QUEM CHEGA COM VELOCIDADE MAIOR?[+*]

Francisco Catelli
Fernando Siqueira da Silva
Universidade de Caxias do Sul
Caxias do Sul – RS

Resumo

Apoiando uma das extremidades de uma haste no chão, e deixando-a cair, junto com uma esfera, colocada inicialmente a uma altura igual à extremidade livre da haste, quem chega com velocidade maior ao solo: a extremidade livre da haste ou a esfera? Neste trabalho são apresentadas diversas soluções, em níveis crescentes de complexidade. Conclui-se que questões como essa podem propiciar o desenvolvimento de atividades investigativas no ambiente da sala de aula e, eventualmente, despertar em alguns estudantes vocações para a carreira tecnológica.

Palavras-chave: *Movimento acelerado; queda livre; conservação de energia; investigações em sala de aula.*

Abstract

Place one end of a rod on the floor and drop it, along with a ball, originally placed at a height equal to the free end of the rod. Which one, if either, has the larger speed when it hits the ground: the free end of the rod or the ball? In this work are presented several solutions, in increasing levels of complexity. We conclude that such questions can help the development of investigative

---

[+] Which one gets the larger speed?

* *Recebido: março de 2008.*
Aceito: junho de 2008.

activities in the classroom environment, and eventually lead some students to technology careers.

Keywords: *Accelerated motion; free fall; energy conservation; research in the classroom.*

I. A questão

Uma haste, apoiada no solo por uma das extremidades, e uma esfera são liberadas em queda livre, como na Fig. 1. A extremidade livre da haste está à mesma altura da esfera, H, em relação ao solo. Qual a velocidade maior ao tocar o solo: a da esfera ou a da extremidade livre da haste?

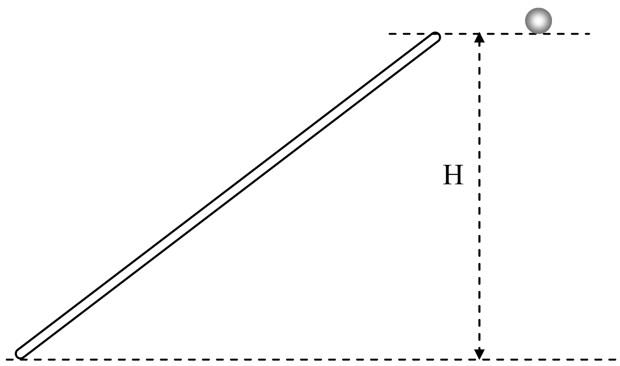

Fig. 1- Uma haste e uma esfera em queda "livre".

II. Resposta nível 1:

Após formulada a pergunta em aula, um aluno respondeu mais ou menos da seguinte forma. "Eu acho que é a esfera que chega mais rápido. Mas se o professor perguntou, então deve ser a ponta da haste!" De fato, a intuição (ou esperteza?) do aluno estava correta. A extremidade livre da haste chega ao solo com velocidade maior que a da esfera, e não é difícil "provar" essa afirmativa. Faremos isso a partir da conservação da energia mecânica.

Supondo a inexistência de atritos, o princípio da conservação da energia mecânica postula que a energia potencial do sistema Terra-corpo antes da queda deste de uma altura H em relação ao solo (nesse caso, a partir do repouso) é igual à energia cinética no momento em que o corpo toca o solo. Isso vale para a esfera:

trata-se de um problema resolvido em praticamente qualquer aula que envolva o princípio da conservação da energia mecânica. Vale também para a haste em queda, só que a solução é menos trivial. Cada ponto da haste está a uma altura h diferente em relação ao solo e as velocidades de chegada ao solo de cada um desses pontos também é diferente. O professor mais experiente pensaria logo em usar recursos do cálculo, momentos de inércia, essas coisas.

