y Chávez, 1998). El intervalo de longitud de onda considerado en dicho artículo es $0.001 \leq \lambda/\ell \leq 0.2$, es decir dentro de la región escalar, ámbito en el cual la TRS proporciona muy buenos resultados. Así por ejemplo, hemos reproducido con nuestro programa las figuras 2 y 4 de la referencia anterior para $\lambda/\ell=0.01$. En la primera de ellas se presenta el patrón de difracción producido por una rendija y un haz gaussiano normalmente incidente, con un ancho $L/\ell=3/\sqrt{2}$ y posiciones $b/\ell=0.5, 0.25, 0.125$, y -0.03 ; mientras que en la segunda se muestran los aspectos para dos rendijas con $L/\ell=5/\sqrt{2}$ y alineación $b/\ell=0.75, 1.0, 1.5$, y 1.85 . En ambos casos la concordancia es excelente (figuras no mostradas). Por último, comparamos los espectros para cinco rendijas usando la TRS y nuestra teoría rigurosa para $\lambda/\ell=0.05$ con $D/\ell=1.5$ y $L/\ell=5/\sqrt{2}$. También en este caso encontramos una gran coincidencia tal y como se observa en la figura 2.

Cabe señalar que los resultados que se reportarán en este trabajo están calculados para algunas longitudes de onda particulares $\lambda/\ell > 0.2$; sin embargo, las conclusiones obtenidas son válidas en general para cualquier longitud de onda dentro de la región vectorial.

Figura 2. Patrón de difracción normalizado a la energía incidente ($I(\theta)/I_0$) de un haz gaussiano, que incide perpendicularmente sobre cinco rendijas. La teoría de Rayleigh-Sommerfeld (TRS) y la teoría rigurosa proporcionan el mismo resultado para $\lambda/\ell=0.05$, $D/\ell=1.5$, $L/\ell=5/\sqrt{2}$ y $b/\ell=3.5$.



1. Influencia de la longitud de onda

Veamos en primer lugar cómo influye la longitud de onda en la difracción. Para esto, en las figuras 3a, 3b y 3c mostramos los espectros semilogarítmicos obtenidos para $N=3, 5$ y 7 rendijas de periodo $D/\ell=1.5$, cuando el sistema es iluminado por un haz gaussiano de ancho $L/\ell=3.5355$ y longitud de onda $\lambda/\ell=0.05, 0.8$ y 1.5 , respectivamente. Estas figuras muestran que para λ/ℓ dentro de la región escalar, los patrones de difracción son muy oscilantes, concentrándose la mayor parte de la energía del espectro en una pequeña región angular $\Delta\theta \approx 20(\lambda/\ell)$ alrededor de la normal (independientemente del valor de N). Cuando el cociente λ/ℓ aumenta hacia la zona vectorial el número de oscilaciones disminuye, y el patrón de difracción alcanza grandes valores angulares, con lo que finalmente desaparecen las oscilaciones características de un patrón de difracción en la óptica tradicional. Debido a esto, el número de órdenes espectrales observables se reduce significativamente al aumentar la longitud de onda; así para $\lambda/\ell=0.05$ se pueden observar varios órdenes, mientras que para $\lambda/\ell=0.8$ se observan dos, y para $\lambda/\ell=1.5$ sólo uno (distintos del orden cero). Obsérvese que los máximos tienden a hacerse más angostos y un poco más intensos conforme aumenta N , aunque su posición permanece constante. Contrariamente, los máximos secundarios disminuyen fuertemente su intensidad hasta casi desaparecer (por debajo de 10^{-3}) a partir de $N=7$ (véase figura 3c). Para explicar este comportamiento, observemos que la distribución de intensidad gaussiana (ecuación 24) tiene asociada una distribución de campo eléctrico incidente también de forma gaussiana, cuyo ancho está dado por $A = \sqrt{2}L/\ell$; de aquí

que el campo eléctrico no alcance a cubrir ni la mitad de la longitud del sistema formado por las 7 rendijas ($\Lambda/\ell=10$), razón por la cual no puede excitar apropiadamente a estos máximos.

