

---

## SOBRE AS DESIGUALDADES DE BELL<sup>1</sup>

---

*Olival Freire – Jr.*  
Instituto De Física – UFBA  
Salvador – BA

### I. Sua pré-história

#### I.1. A crítica de Einstein à teoria quântica, em 1935

A pré-história das desigualdades de Bell encontra-se na crítica feita por Einstein<sup>(2)</sup> à interpretação da teoria quântica sustentada por Niels Bohr e por um conjunto de cientistas, conhecido como “interpretação de Copenhagen”, numa referência ao local onde esta foi gestada nos idos de 1926/1927. A crítica formulada em 1935 é considerada a crítica “madura” de Einstein<sup>(3)</sup>. É que anteriormente este buscava, através de “gedankenexperiment” limitar a validade das relações de Heisenberg. Do início dos anos 30 em diante Einstein não mais busca este objetivo, mas passa a considerar a teoria quântica como logicamente consistente, de forte respaldo empírico, mas incompleta. Incompleta porque apoiada num critério de realidade física ao qual ele se opõe e porque leva à uma propriedade (não-separabilidade) que ele considera fisicamente inaceitável. É então uma teoria estatística, que não trata de fenômenos individuais.

Contudo, esta argumentação não aparece tão explícita no artigo de 1935. Neste artigo ele propõe um experimento que revelaria existirem propriedades físicas dos microobjetos que não estariam expressas no formalismo da teoria, daí sua incompletude.

O experimento proposto por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) consiste em um sistema composto de duas partículas que interagem num dado instante e depois separam-se espacialmente. É realizada então uma medição de uma determinada grandeza em uma das partículas e, com esta informação mais a função de estado do sistema das duas partículas (fornecida pela teoria quântica) e mais algumas informações derivadas da interação que teria ocorrido entre as duas partículas, podemos **prever** o valor da mesma grandeza para a outra partícula, que não foi objeto de medição. Logo, a grandeza da segunda partícula pode ser conhecida sem ser objeto de medição. Fazendo transformações na função de estado podemos optar por medir outra grandeza na primeira partícula

---

<sup>1</sup> \*À memória de J. S. Bell<sup>(1)</sup> (1/10/1990).

e pelo mesmo processo poderemos conhecer o valor desta outra grandeza para a segunda partícula sem realizar qualquer medição sobre esta. Podemos então afirmar a existência de distintas grandezas da segunda partícula sem realizar qualquer medição sobre ela. Isto é, podemos afirmar que para a segunda partícula as grandezas estavam pré-determinadas, tinham valores precisos, independentes de qualquer medição.

Como podemos imaginar este processo para grandezas que são canonicamente conjugadas no formalismo da teoria quântica e como neste formalismo estas grandezas não podem ter definição simultânea, chegamos a uma situação em que o sistema físico teria propriedades (as duas grandezas canonicamente conjugadas da segunda partícula) não admitidas pelo formalismo da teoria. Teríamos então um formalismo **incompleto** e se poria então a questão de buscar um formalismo mais abrangente. No experimento proposto, Einstein considera as duas grandezas canonicamente conjugadas como sendo a posição e o momento das duas partículas.

Esta teoria mais abrangente, cuja necessidade e possibilidade foi sustentada por Einstein no final do artigo de 1935, foi entendida por muitos<sup>(4)</sup> como a adoção da hipótese de variáveis suplementares às adotadas pela teoria quântica (hidden variables) e capazes de viabilizar a expressão neste novo formalismo quântico daquelas grandezas (canonicamente conjugadas) que tinham existência física mas que o formalismo usual não era capaz de expressar<sup>(5)</sup>.

Vale destacar também que uma teoria capaz de expressar no seu formalismo variáveis canonicamente conjugadas, como posição e momento, teria como consequência a restauração do determinismo próprio da física clássica, o que era também uma aspiração de Einstein<sup>(6)</sup>.

## 1.2. A explicitação da premissa da não separabilidade

Em 1948 Einstein explicitara<sup>(7)</sup> que sua argumentação tinha pressupostos, independentes da teoria quântica, que por mais triviais que fossem deveriam ser explicados, quais sejam:

1. Os **conceitos** da física relacionam-se a um mundo externo que tem existência real independente do sujeito que percebe. A nosso ver a mais precisa enunciação deste pressuposto implica definir, como Clauser<sup>(8)</sup>, que *“realismo é uma visão filosófica de acordo com a qual a realidade externa é assumida existir e ter propriedades definidas, se ela está ou não sendo observada por alguém”*.