Mas é possível chegar a uma demonstração convincente apenas com a Matemática disponível no Ensino Médio. Para isso, vamos "simplificar" a haste, imaginando-a composta de uma vareta fina e sem massa, acrescida de duas esferas de massa M/2, uma na extremidade livre da vareta e a outra, no meio desta, como na Fig. 2. (Uma vez concluído o cálculo, veremos que a escolha de uma massa M/2 para cada uma das esferas é arbitrária. O resultado seria o mesmo se fosse escolhido qualquer outro valor.) A esfera isolada possui massa M. Talvez algum aluno "torça o nariz" a essa simplificação, na qual uma haste se transforma em duas esferas unidas por uma vareta sem massa, mas podemos prometer a ele que, depois, o cálculo poderá ser realizado sem ela.

Comecemos com a energia potencial da esfera, Epe:

$$\mathrm{Epe} = \mathrm{MgH} \tag{1}$$

A energia potencial da "haste", Eph (vareta com duas esferas, como na Figura 2), será:

$$\mathrm{Eph} = \frac{M}{2} g \frac{H}{2} + \frac{M}{2} gH = \frac{3}{4} MgH \tag{2}$$

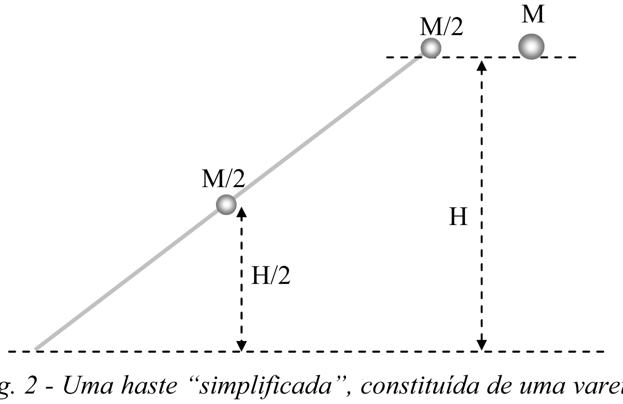

Fig. 2 - Uma haste "simplificada", constituída de uma vareta sem massa, munida de duas esferas de massa M/2, uma no meio e a outra na extremidade livre. Quem chega ao solo com velocidade maior: a esfera da extremidade livre da haste, ou a outra esfera solitária, de massa M, em queda livre?

Vamos agora ao cálculo das energias cinéticas: a da esfera, Ece, ao tocar o solo, vale:

$$Ece = \frac{1}{2} M v_e^2 \tag{3}$$

Para calcular a energia cinética da "haste", Ech, lembremos que, ao tocar o solo, a velocidade da esfera localizada no centro da vareta é a metade da velocidade da esfera da extremidade, que chamaremos de vh. Então,

$$Ech = \frac{1}{2}\frac{M}{2} v_h^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}\left(\frac{v_h}{2}\right)^2 .$$

Simplificando, ficamos com:

$$Ech = \frac{5}{16} M v_h^2 \tag{4}$$

Calculemos a velocidade da esfera v_e ao tocar o solo. Supondo desprezíveis as forças dissipativas, a energia potencial da esfera (equação 1) transforma-se integralmente em energia cinética (equação 3), o que leva ao resultado bastante conhecido[i]:

$$v_e = \sqrt{2gH} \tag{5}$$

A velocidade da esfera da extremidade livre da "haste", v_h, é calculada de forma similar, igualando a equação 2 (energia potencial da "haste") à equação 4 (energia cinética total da "haste"); após as simplificações, chegamos a:

$$v_h = \sqrt{\frac{12}{5} gH} \ . \tag{6}$$

Se dividirmos a equação 6 pela equação 5,

$$\frac{v_h}{v_e} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1 \tag{7}$$

veremos que v_h é cerca de 10% maior que v_e! A questão está respondida: a esfera da extremidade livre da "haste" chega ao solo com velocidade maior.

III. Resposta nível 2:

"Mas, esta história de vareta sem peso, eu não engoli muito, não!", poderia protestar um aluno. "Não dá para resolver para a haste de verdade?" Claro, o trabalho é um pouco maior, mas dá, sim. E sem usar cálculo diferencial e integral, nem a cinemática de rotações, predominantemente inacessíveis no nível do Ensino Médio.