Ahora constataremos la validez de la teoría de Huygens-Fresnel (THF) para el problema de la difracción por N rendijas, para lo cual compararemos algunas de sus predicciones con los resultados obtenidos mediante nuestro tratamiento riguroso. De acuerdo a esta teoría, la densidad de flujo transmitido por N rendijas de ancho ℓ y periodo D (en la aproximación de Fraunhofer) está dada por (Ghatak y Thyagarajan, 1980: 132):

$$I = I_{00} \frac{\text{sen}^2 \beta}{\beta^2} \frac{\text{sen}^2 N\gamma}{\text{sen}^2 \gamma} \quad (26)$$

donde I_{00} es la intensidad normalmente dispersada por una sola rendija, $\beta = (k\ell/2)\text{sen}\theta'$ y $\gamma = (kD/2)\text{sen}\theta'$, con θ' medido desde la normal a las rendijas, es decir, $\theta' = 90 - \theta$ (véase figura 1). De este modo, los máximos principales ocurren cuando

$$\frac{\text{sen}N\gamma}{\text{sen}\gamma} = N \quad (27)$$

es decir,

$$\text{sen}\theta'_m = m\lambda/D \quad (28)$$

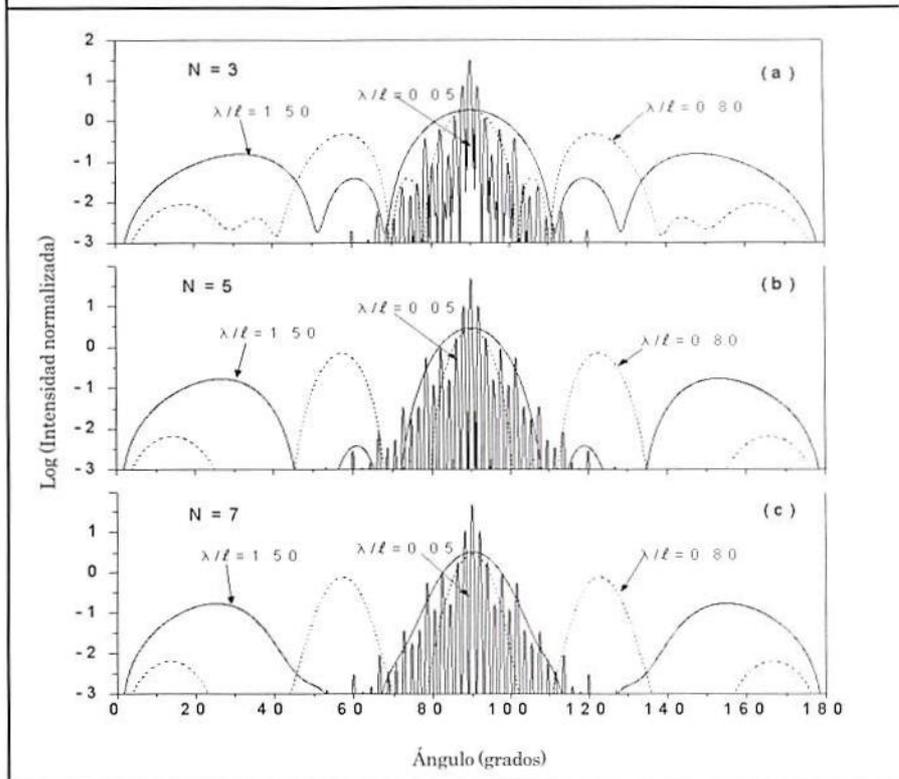
con $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (el orden) y $D=\ell+d$ (el periodo). Además, entre cada par de órdenes la THF predice $N-1$ mínimos cuando

$$\gamma = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N}, \dots \quad (29)$$

así como $N-2$ máximos secundarios en

$$\gamma = \pm \frac{3\pi}{2N}, \pm \frac{5\pi}{2N}, \dots \quad (30)$$

Figura 3. Patrones de difracción semilogarítmicos $\log(I(\theta)/I_0)$ para 3, 5 y 7 rendijas con separación $d/\ell=0.5$. Se considera un haz gaussiano centrado de ancho $L/\ell=3.5355$ y longitud de onda $\lambda/\ell=0.05, 0.8$ y 1.5.