2. A premissa de que dois objetos separados no contínuo espaço-tempo agem como dois objetos independentes, sem correlações, a não ser aquelas admitidas pela

física clássica como as derivadas das leis de conservação. Era a premissa da separabilidade.

### I.3. Seu desenvolvimento por Bohm em 1951 – o exp. EPR-B

Em 1951 o jovem físico norte americano faria uma outra apresentação do experimento EPR que simplificaria imensamente a manipulação do seu formalismo matemático e, por isto, facilitaria os trabalhos ulteriores de Bell. A inovação apresentada por Bohm, no último capítulo do seu livro didático “Quantum Theory”<sup>(9)</sup>, foi a de conceber como grandezas conjugadas a serem consideradas não mais posição e momento, mas sim componentes de spin em dadas direções. Como sabemos, esta grandeza, que não tem equivalente em física clássica, foi introduzida “ad hoc” na mecânica quântica não relativística e só foi dedutível do formalismo da teoria quântica quando este teve um tratamento relativístico, iniciado por Dirac em 1928. O spin  $\hbar/2$  tem a particularidade de só admitir dois valores numa dada direção simplificando imensamente o tratamento matemático. Basta lembrar que no caso das grandezas tratadas por Einstein em 1935, a posição, por exemplo, poderia admitir numa dada direção todos os valores reais. Muitos autores passaram a referir-se ao experimento EPR como experimento EPR-B numa homenagem à simplicidade introduzida por Bohm no trato desta questão. Ulteriormente, quando dos testes experimentais das desigualdades de Bell, a opção pelas componentes de spin numa dada direção também contribuiu para viabilizar, agora empiricamente, o tratamento deste experimento. No Anexo 1 apresentaremos o formalismo do EPR conforme desenvolvido por Bohm em 1951.

### I.4. A resposta de Bohr em 1935, sua conceptualização de “fenômeno”

Mas voltemos à resposta dada por Bohr<sup>(10)</sup> ao argumento do EPR. Trilhando um caminho que lhe era próprio no debate sobre a interpretação da teoria, ele usa os teoremas de transformação próprios ao formalismo matemático da teoria quântica para mostrar que a função de onda adotada por Einstein para descrever as duas partículas corresponde a condições experimentais equivalentes a um arranjo por ele (Bohr) examinado. O arranjo em tela é um diafragma rígido, com duas fendas paralelas pelas quais passam duas partículas. Ele mostra então que, neste arranjo, medir a posição da primeira partícula implica em obter sem medição a posição da segunda partícula. Mas implica **também** numa interação (troca de momento) com o dispositivo experimental adequado para este experimento que impediria o conhecimento ulterior do momento seja da primeira ou da segunda partícula.

Ao formular esta resposta Bohr usa a expressão **fenômeno** para referir-se à totalidade dos objetos quânticos e das condições experimentais adequadas e necessárias

ao seu estudo. Com este conceito Bohr situa, portanto, o próprio objeto da teoria quântica e o significado da noção de realidade física em teoria quântica. Nas suas palavras “...tais condições constituem um elemento inerente à descrição de qualquer fenômeno ao qual se possa atribuir adequadamente o termo ‘realidade física’”. Para ele a teoria quântica não se faz perguntas sobre propriedades de um elétron isolado, por exemplo. Devido à não anulabilidade do quantum de ação cabe perguntar pelas propriedades do elétron em determinadas situações experimentais, ou em determinadas interações<sup>(11)</sup>.

Devemos destacar que para Bohr, portanto, a separação espacial e temporal das duas partículas não as torna completamente independentes e separáveis. Ele poderia reiterar isto argumentando que na teoria quântica a função de onda de um sistema composto (como este em que as duas partículas interagiram no passado) é não fatorizável. E, após uma nova interação ocorrer (medição de uma delas, por exemplo), tanto o sistema como cada uma das partículas passará a ser descrito por funções de onda que não representam uma evolução contínua (dada pela equação de Schrödinger) da função antes da interação. Pensamos que o fato dele não usar este recurso significa mais que um estilo (não recorrer ao formalismo matemático). Significa também a sua convicção de que a teoria quântica tratava de um novo objeto tão essencialmente distinto dos objetos da física clássica que mesmo uma propriedade tão trivial e aparentemente tão universal como a separabilidade espaço/tempo não deveria ter a sua validade admitida “a priori” do próprio tratamento fornecido pela teoria quântica.