O princípio desta nova demonstração é rigorosamente o mesmo. Dessa vez, nada de vareta sem peso. Imaginemos a haste composta de N esferas, tão perto uma da outra, que acabem por constituir o análogo de uma haste cilíndrica. Cada esfera possui massa M/N, e elas estão distribuídas de maneira uniforme, como na Fig. 3. Pronto! Agora é só calcular a energia potencial e a energia cinética de cada esfera. Parece que vai ser um trabalho e tanto. Mãos à obra!

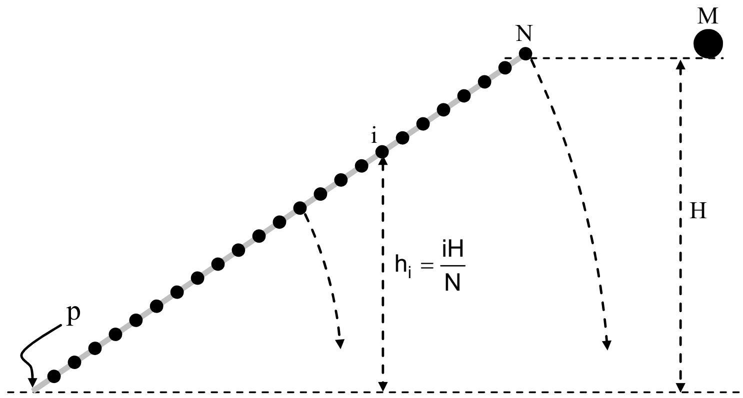

Fig. 3 - A "haste" é representada dessa vez por N esferas, cada uma de massa M/N. A i-ésima esfera está a uma altura h_i = iH/N do solo. Durante a queda, como das outras vezes, a extremidade esquerda da "haste" gira em torno do ponto p.

A solução "força bruta" seria a de supor, digamos, 10 esferas e calcular a energia potencial de cada uma, somando no final os resultados. Mas, não precisamos nos dar a este trabalho todo. Basta usarmos alguns "truques". A i-ésima esfera está a uma altura iH/N, onde H é a altura da última esfera. A soma ficaria, então, assim:

$$Eph = \frac{M}{N} g(1\frac{H}{N} + 2\frac{H}{N} + ... + i\frac{H}{N} + ... + N\frac{H}{N}) .$$

Rearranjando,

$$Eph = \frac{MgH}{N^2}(1 + 2 + ... + i + ... + N).$$

Veremos no apêndice 1 que a soma (1+2+...+i+...+N) é igual a $\frac{N(N+1)}{2}$. Então, podemos escrever que a energia potencial da haste constituída de N esferas é:

$$Eph = \frac{MgH}{2}\frac{(N+1)}{N}. \tag{8-a}$$

Mas, quanto maior for N, tanto mais ele fica próximo de (N+1); para N tendendo a infinito, $(N+1)/N \rightarrow 1$, e a energia potencial da haste tenderá a

$$Eph \rightarrow \frac{1}{2}MgH \tag{8-b}$$

Este resultado é muito bonito: a energia potencial da haste da Fig. 3 é a mesma que ela teria se todas as N esferas que a compõem, cada uma de massa M/N, estivessem a uma altura H/2 do solo. Faz sentido!

Vamos agora ao cálculo da energia cinética da haste. Lembremos: como todas as esferas que constituem a haste tocam o solo no mesmo instante, suas velocidades serão proporcionais à altura que elas se encontram no início da queda. Por exemplo, como vimos anteriormente, a esfera que se encontra na metade da haste chegará ao solo com uma velocidade que é a metade da velocidade da esfera mais alta. A soma das energias cinéticas das N esferas será então:

$$Ech = \frac{1}{2}\frac{M}{N}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + ... + v_i^2 + ... + v_N^2).$$