Consideremos ahora un haz gaussiano de ancho $L/\ell = 5/\sqrt{2}$ y longitud de onda $L/\ell=0.05$ que incide sobre 3 rendijas, y determinemos la posición de los órdenes con la teoría de Huygens-Fresnel (ecuación 28) y con nuestra teoría rigurosa. El periodo de las rendijas es $D/\ell=1.5$ y se mantendrá fijo durante el resto del artículo. En la figura 4a se puede observar una buena concordancia entre ambos resultados ya que el principio HF predice los tres primeros órdenes en las posiciones $\theta_1=88.0897^\circ$, $\theta_2=86.1774^\circ$ y $\theta_3=84.2608^\circ$ (señalados con flechas), mientras que en nuestro caso hallamos $\theta_1=88.1992^\circ$, $\theta_2=86.0992^\circ$ y $\theta_3=84.2992^\circ$, lo cual representa una diferencia porcentual no mayor al 0.12%. Ahora bien, para $\lambda/\ell=0.8$ la teoría escalar predice un máximo de primer orden $\theta_1=57.7690^\circ$ y mínimos en $\theta_{min}=79.7596^\circ$, 69.1725° , 57.7690° , 44.6746° y 27.2660° (usando la ecuación 29), así como máximos secundarios en $\theta_{sc}=74.5339^\circ$, 63.6122° , 51.5214° y 12.1014° (usando la ecuación 30).

Como se puede observar en la figura 4b, la teoría escalar indica correctamente 4 mínimos, dos máximos secundarios y un orden; sin embargo, no puede predecir un segundo orden en $\theta=16.1004^\circ$ (señalado). Finalmente para $\lambda/\ell=1.5$ la teoría escalar predice únicamente el máximo de orden cero (señalado), mientras que en la figura 4c podemos observar un máximo de primer orden en $\theta_2=32.1050^\circ$. Más aún, hemos encontrado que este pico adicional aparece hasta

una longitud de onda $\lambda/\ell=1.9$, independientemente del número de rendijas. Este máximo adicional tiene su origen tanto en el tamaño finito del haz gaussiano como en el carácter vectorial del mismo.

A partir de la ecuación (26) también se deduce que la altura del máximo de irradiancia para N rendijas, según la THF, tendrá la forma $I(\theta=90^\circ)=N^2 I_{00}$, donde I_{00} es el máximo para una rendija con los mismos parámetros; veamos si esto se cumple para un haz gaussiano. En la figura 5 mostramos los espectros normalizados a I_{00} para $N=3, 5$ y 7 rendijas, con $\lambda/\ell=0.5$ (figura 5a) y $\lambda/\ell=0.80$ (figura 5b). Del análisis de estas figuras podemos concluir que los máximos de orden cero no siguen la conocida regla para ondas planas, ni en la región escalar ni en la vectorial. Los valores obtenidos para $\lambda/\ell=0.05$ y $N=3, 5$ y 7 rendijas son: $I(90^\circ)=5.7029I_{00}$, $8.3953I_{00}$ y $8.8920I_{00}$, respectivamente, mientras que para $\lambda/\ell=0.8$ los valores disminuyen a: $I(90^\circ)=5.7029I_{00}$, $8.1773I_{00}$ y $8.6089I_{00}$. Para los restantes órdenes ($m \neq 0$) se observa un comportamiento similar. Consideremos ahora el ancho angular de los máximos, definido por medio de la separación entre sus mínimos adyacentes. Es fácil deducir a partir de las ecuaciones (28) y (29) que la separación entre dos mínimos adyacentes está dada por