### **I.5. A “correlação de forças” na comunidade científica, antes da II Guerra**

Se tomarmos o período que antecede a Segunda Guerra podemos afirmar que ocorreu um triunfo em larga escala da interpretação bohriana e da sua resposta ao argumento EPR<sup>(12)</sup>. Podemos mesmo afirmar que de 1935 em diante Einstein está numa posição quase solitária. Dentre os grandes físicos que em 1927 a ele se aliaram, Louis de Broglie aderiu à interpretação de Copenhagen, Lorentz morreu em 1927, Planck manteve-se discretamente sem intervir mais ativamente no debate.

## **II. A interpretação bohriana posta em questão, o "revival" das TVE's**

O pós Segunda Guerra juntou diversos fatores que levaram a um renovado interesse sobre a interpretação da teoria quântica. O primeiro deles é a persistência da posição de Einstein. Em 1948 e 1949 ele voltou a sustentar sua posição desenvolvendo agora uma linha de argumentação onde aparecia explícita uma defesa de seu próprio programa para o ulterior desenvolvimento da física. Nas suas palavras<sup>(13)</sup> “*funções contínuas no contínuo quadridimensional*” era a senha de um programa, o do campo unifi-

cado, que ao se realizar deveria levar aos mesmos resultados fornecidos pela teoria quântica. O segundo fator diz respeito aos acontecimentos na URSS no período pós 1947 e sua propagação nos meios marxistas em todo o mundo<sup>(14)</sup>. Ali afirmou-se a interpretação da teoria quântica como uma teoria estatística, incapaz de descrever fenômenos atômicos individuais, logo um reforço ao diagnóstico einsteniano.

Cabe aqui distinguir a interpretação estatística da mecânica quântica, no sentido de Einstein e de autores soviéticos, da interpretação probabilística, ou mesmo estatística, formulada por Max Born e defendida por Niels Bohr. Para estes autores o significado probabilístico da função de onda não limita a teoria quântica a uma teoria válida exclusivamente para fenômenos coletivos de muitos microobjetos. Para Bohr a natureza probabilística da teoria quântica decorre da existência do quantum de ação expresso, por exemplo, nas relações de Heisenberg.

E em terceiro lugar começaram a ocorrer, a partir de 1952, publicações de artigos com formulações alternativas à teoria quântica. Todos na linha de formulações que suplementassem a teoria quântica com variáveis ainda não consideradas na teoria (“hidden variables”) e capazes de recuperar uma descrição causal, no sentido clássico. O artigo pioneiro foi o clássico de Bohm, por sinal publicado quando este, perseguido pelo “maccartismo” americano, trabalhava na Universidade de São Paulo. Seguiram-se os trabalhos de Bohm e Vigier<sup>(15)</sup>. E ocorreu também em 1952 a reconversão de Louis de Broglie à interpretação da busca das variáveis escondidas<sup>(16)</sup>. A atitude de L. de Broglie fica realçada se considerarmos que Bohm, Viggier e outros eram físicos jovens e Einstein não apoiou iniciativas como as de Bohm<sup>(17)</sup>. L. de Broglie era assim o físico de largo prestígio (Prêmio Nobel) a cancelar todo este “revival” das teorias de variáveis escondidas e esta renovada atenção à interpretação da teoria quântica.

Outros cientistas e filósofos, como Rosenfeld e Hanson<sup>(18)</sup>, saíram em defesa da interpretação bohriana. E devemos lembrar que em 1932 Von Neumann havia demonstrado um teorema afirmando a impossibilidade de existirem teorias físicas com mais variáveis que aquelas já usadas pela teoria quântica. Mas, teorias de variáveis escondidas já estavam na praça, e proliferavam. A curiosidade e a inquietação eram irreversíveis. Todos estes acontecimentos na década de 50 regaram o terreno no qual germinaria já no início dos anos 60 este importante resultado hoje conhecido como “desigualdades de Bell”.