Em geral, podemos dizer que as velocidades crescem como as alturas:

$$v_1 = \frac{v_N}{N}, v_2 = 2\frac{v_N}{N}, v_3 = 3\frac{v_N}{N}, ..., v_N = N\frac{v_N}{N},$$

onde v_N é a velocidade da N-ésima esfera, a mais alta. Então,

$$Ech = \frac{1}{2}\frac{M}{N}\left\{(\frac{v_N}{N})^2 + (2\frac{v_N}{N})^2 + (3\frac{v_N}{N})^2 + ... + (i\frac{v_N}{N})^2 + ... + (N\frac{v_N}{N})^2\right\}$$

Simplificando, chegamos a:

$$Ech = \frac{1}{2}\frac{Mv_N^2}{N^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + N^2).$$

No apêndice 2 mostraremos que a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + N^2$ tende para $N^3/3$, quando N tende a infinito. A expressão acima (que, lembremos, corresponde à energia cinética da haste ao tocar o solo) fica então igual a:

$$Ech = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}Mv_N^2) . \quad (9)$$

Exatamente como fizemos na solução simplificada, basta então igualar as equações 8-b e 9, colocando v_N em evidência:

$$v_N = \sqrt{3gH} . \quad (10)$$

Comparemos v_N (equação 10) com v_e (equação 5):

$$\frac{v_N}{v_e} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22 . \quad (11)$$

IV. Conclusão

A extremidade livre da haste tem velocidade em torno de 22% maior que a da esfera em queda livre! O resultado anterior, obtido com o modelo simplificado de apenas duas massas, também estava correto, ou seja, a esfera mais alta sempre toca o solo com velocidade maior que a da esfera em queda livre.

V. Perguntas derivadas

Várias perguntas certamente derivarão do acima exposto. A primeira delas poderia ser a seguinte:

É possível um objeto (ou parte dele) cair com velocidade maior que a de uma esfera em queda livre? A resposta é: sim. E este não é um caso isolado. A extremidade superior de uma mola, esticada sob a ação do próprio peso, quando solta em queda livre, também apresenta o mesmo comportamento[ii].

Uma segunda pergunta também é praticamente inevitável:

Já que a velocidade da extremidade superior da haste é maior que a da esfera em queda livre, a haste chega antes da esfera ao solo?

A resposta, neste caso, é bastante intrigante: sim e não. Depende do ângulo inicial a partir do qual a haste inicia seu movimento. A solução analítica desse problema é bastante difícil e, dessa vez – infelizmente – fora do alcance dos recursos disponíveis na Matemática e na Física do nível médio[iii]. Mas, não percamos a esperança: dá para avançar bastante, mesmo assim. Podemos "resolver" o impasse utilizando a experimentação. Vamos sugerir, então, uma pequena investigação.

Experimento 1

Use uma esfera feita de massa de modelar, e coloque-a sobre a extremidade superior de uma haste. Deixe a haste e a esfera caírem simultaneamente, a partir do repouso, de um ângulo inicial de aproximadamente 30° com a horizontal. Prenda também um pequeno recipiente (uma tampa de reservatório plástico serve) a uma distância de aproximadamente 0,87 vezes o comprimento da haste. No nosso protótipo, de 1 m de comprimento, várias pontas agudas de pregos foram colocadas no fundo do recipiente, de modo a prender a esfera de massa de modelar, caso ela caia dentro dele (veja a Fig. 4).

Então, que conclusões[iv] dá para tirar desse experimento? (Se você preferir ver o vídeo do experimento, acesse o endereço na referência IV).

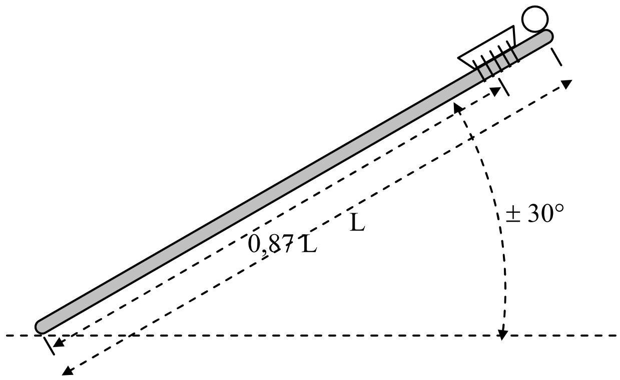

Fig. 4 - Sugestão de aparato experimental para descobrir experimentalmente quem chega antes ao solo: a extremidade da haste ou a esfera de massa de modelar. Note que a haste inicia sua queda formando um ângulo de cerca de 30° com a horizontal.