$$\delta = \frac{2\lambda}{ND} \quad (31)$$

relación que es independiente del número de orden m . Nuestras simulaciones muestran que la ecuación (31) es válida también para haces gaussianos dentro de la región escalar (véanse figuras 3, 4 y 5). Sin embargo, esta relación no se satisface en el régimen vectorial, ya que los máximos primarios y secundarios tienden a ensancharse hacia los extremos angulares del espectro (ver figura 3).

Figura 4. Patrones de difracción normalizados ($I(\theta)/I_0$) para 3 rendijas y un haz gaussiano de longitud de onda (a) $\lambda/\ell=0.05$, (b) $\lambda/\ell=0.80$, (c) $\lambda/\ell=1.50$. Mismos parámetros que en la figura 3.

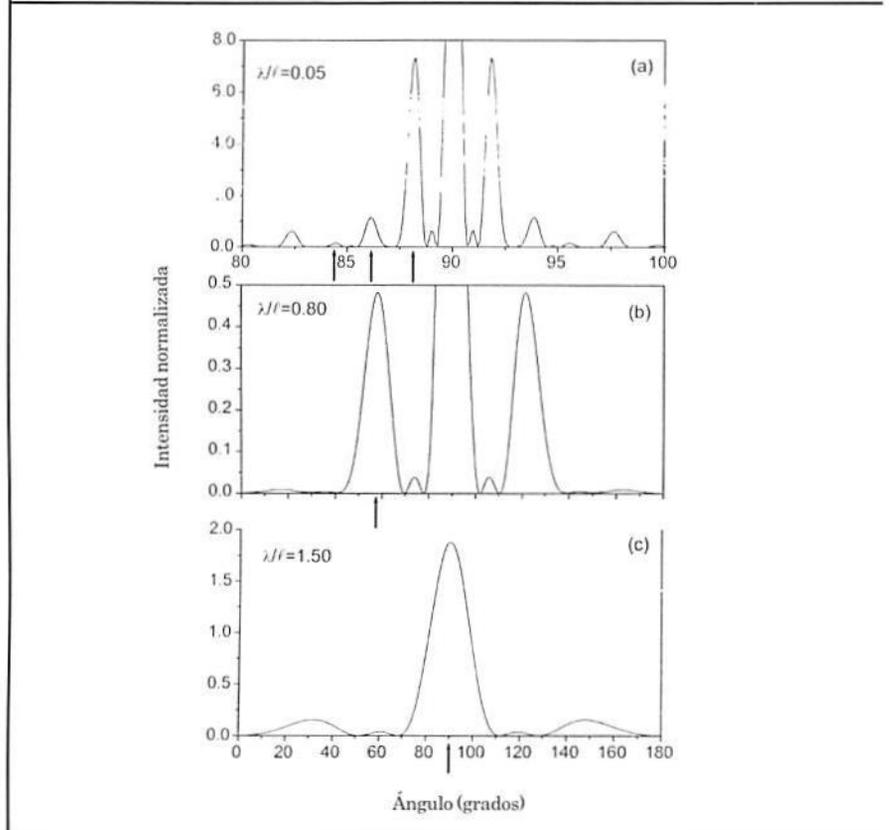
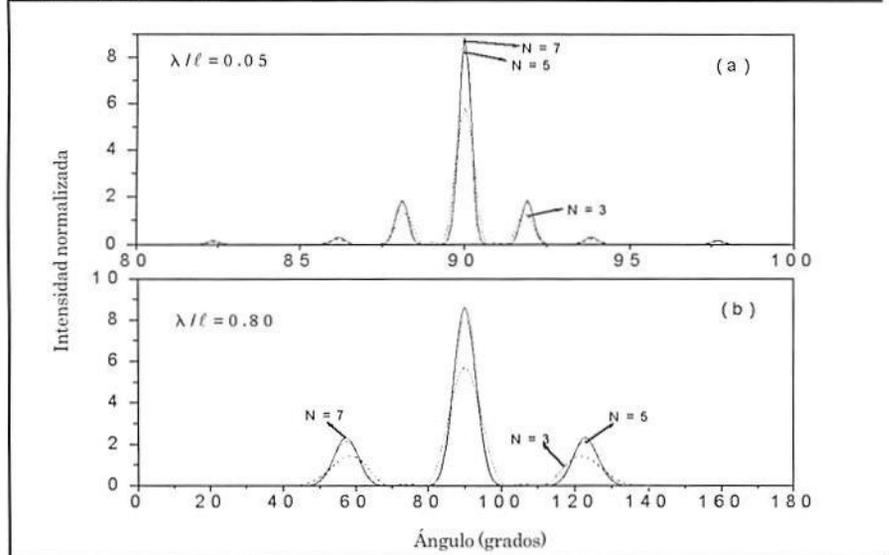