### **III. O trabalho de J. S. Bell**

Bell, no seu já clássico trabalho<sup>(19)</sup>, parte do experimento EPR na versão proposta por Bohm, ou seja, duas partículas que interagem e separam-se posteriormente, descritas por um estado “singlet” com spin total nulo. Ele toma a premissa einsteniana

da separabilidade (independência de sistemas físicos distantes no contínuo espaço-tempo); evidência que isto leva à predeterminação das variáveis da partícula não sujeita à medição. E que, como a teoria quântica não representa esta predeterminação, isto implica a possibilidade de uma mais completa especificação do sistema. A contribuição essencial de Bell vem a partir deste ponto. Ele traduz a premissa da separabilidade num critério físico e matemático que ele denomina de **localidade**; com base neste critério formula um modelo de uma descrição mais completa, usando variáveis adicionais às usadas pela teoria quântica e busca tirar conseqüências deste modelo. Num cálculo que impressiona pela simplicidade (ver Anexo 2) ele demonstra que um modelo deste tipo leva a desigualdades que não podem ser verificadas pelas previsões estatísticas usuais da teoria quântica. Sua conclusão é então que, ao menos no caso considerado, *“a predição estatística da mecânica quântica é incompatível com a predeterminação separável”*.

Bell aventa duas saídas<sup>(20)</sup> para a contradição encontrada. A primeira seria uma interação que se propagasse instantaneamente entre as duas partículas, ou entre os detetores destas partículas, falseando assim a premissa da separabilidade. Isto significa admitir uma violação da relatividade restrita (invariância de Lorentz).

As simpatias de Bell dirigem-se para a segunda saída: *“Certamente a situação é diferente se as predições quanto-mecânicas são de validade limitada”*.

Para a verificação experimental das desigualdades de Bell ainda foram necessários outros desenvolvimentos e mesmo hipóteses adicionais às consideradas inicialmente<sup>(21)</sup>. Mas, o mérito seminal do trabalho de Bell é que ele desloca o debate, travado durante trinta anos, do terreno estritamente epistemológico para aquele da verificação experimental, ou melhor, para o terreno estrito da física. Esta alteração está assinalada por Clauser nas seguintes palavras *“... a discussão, na maior parte dos 30 anos subsequentes, foi realizada mais nas festas e coquetéis entre físicos que na corrente principal da moderna pesquisa. A partir de 1965, contudo, a situação mudou dramaticamente”*.

#### **IV. Os testes experimentais**

A década de setenta foi marcada, para o debate sobre os fundamentos da teoria quântica, pela realização de diversos testes experimentais das desigualdades de Bell. O ápice deste processo, e o mais rigoroso, foi o experimento de Aspect<sup>(22)</sup>, em 1982. Mas, já antes deste experimento vários autores opinaram que o conjunto dos experimentos indicava uma violação das desigualdades de Bell, e portanto das possíveis teorias realísticas locais, e uma confirmação das previsões da teoria quântica<sup>(23)</sup>. Após o experimento de Aspect ampliou-se sensivelmente o número dos que tinham esta mesma avaliação<sup>(24)</sup>.

## V. A atualidade da questão

Pensamos que se os anos setenta foram marcados pelos testes experimentais das desigualdades de Bell, e entre um significativo número de físicos pela expectativa de uma “implosão” nos fundamentos da teoria quântica, já os anos oitenta alimentados pelos resultados que representaram uma importante validação da teoria quântica apresentaram uma dispersão no foco dos interesses e das alternativas de pesquisa.

Paty<sup>(25)</sup> propõe como programa epistemológico pensar a não separabilidade e, apoiado na não separabilidade fazer a crítica da nossa conceituação do espaço e também aprofundar a busca de uma teoria da medida.

Outros, como Gibbins<sup>(26)</sup>, consideram necessário abandonar a perspectiva de uma recuperação do realismo e desenvolver a lógica subjacente ao formalismo quântico, a lógica quântica.

A década passada reanimou também saídas extravagantes como a de Costa de Beauregard, publicada inicialmente em 1953, que sustenta estar a mecânica quântica implicando “*a existência de direito dos fenômenos da parapsicologia*”<sup>(27)</sup>.

Existem também os que, como Selleri, têm a expectativa de que um maior rigor no formalismo e nos dispositivos experimentais<sup>(28)</sup> possa quebrar as previsões estatísticas da teoria quântica.