Experimento 2

Segure a haste (de modo a que faça um ângulo inicial próximo de 90° em relação ao solo) numa das mãos e a esfera na outra; libere ambas ao mesmo tempo. A simples observação visual é plenamente convincente. Dessa vez, a esfera chega antes ao solo, sem a menor dúvida.

Os dois experimentos acima sugerem que a velocidade da esfera é menor que a da extremidade da haste no primeiro caso, e maior no segundo? Dessa vez, a resposta é: não. A extremidade da haste <u>sempre</u> chega ao solo com velocidade maior que a da esfera, independentemente do ângulo da haste com a horizontal, mas não necessariamente chega antes. Não é difícil entender esses resultados. No segundo experimento, por exemplo, a aceleração do centro de massa da haste é, no início, muito pequena, o que faz com que o aumento da velocidade se dê lentamente. A esfera, liberada simultaneamente, ganha um grande avanço em relação à extremidade da haste, no início da queda. Após, a extremidade livre da haste apresentará velocidades cada vez maiores, superando mesmo a velocidade da esfera ao tocar o solo, mas perderá inevitavelmente a "corrida". Esse efeito pode ser percebido visualmente. Se desejado, basta filmar com uma câmara digital a queda simultânea da haste e da esfera, visualizando as imagens quadro a quadro. Praticamente todos os programas para a reprodução de vídeos possuem esse recurso[v].

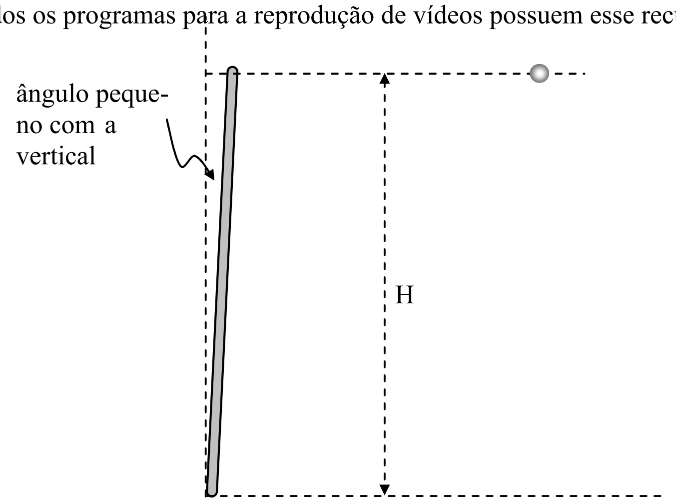

Fig. 5 - Mesmo aparato da Fig. 4, com a diferença que, dessa vez, o ângulo inicial da haste com a vertical é próximo de zero. É muito fácil perceber visualmente quem toca antes o solo.

Quando a haste inicia a queda a partir de ângulos não muito grandes em relação à horizontal, a aceleração inicial do centro de massa da haste já é significativa. Não é difícil mostrar isso através de cálculos; percebemos que a extremidade da haste, já no início da queda, apresenta acelerações maiores que a da gravidade. E, nesses casos, ela "ganha a corrida".

VII. Dividendos didáticos

Um "bom" problema é o que, entre outras virtudes, permite graus crescentes de dificuldade. Tais problemas têm o dom de não nos fazerem desistir logo no início. No caso deste trabalho, esse requisito parece ser cumprido. A solução de "nível 1" é acessível a qualquer pessoa que disponha de um nível básico de Física e de Matemática. O segundo nível, apesar de também não pressupor conhecimentos preliminares avançados, nem de Matemática nem de Física, é de fato mais desafiador. Trabalhar o nível 2 em sala de aula exigirá mais tempo; outras atividades deverão ser deixadas de lado. É uma questão de opção.