Figura 5. Patrón de difracción normalizado a I_{00} para 3, 5 y 7 rendijas. Mismos parámetros que en la figura 3 con $\lambda/\ell=0.05$ y $\lambda/\ell=0.80$.



En la figura 6 se muestra la variación del coeficiente de transmisión τ como función de la longitud de onda λ/ℓ para 2, 3, 4, 5 y 8 rendijas y un haz gaussiano de ancho $L/\ell=3.5355$. En dicha figura podemos distinguir una serie de oscilaciones de intensidad creciente, cuyos máximos

Figura 6. Influencia de la longitud de onda λ/ℓ en el coeficiente de transmisión para 2, 3, 4, 5 y 8 rendijas. Mismos parámetros que en la figura 3.

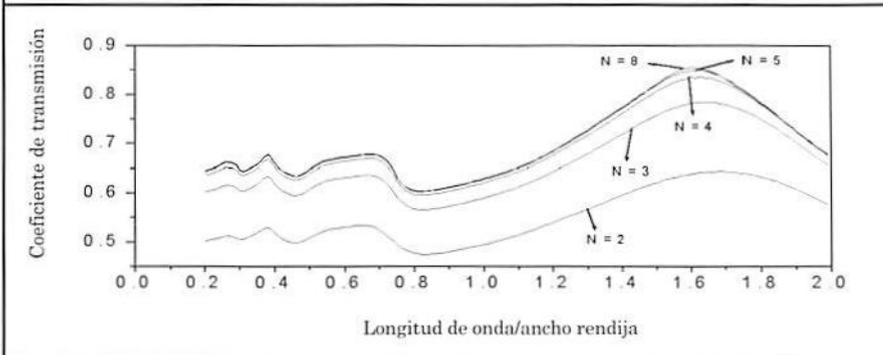
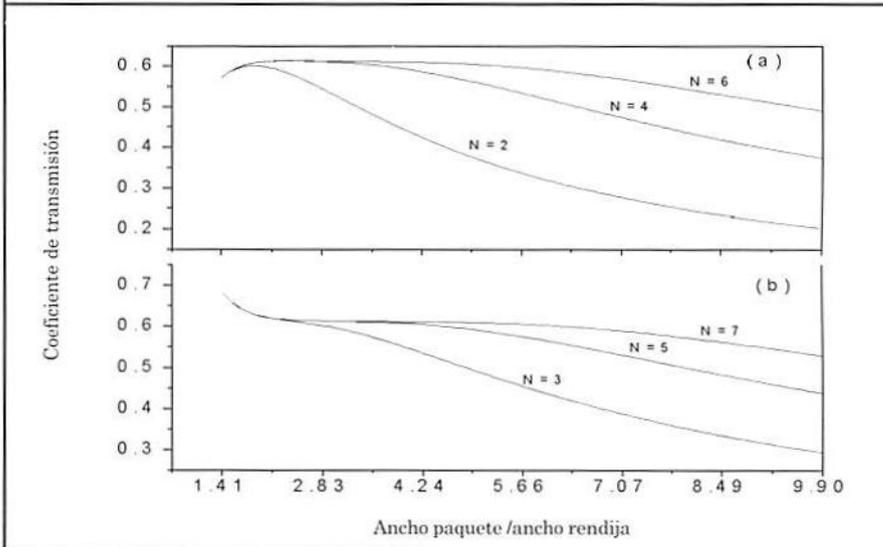