Este rol não esgota a lista de alternativas, até porque a violação das desigualdades de Bell desqualificou fisicamente as teorias de variáveis escondidas locais. E todo o programa, em termos de variáveis escondidas, desenvolvido por Bohm desde 1952 tem como pressuposto a propriedade da não-localidade. Esta propriedade da não-localidade está presente no “potencial quântico” introduzido por este autor. Neste sentido as violações experimentais das desigualdades de Bell não desqualificam o programa de Bohm. Cabe registrar que Bell<sup>(29)</sup> depositava neste programa suas expectativas sobre o futuro da teoria quântica e também que o próprio Bohm só passou a valorizar esta propriedade, presente na sua teoria, a partir da década de 70.

Apresentada ao mundo científico em 1927, no 5º Conselho Solvay, a teoria quântica desencadeou um debate, que perdura até os nossos dias, que pode ser caracterizado como o principal debate científico e epistemológico da física do século XX. Na história deste debate ocupam lugar destacado J. S. Bell e suas inquietantes desigualdades<sup>(30)</sup>.

## VI. Notas e Referências Bibliográficas

1. Sobre a vida e a obra de Bell ver SHIMONY, A. John Stewart Bell: 1928-1990. *Foundations of Physics*, v. 21, n. 5, p. 509-512, 1991.

2. EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, v. 47, p. 777-780, 1935. Traduzido para o português em: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 2, p. 90-92, 1981.
3. Ver PAIS, A. Einstein and the quantum theory. **Review of Modern Physics**, v. 51, n. 4, p. 863-914, 1979.
4. Ver BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 166-179, 1952 e v. 85, n. 2, p. 180-193, 1952; BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964 e CLAUSER, J. F.; SHIMONY, A. Bell’s theorem: experimental tests and implications. **Rep. Prog. Phys.**, v. 41, p. 1882-1927, 1978.
5. É preciso registrar, contudo, que o próprio Einstein não dirigiu seu trabalho científico para o programa das “hidden variables”; sua expectativa era que uma equação do campo total (grande unificação) reproduzisse os mesmos resultados da teoria quântica. Ver PATY, M. The nature of Einstein’s objections to the Copenhagen interpretation of quantum mechanics. In: Israel Colloquium for the History, Philosophy and Sociology of Science. Tel-Aviv University, 1986 e PAIS, A., 1979 (ref. 3).
6. Sobre as posições einstenianas ver FREIRE Jr., O. **Estudo sobre interpretações (1927/1949) da teoria quântica: epistemologia e física**. 1991. Dissertação (mestrado) – USP.
7. EINSTEIN, A. Quantum-mechanics and reality. 1948. In: BORN, M. **The Born-Einstein letters**. Londres: Macmillan, 1971. p. 168-173.
8. CLAUSER, J. F.; SHIMONY, A. p. 1883. Ver ref. 4.
9. BOHM, D. **Quantum theory**. New York: Prentice Hall, 1951.
10. BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, v. 48, p. 696-702, 1935. Traduzido para o português em: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 2, p. 97-106, 1981.
11. BOHR, N. **Atomic theory and the description of nature** – four essays with an introductory survey. London: Cambridge University Press, 1961. p. 56-57.