Um segundo dividendo didático viria dos conceitos fundamentais da Física que afloram ao longo da elaboração da resposta à pergunta. São diversos, e muito importantes. Mencionaremos dois: o conceito de aceleração como variação da velocidade no tempo (crucial para a "conquista" de boas respostas) e o conceito de conservação da energia mecânica.

O terceiro dividendo didático está ligado a um critério nem sempre muito lembrado nas aulas de Física: o da elegância. Referimo-nos à elegância de raciocínios encadeados, nos quais a lógica da solução transparece sem grande dificuldade. Há o que chamaríamos de um "enredo", ou "história", os quais levam a soluções para nossas perguntas. Nas ocasiões em que este trabalho (ou parte dele) foi explorado em aula, esse critério de "elegância" foi destacado e provocou – nos pareceu – reações positivas nos estudantes.

O quarto dividendo didático diz respeito à relação Matemática-Física. Há bastante confusão a este respeito. Os estudantes, quando indagados sobre a dificuldade eventual que encontram na solução de um determinado problema, freqüentemente associam-na à Matemática envolvida. A "Matemática", assim como é percebida por boa parte dos estudantes, parece que se esgota nas fórmulas envolvidas, e nas suas manifestações numéricas. Perde a Matemática; perde a Física. Pensamos que se trata muito mais do que imaginar que a Matemática apenas fornece as "ferramentas" para que os físicos façam cálculos.

Como seria, então, uma relação Física-Matemática frutífera? Lancemos mão do conhecido "princípio da autoridade": com a palavra, no âmbito da Física, Lorde Kelvin: "*A Física é a ciência não das coisas, mas das medidas*"[vi]. Interpretando: não são os objetos físicos que importam, mas sim as relações que eles guardam entre si. Mas, qual é então a ligação com a Matemática? Com a palavra, nossa segunda autoridade, o matemático Henri Lebesgue: "*Não existe assunto mais fundamental: a medida é o ponto de partida de todas as aplicações matemáticas.*"[vii] Eis então uma possível ligação: tanto a Matemática quanto a Física tratam de relações (medidas). Os "objetos" de ambas diferem, é certo. Mas, para ambas, são as relações (insistimos) que importam, e não os objetos.

Um quinto possível dividendo didático está associado ao que chamaríamos de "o irresistível charme da investigação". Por que não "correr atrás" de algumas respostas? Nessa "corrida", vale teorizar, procurar na internet, montar e executar experimentos de laboratório e perguntar a outros profissionais (engenheiros, por exemplo). Definiríamos aqui (de maneira bastante livre) "investigação" como sendo toda e qualquer atividade autônoma do estudante que o leve a avançar na solução de um dado problema. Sabemos que as respostas que o estudante conquista por ele mesmo valem muito mais.

O que é melhor: montar um experimento no laboratório ou buscar simulações na internet? Talvez este seja mais um dividendo didático deste trabalho: se existir a opção de uso de recursos "antigos" (laboratório didático, por exemplo) e recursos "modernos" (computador e internet, por exemplo), o nosso conselho seria: use ambos! Até porque essa separação entre antigo e novo é – convenhamos – bastante artificial.

Um sétimo dividendo didático: são o que chamaríamos de "problemas abertos". Definimos aqui "problema aberto" aquele que não se esgota numa única (e em geral breve) resposta. "Ensinemos" isso aos alunos. Nunca tomemos uma resposta como sendo a única, última, definitiva. A cultura de avaliações estritas ("provas") talvez tenha provocado nos estudantes este mal-entendido de que um problema sempre tem que ter apenas uma resposta final, e ponto. Todos perdemos muito quando deixamos de explorar um pouco mais as questões que se nos apresentam. Uma das vantagens da abertura mencionada acima é a possibilidade de transpor para o "mundo real" uma parte do trabalho envolvido na resolução de problemas: esse seria um último dividendo didático que gostaríamos de destacar. Aspectos do movimento da barra aqui descritos poderiam servir de inspiração para a análise preliminar de movimentos de raquetes de tênis, ou – por que não? – do braço e da mão de um atacante de vôlei ao desferir uma "cortada", ou a perna e o pé de um batedor de falta no futebol. Esse movimento “haste com pivô”, presente em praticamente todos os esportes, é também extremamente comum na Engenharia, no desenho e estudo de máquinas. Apesar de não ser o objetivo aqui, a análise da queda de uma barra pode despertar vocações para a Engenharia Mecânica, ou mesmo a Engenharia Civil. As velocidades de partes de corpos extensos, que excedem as provocadas pela gravidade em corpos pequenos, talvez sejam suficientemente provocativas para despertar essas vocações em alguns de nossos alunos. Este é inegavelmente um dos papéis da escola de Ensino Médio: despertar vocações[viii]. Em suma: quando motivados, os próprios estudantes saberão encontrar as mais variadas, insólitas e inverossímeis aplicações para os problemas que eles se dispõem a investigar.