Figura 7. Influencia del ancho del haz L/ℓ en el coeficiente de transmisión para (a) 2, 4 y 6 rendijas y (b) 3, 5 y 7 rendijas. Mismos parámetros que en la figura 3 con $\lambda/\ell=0.90$.



comunes se localizan en $\lambda/\ell=0.2702, 0.3725, 0.6312$ y 1.7620 ; aquí la barra indica el resultado para dos rendijas, ya que este último máximo se recorre ligeramente a la izquierda al aumentar el número de rendijas. Lo anterior prueba de manera parcial la conjetura hecha por Mata y Chávez (Mata y Chávez, 1993 *op. cit.*) en el sentido de que la posición de estos máximos y mínimos es independiente del número de rendijas, ya que encontramos que el último máximo es sensible al número de rendijas N y al ancho del haz L/ℓ . Este resultado muestra un efecto muy fuerte de interferencia debido al carácter vectorial del campo eléctrico, lo que origina oscilaciones que no pueden ser predichas por ninguna teoría escalar.

2. Influencia del ancho del haz

Para este análisis consideremos dos casos, el primero para un número par de rendijas (figura 7a) y enseguida para un

número impar (figura 7b). En la primera gráfica podemos observar máximos en $L/\ell=1.8738, 2.3688$ y 4.6668 , para 2, 4 y 6 rendijas respectivamente.

Obsérvese que a la izquierda de estos valores las gráficas convergen en el punto $(L/\ell)_{min}$, y a partir de aquí la energía se transmite de igual forma sin importar el número de rendijas; es decir, el haz deja de “ver” la estructura completa sobre la que incide. La rápida reducción en τ se explica por el hecho de que para N par, el haz queda centrado en una separación, por lo que al hacerse más angosto aumenta significativamente la reflectividad debido a que la pantalla es perfectamente conductora. Para anchos superiores a $(L/\ell)_{min}$, el coeficiente de transmisión decrece al aumentar L/ℓ convergiendo asintóticamente a cero. Esto último puede ser entendido si notamos que, una vez cubierto el sistema la energía transmitida es prácticamente constante (para una longitud de onda fija), mientras que la energía incidente aumenta. Para el segundo caso, con $N=3, 5$ y 7 , la figura 7b muestra que no existe un máximo, sino un punto de inflexión al cual convergen las gráficas. Este punto se encuentra cerca de $(L/\ell)_{min}$. A diferencia del caso anterior, las gráficas

presentan ahora un comportamiento creciente al disminuir el ancho del haz. Es interesante observar que los máximos y el punto de inflexión corresponden a valores de L/ℓ por debajo de la longitud Λ del sistema, es decir, que no es necesario que el haz cubra todo el sistema para obtener una máxima eficiencia en la energía transmitida.