12. SELLERI, F. **El debate de la teoria cuántica**. Madrid: Alianza Universidad, 1986. p. 58.
13. EINSTEIN, A. Reply to criticism. 1949. In: SCHILPP, P. A. **Albert Einstein: philosopher-scientist**. 4. ed. New York: Tudor, 1957. p. 665-688.
14. Ver FREIRE Jr., O. p. 55-80 (ref. 6) e FREIRE Jr., O. Ciência e filosofia na experiência socialista. **Princípios**, n. 21, p. 70-78, 1991.
15. Ver BOHM, D. (ref. 4); BOHM, D.; VIGIER, J. P. Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations. **Physical Review**, v. 96, n. 1, p. 208-216, 1954. Sobre a influência de Einstein e dos autores soviéticos no trabalho de Bohm ver JAMMER, M. David Bohm and his work – on the occasion of his seventieth birthday. **Foundations of Physics**, v. 18, n. 7, p. 691-699, 1988.
16. DE BROGLIE, L. La physique quantique restera-t-elle indéterministe? In: DE BROGLIE, L. **Nouvelles perspectives en micro-physique**. Paris: Albin Michel, 1956.
17. Ver ref. 5.
18. Ver ROSENFELD, L. **Selected papers of Léon Rosenfeld**. R. S. Cohen; J. J. Stachel, eds. Dordrecht: D. Reidel, 1979; HANSON, N. R. Copenhagen interpretation of quantum theory. **Am. J. Phys.**, v. 27, n. 1, p. 1-15, 1959, e HANSON, N. R. Five cautions for the Copenhagen interpretation critics. **Philosophy and Science**, v. 26, p. 325-337, 1959.
19. Ver BELL, J. S. (ref. 4).
20. Ele não considera, ao menos no artigo de 1964, uma outra saída (aquela sustentada por Bohr em 1935): a de considerar inerente ao fenômeno físico a especificação do adequado arranjo experimental. Numa clássica revisão do assunto, Clauser e Shimony (1978, p. 1883) afirmam que “...pode agora ser afirmado com razoável confiança que ou a tese do realismo ou aquela da localidade deve ser abandonada”. A força da posição bohriana pode ser medida pela insuspeita (porque crítica) dos referidos autores no já citado artigo: “*Está além do objetivo da presente revisão analisar a reivindicação de Bohr que o termo ‘realidade’ possa ser usado não ambigualmente em microfísica somente quando o arranjo experimental está especificado. Nós não estamos convencidos que Bohr tenha sempre obtido êxito em fazer uma exposição coerente de sua posição filosófica... Nós devemos admitir, contudo, em consideração à evidência experimental apresentada nesta revisão contra a conclusão EPR, que a posição de Bohr permanece*”

*como uma das poucas factíveis opções concernentes aos fundamentos da mecânica quântica”.*

21. Ver a revisão de CLAUSER e SHIMONY na ref. 4.

22. ASPECT, A.; et al. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankexperiment: a new violation of Bell's inequalities. **Physical Review Letters**, v. 49, p. 91-94, 1982.

23. PATY, M. The recent attempts to verify quantum mechanics. In: LEITE LOPES, J.; PATY, M. (eds.) **Quantum mechanics, a half century later**. Dordrecht-Holand: D. Reidel, 1977. p. 261-289; CLAUSER e SHIMONY – ref. 4.

24. BROWN, H. R. A estranha natureza da realidade quântica. **Ciência Hoje**, v. 2, n. 7, p. 24, 1983; BUNGE, M. Hidden variables, separability and realism. **Revista Brasileira de Física**, volume dedicado aos 70 anos de Mario Schenberg, p. 159-168, 1984 e PETRONI, N. C.; VIGIER, J. P. Random motions at the velocity of light and relativistic quantum mechanics, **J. Phys. A.; Math. Gen.**, v. 17, p. 599-608, 1984.

25. PATY, M. A inseparabilidade quântica em perspectiva, ou Popper, Einstein e o debate quântico atual. **Ciência e Filosofia**, n. 3, p. 55-72, 1986.

26. GIBBINS, P. **Particles and paradoxes**. New York: Cambridge University, 1987.

27. COSTA DE BEAUREGARD, O. O terceiro temporal do século XX: o paradoxo de Einstein (1927) ou de Einstein-Podolsky-Rosen (1935). **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, p. 43-58, 1982.

28. Ver SELLERI, 1986 (ref. 12) e mais recentemente SELLERI, F.; ZEILINGER, A. Local deterministic description of Einstein-Podolsky-Rosen experiments. **Foundations of Physics**, v. 18, n. 12, p. 1141-1158, 1988. É preciso registrar, contudo, que experimentos ainda mais precisos, usando interferências óticas de quarta ordem, têm sido realizados revelando novas violações das desigualdades de Bell e, portanto, confirmando as predições da mecânica quântica. Ver, por exemplo, OU, Z. Y.; ZOU, X. Y.; WANG, L. J.; MANDEL, L. Observation of nonlocal interference in separated photon channels. **Physical Review Letters**, v. 65, n. 3, p. 321-324, 1990.

29. Ver BELL, J. S. **Speakable and unspeakable in quantum mechanics**. Cambridge University, 1987. p. 171.

30. As desigualdades de Bell e seus testes experimentais já podem ser encontrados em livros textos como SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Addison Wesley, 1985. (Ver cap. 3, secção 3.9 – Spin correlation measurements and Bell's inequality). De uma gama variada de textos não técnicos, publicados na década de 80, tratando das desigualdades de Bell nós destacáremos: Le Monde Quantique, Paris, editions du Seuil, 1984; MERMIN, N. D. Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. **Physics Today**, p. 38-47, April 1985, e BROWN, H. R. A estranha natureza da realidade quântica. **Ciência Hoje**, v. 2, n. 7, p. 24, 1983.