Apêndice 1

Somando 1 + 2 + 3 + ... + N

Marcus du Sautoy, em seu belo livro[ix] “A música dos números primos”, relata que o jovem Gauss teria resolvido o problema de somar todos os números inteiros de 1 a 100 imaginando objetos dispostos em colunas, um objeto na primeira (da esquerda para a direita), dois na segunda, e assim sucessivamente, como os cubos da Fig. 6.

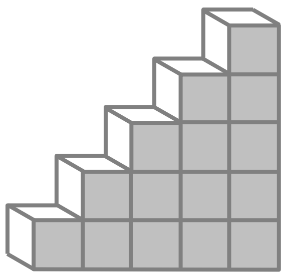

Fig. 6 - Quantos cubos há nesta figura? Podemos contá-los, mas há uma maneira mais fácil (e geral!) de conhecer o resultado.

Gauss imaginou, sobreposto ao “triângulo” da Fig. 6, um segundo, idêntico ao primeiro e invertido, como o formado pelos cubos brancos na Fig. 7. Assim, o número total de cubos pode ser obtido tomando a metade do produto do número de cubos da base do retângulo da Fig. 7 multiplicado pelo número de cubos da altura deste. A Fig. 6 terá então:

$$1+2+3+4+5=\frac{(5+1)\times 5}{2}=15\ \text{cubos.}$$

Em geral,

$$1+2+3+...+N=\frac{N(N+1)}{2}.$$

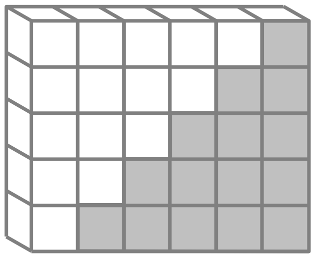

Fig. 7 - Neste "retângulo" há (N+1)× N cubos, ou (5+1) × 5 = 30 cubos. O número de cubos escuros é a metade desse valor.

Finalmente, quanto maior for o número N, mais os termos "N" e "N+1" se parecerão, e o resultado da soma acima tenderá ao valor $\frac{N^2}{2}$, como referido no texto (equações 8-a e 8-b).

Apêndice 2

Somando 1² + 2² + 3² + ... + N²

Tentemos seguir o mesmo tipo de raciocínio desenvolvido no apêndice 1. O termo 1^2 nos leva a pensar – obviamente – em um cubo, o termo 2^2 poderia nos levar a pensar em um "quadrado", constituído de 2×2 cubos, o termo 3^2, outro "quadrado" formado por 3×3 cubos, e assim sucessivamente. Vamos "empilhar" esses "quadrados" todos, de modo a formar um sólido que lembra uma pirâmide, como na Fig. 8.

Agora, pensemos numa pirâmide constituída de um número muito grande de cubos (idealmente, tendendo a infinito). Ao olhar a pirâmide por inteiro, seus cubos se tornarão menores, a tal ponto que nem seremos mais capazes de ver seus "degraus". Qual o número total de cubos dessa pirâmide? Curiosamente, é mais fácil responder a essa pergunta do que "contar" o número de cubos da Fig. 8. Vejamos: o quadrado que constitui a "base" da pirâmide de infinitos cubos tem N×N cubos, e a altura dessa mesma pirâmide equivale à altura de N cubos.