Conclusiones

En este artículo hemos presentado una teoría rigurosa de la difracción de haces gaussianos por N rendijas iguales excavadas sobre una pantalla de conductividad infinita e infinitamente delgada. Se consideró que el haz incide perpendicularmente sobre la pantalla y tiene polarización TE, y se estudió numéricamente el patrón de difracción como función de la longitud de onda, del ancho del haz y del número de rendijas. El análisis se concentró en la llamada

región vectorial ($\lambda/\ell > 0.2$) en donde los efectos de polarización son importantes, aunque también se presentaron algunos resultados para la región escalar ($\lambda/\ell \leq 0.2$). También se realizó un estudio comparativo entre los resultados obtenidos mediante el principio de Huygens-

Fresnel y los calculados por nuestra teoría rigurosa, encontrando que la primera teoría es incompleta en sus predicciones, particularmente en la zona vectorial. Finalmente, se mostró la influencia de algunos parámetros optogeométricos en el coeficiente de transmisión. **o**

Bibliografía

- Andersen, D. y J. Regan (1989). "Reflection and Refraction of a Three-Dimensional Gaussian Beam at a Nonlinear Interface", *Journal of the Optical Society of America A*, 6, 9:1484.
- Bom, M. y E. Wolf (1999). *Principles of Optics*. Cambridge University Press. 7th ed. Cambridge, Inglaterra.
- Ghatak, A. K. y K. Thyagarajan (1980). *Contemporary Optics*. Plenum Press New York.
- Hugonin, J. P. y R. Petit (1977). "A numerical Study of the Problem of Diffraction at a Non-Periodic Obstacle", *Optics Communications* 20, 3: 360.
- Kojima, T. (1990). "Diffraction of Hermite-Gaussian Beams from a Sinusoidal Conducting Grating", *Journal of the Optical Society of America A* 7,9: 1740.
- Kraus, H. G. (1990). "Huygens-Fresnel-Kirchhoff Wave-Front Diffraction Formulation: Paraxial and Exact Gaussian Laser Beams", *Journal of the Optical Society of America A* 7,1:47.
- Keller, J. B. (1962). "Geometrical Theory of Diffraction", *Journal of the Optical Society of America* 52, 2:116.
- Langlois, P.; A. Boivin y R. A. Lessard (1985). "Electromagnetic Diffraction of a Three-dimensional Gaussian Laser Beam at Grazing Incidence upon a Large Absorbing Circular Cylinder", *Journal of the Optical Society of America A* 2, 6: 858.
- Leeb, W. (1973). "Diffraction by Narrow Slits", *Applied Optics* 12, 12: 2806.
- Marcuse, D. (1982). *Light Transmission Optics*. Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- Mata, O.
 _____ (1988). "Scattering of Electromagnetic Beams from Rough Surfaces", *Physical Review B* 37, 14: 8182.
 _____ (1991). "Diffraction and Beam-Diameter Measurement of a Gaussian Beams at Optical and Microwave Frequencies", *Optics Letters* 16, 21: 1629.
 _____; Cadilhac, M. y R. Petit (1983). "Diffraction of a Two-Dimensional Electromagnetic Beam Wave by a Thick Slit Pierced in a Perfectly Conducting Screen", *Journal of the Optical Society of America* 73, 3: 328.
- _____ y F. Chávez (1993). "Estudio teórico y numérico de la difracción en óptica electromagnética II. Teoría rigurosa de la difracción de un haz gaussiano por dos rendijas. Polarización T. E.", *Revista Mexicana de Física* 39, 5: 706.
- _____ y F. Chávez (1995). "Diffraction of Hermite-Gaussian Beams by a Slit", *Journal of the Optical Society of America A* 12,11: 2440.
- _____ y F. Chávez (1998). "New Property in the Diffraction of Hermite-Gaussian Beams by a Finite Grating in the Scalar Diffraction Regime: Constant Intensity Angles in the Far Field When the Beam Center is Displaced through the Grating", *Journal of the Optical Society of America A* 15, 10: 2698.
- Otsuki, T. (1990). "Diffraction by Multiple Slits", *Journal of the Optical Society of America A* 7, 4: 646.
- Sasaki, A. (1980). "Fraunhofer Diffraction of Gaussian Laser Beams by a Single Slit", *Jpn. J. Appl. Phys.* 19: 1195.



se une a la pena de la familia de

Joel Nava Romero

7 de octubre de 2001

por el sensible fallecimiento de quien fue nuestro amigo y colaborador