## ANEXO 1

### Função de onda no experimento EPR-B

Bohm toma uma molécula, com dois átomos, de spin total nulo, tendo cada átomo spin  $\hbar/2$  e calcula a função de onda (F) do spin. A obtenção da função de onda total implicaria multiplicar a função de onda das coordenadas espaciais pela função de onda do spin.

Para chegar a esta função tomemos inicialmente um caso mais geral de duas partículas que interagem, mas sem a restrição do spin total nulo.

Usando as matrizes de Pauli  $C_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , o o-

perador componente de spin será obtido de  $S = \hbar/2 C$  e a função de onda será descrita

por  $u^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ou  $u^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  conforme o sinal do spin.

Temos inicialmente quatro possíveis combinações para a função de onda:

$$F_a = u^+(1) \cdot u^+(2),$$

$$F_b = u^+(1) \cdot u^-(2),$$

$$F_c = u^-(1) \cdot u^+(2) \text{ e}$$

$$F_d = u^-(1) \cdot u^-(2).$$

Verifica-se que todas as funções estão normalizadas e são ortogonais entre si.

Para que as funções de onda sejam autofunções do operador spin é necessário que elas sejam autofunções dos operadores:

$$S_i = \hbar/2 (C_{1i} + C_{2i}), \text{ onde } i = x, y, z \text{ e}$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2,$$

onde os índices 1 e 2 referem-se às partículas 1 e 2.

Verifica-se que as funções de onda são autofunções de  $S_i$ .

Verificar se as funções são autofunções de  $S^2$  implica verificar se elas são autofunções de  $S_1 S_2$ , pois  $S_i^2$  será matriz unitária.

$$(C_1 C_2) F_a = F_a$$

$$(C_1 C_2) F_b = 2F_c - F_b$$

$$(C_1 C_2) F_c = 2F_b - F_c$$

$$(C_1 C_2) F_d = F_d$$

Logo  $F_a$  e  $F_d$  são autofunções, e  $F_b$  e  $F_c$  não.

Procuramos então uma autofunção tipo  $bF_b + cF_c$ :

$$(C_1 C_2) (bF_b + cF_c) = T (bF_b + cF_c);$$

desenvolvendo os cálculos, obteremos  $T' = 1$  e  $T'' = -3$ :

$$T' = 1 \rightarrow b = c; T'' = -3 \rightarrow b = -c$$

$$F_1 = bF_b + bF_c \text{ e } F_2 = bF_b - bF_c,$$

normalizando obteremos  $b = 1/\sqrt{2}$ .

Então as autofunções de  $S_i$  e de  $S^2$  serão:

$$F_a, F_d, F_1 = 1/\sqrt{2} (F_b + F_c) \text{ e } F_2 = 1/\sqrt{2} (F_b - F_c).$$

Calculando os autovalores de  $S^2$  em relação às quatro autofunções obteremos:

Para  $F_a, F_d$  e  $F_1$ ,  $S^2 F = 2\hbar^2 F$  e para  $F_2$  o autovalor será zero.

As três autofunções correspondentes a um momento angular total diferente de zero são denominadas estados “triplets” e a autofunção correspondente ao spin nulo é denominada estado “singlet” e é a autofunção que procuramos para o experimento EPR-B, e pode ser escrita como:

$$F = 1/\sqrt{2} [u + (1) u - (2) - u - (1) u + (2)].$$

Na notação de Dirac teríamos:

$|1,2\rangle = 1/\sqrt{2} \{ |+,d,1\rangle |-,d,2\rangle - |-,d,1\rangle |+,d,2\rangle \}$ , onde  $d$  é uma direção arbitrária.

## ANEXO 2

### Desigualdades de Bell

Existem diversas formulações para as desigualdades de Bell. As mais fortes são as que se referem a sistemas reais, objetos de testes experimentais. Aqui faremos uma dedução mais simples, menos rigorosa, mas suficiente para evidenciar a discrepância entre as previsões da mecânica quântica e previsões de teorias que satisfaçam o critério EPR, com as grandezas já estando predeterminadas por uma mais completa especificação do estado quântico no sentido das variáveis escondidas. Bell denominou tais teorias de teorias com predeterminação separável. O cálculo seguinte, um pouco mais simplificado que aquele de Bell em 1964, segue a dedução feita por Clauser & Shimony em 1978 (ver nota 4).