Sabemos da Matemática que o volume de uma pirâmide é igual a um terço da área da base (N×N, no nosso caso) multiplicada pela sua altura (N); como seu volume pode ser expresso pelo número total de cubos que a constituem, podemos escrever:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + N^2 \rightarrow \frac{1}{3}(N \times N) \times N = \frac{N^3}{3} .$$

Note que esse resultado (utilizado na equação 9) só vale para um número grande de cubos. Simples, não?

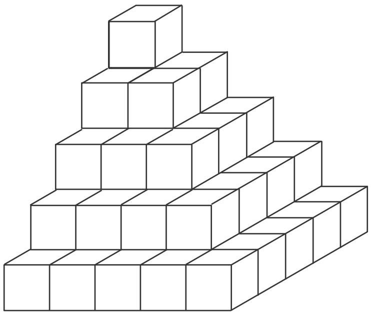

Fig. 8 - A "pirâmide" da figura possui base quadrada, formada por 5×5 cubos, e uma altura equivalente a 5 cubos.

Agradecimentos

À Universidade de Caxias do Sul, ao CNPq e à FINEP pelo apoio às atividades de divulgação científica propostas por nosso grupo de trabalho.

---

[i] Ver, por exemplo, Máximo, A. e Beatriz Alvarenga, **Curso de Física**, volume 1, p. 293, exemplo 2. São Paulo: Scipione, 2006.

[ii] Molas podem cair com acelerações maiores que g: ver, por exemplo, Silveira, F. L e Axt, R., "Podem molas em queda livre ter aceleração maior que a da gravidade?" **A Física na Escola**, São Paulo, v. 6, n. 2, out. 2005, p. 5-7. O mesmo pode ocorrer com uma barra arti-

culada, como a deste trabalho: Young, W. M. “Faster than gravity!”, **American Journal of Physics**, v. 52, dez. 1984, p. 1142-1143.

[iii] A derivação detalhada deste problema pode ser acompanhada em Theron, W. F. D. “The ‘faster than g” demonstration revisited. **American Journal of Physics**, v. 56, ago. 1988, p. 736-739. Neste artigo, Theron estende a análise de Young (referência 2) para grandes ângulos, o que só pode ser feito mediante a um aumento significativo da complexidade dos cálculos.

[iv] Além da referência 3, ver também Aguirregabiria, J. M., A. Hernandez e M. Rivas, “Falling Elastic Bars and springs”. **American Journal of Physics**, v. 75, jul. 2007, p. 583-587. No final do artigo é feita uma referência ao problema tratado neste trabalho; um vídeo pode ser acessado no endereço tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/solidoa/fasterg.html. Foi desse vídeo que retiramos parte da idéia do experimento 1, por nós sugerido.

[v] Gil, S., Reisin, H. D., Rodriguez, E. E. “Using a digital camera as a measuring device”. **American Journal of Physics**, v. 74, set. 2006, p. 768-755.

[vi] Lorde Kelvin, citado por Gaston Bachelard, **Essai sur la connaissance aprochée**. Paris: Vrin, 5. ed. 1981, p. 55.

[vii] Henri Lebesgue, também citado por Gaston Bachelard, **Essai sur la connaissance aprochée**. Paris: Vrin, 5. ed. 1981, p. 55.

[viii] Programas como o “Ciência de Todos” e “Engenheiro do Futuro”, patrocinados pela FINEP, têm como um dos principais objetivos justamente a divulgação da Ciência e o despertar de vocações dos jovens estudantes para as carreiras da área científica e tecnológica.

[ix] Sautoy, Marcus du. **A música dos números primos. A história de um problema não resolvido na Matemática.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editores, 2007. A “estratégia” descrita na nota 1 para efetuar a soma dos números inteiros de 1 a N foi empregada por um dos autores para estimar o comprimento da trilha de um CD e, por extensão, o tamanho de um bit de informação (Catelli, F. “Pense e responda! Qual o tamanho de um bit?”. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 23, n. 2, p. 247-255, ago. 2006).