Tomemos um único observável,  $A_a B_b$ , para o sistema de duas partículas que interagiram no experimento EPR-B (ver cálculo no Anexo 1). Este observável é composto pelo produto de componentes, em direções arbitrárias  $a$  e  $b$ , de spin das partículas 1 e 2. Se tomarmos unidades de spin como  $\hbar/2$  então  $A_a$  e  $B_b$  terão valores iguais a  $+1$  ou  $-1$ .

A predição da teoria quântica para o valor esperado deste observável será:

$$E(a,b) = \langle F | C_1 \cdot a C_2 \cdot b | F \rangle = -a \cdot b. \quad (1)$$

Um caso particular desta predição será aquele onde as direções  $a$  e  $b$  são paralelas, neste caso:

$$E(a,b) = -1. \quad (2)$$

Nós podemos então prever o valor de  $B_b$  por prévia medida de  $A_a$ . Admitamos agora que este valor já estava predeterminado, sem correlação com a medição de  $A_a$ . Como na teoria quântica o estado não predetermina, com absoluta certeza, os valores do spin de qualquer das duas partículas, então precisamos definir um novo estado capaz de uma especificação maior que aquela prevista pela teoria quântica. Denotamos este estado pelo símbolo  $r$ . Com isto estamos definindo um estado para o qual os observáveis da mecânica quântica têm sempre valor definido. Um estado deste tipo é parte então do que podemos chamar teoria determinística de variáveis escondidas. Determinística com referência aos observáveis que têm sempre valor definido. Deduções mais ela-

boradas podem retirar esta restrição para incluir as teorias estocásticas de variáveis escondidas.

Seja  $s$  o espaço dos estados  $r$  e  $t$  a função de distribuição, normalizada, dos estados  $r$  no espaço  $s$ . Então:

$$\int_s dt = 1. \quad (3)$$

Numa teoria deste tipo o observável  $AaBb(r)$  tem sempre um valor definido e predeterminado no estado  $r$ .

Bell define então um critério de **localidade** da seguinte forma: uma teoria determinística de variáveis escondidas é local se:

$$AaBb(r) = Aa(r) \cdot Bb(r). \quad (4)$$

Este critério é uma expressão particular da separabilidade postulada por Einstein em 1935, e explicitada enquanto tal em 1948, pois ele implica que uma medida de  $B$  em 2 depende exclusivamente da direção  $b$  e do estado  $r$ , não guardando correlação com a medida em 1, e vice-versa.

O valor esperado de  $AaBb$  nesta teoria será:

$$E(a, b) = \int_s Aa(r)Bb(r)dt. \quad (5)$$

Para a concordância parcial (eq. 2) com a teoria quântica é preciso que

$$Aa(r) = -Ba(r) \quad (6)$$

para qualquer  $r$ .

Usando a eq. 6 calculemos a seguinte função envolvendo três distintas direções  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$\begin{aligned} E(a, b) - E(a, c) &= - \int_s [Aa(r)Ab(r) - Aa(r)Ac(r)]dt = \\ &= - \int_s Aa(r)Ab(r)[1 - Ab(r)Ac(r)]dt. \end{aligned}$$

Com  $A, B = +1$  ou  $-1$  podemos escrever esta última expressão como:

$$|E(a, b) - E(a, c)| \leq \int_s [1 - Ab(r)Ac(r)]dt$$

e usando as equações 3, 5 e 6 temos:

$$|E(a, b) - E(a, c)| \leq 1 + E(b, c) \quad (7)$$

que é a desigualdade obtida por Bell em 1964.

Tomemos agora um caso particular com  $a$ ,  $b$  e  $c$  coplanares,  $a$  e  $c$  fazendo um ângulo de  $120^\circ$  e  $b$  fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com  $a$  e  $c$ . Então  $ab = bc = 1/2$  e  $ac = -1/2$ . Colocando estes valores na desigualdade (7) teremos:

$$1 \leq 1/2 .$$

As previsões da teoria quântica levam então a uma violação da desigualdade de Bell construída a partir de uma teoria determinística, de variáveis escondidas, que satisfaça o critério da localidade.