NOTAS SOBRE ALGUMAS ESTATÍSTICAS UTILIZADAS NA SÍNTESE DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Fernando Lang da Silveira
Instituto de Física - UFRGS
Instituto de Física e
Pós -Graduação em Educação- PUCRS
Porto Alegre-RS

I. Introdução

Atividades experimentais comumente envolvem a coleta de um conjunto mais ou menos extenso de dados ou observações que posteriormente serão sintetizados em alguns poucos resultados. Por exemplo, a Tabela 1 contém 396 medidas do tempo de queda de uma pequena esfera de uma altura de aproximadamente 100 centímetros. Os tempos de queda foram medidos utilizando-se um cronômetro com precisão de 1/1000 s, acionado manualmente; os milésimos de segundo foram desprezados, retendo-se nos tempos medidos os centésimos de segundo ou centisegundos (cs). O experimento foi conduzido da seguinte forma: na beira de uma mesa havia uma calha que se elevava alguns centímetros sobre a mesa; uma pequena esfera era abandonada na calha e quando atingia o final da mesma, iniciando a queda até o assoalho, o cronômetro era disparado. Quando a esfera atingia o assoalho, 100 centímetros abaixo, o cronômetro era travado.

Esse procedimento determina uma grande variabilidade nos tempos medidos conforme se observa na Tabela 1 (menor tempo medido: 34 cs; maior tempo medido: 60 cs). A grande variabilidade decorre certamente dos tempos de reação do experimentador, presentes duas vezes em cada valor medido; o tempo de reação do experimentador retarda o acionamento do cronômetro no início e no final da queda.

Tabela 1 - Valores medidos para o tempo de queda (f – freqüência observada)

t(cs)	f	t(cs)	f	t(cs)	f
34	2	43	21	52	16
35	1	44	38	53	7
36	1	45	32	54	5
37	7	46	38	55	2
38	10	47	27	56	2
39	27	48	31	57	1
40	21	49	21	58	3
41	25	50	8	59	0
42	33	51	15	60	2

A discussão que se segue tem como objetivos elucidar o significado de algumas estatísticas utilizadas na síntese de um conjunto de observações (média dos valores medidos, desvio padrão dos valores medidos e desvio padrão da média dos valores medidos) e, principalmente, decidir sobre a imprecisão ou erro presente na média dos valores medidos. Apresenta-se também um método abreviado para estimar o desvio padrão dos valores medidos.

II. A média e o desvio padrão dos valores medidos

Representar-se-á por X os resultados de medidas de uma grandeza qualquer. Na situação concreta da Tabela 1 a grandeza medida é o tempo de queda da esfera, ali representado por t. As expressões que envolverem X valem para quaisquer grandezas; essas expressões genéricas serão particularizadas muitas vezes ao longo do texto para os valores medidos do tempo de queda da esfera.-

A média aritmética dos valores medidos (x) é definida abaixo.

$$\vec{x} = \frac{\sum f_j \, x_j}{n} \qquad (1)$$

onde:

x_j - j- ésimo valor medido de x,

f_j – freqüência do j- ésimo valor medido,

n – número de medidas.

A média aritmética é uma medida de tendência da distribuição dos valores medidos. Supondo-se que cada um dos valores medidos é o resultado da adição de um erro aleatório ao verdadeiro valor de uma grandeza e que esse erro se distribui simetricamente em torno do valor verdadeiro, então a média dos valores medidos é uma estimativa do valor verdadeiro. Desta forma a média dos valores medidos é uma estimativa do valor verdadeiro se erros sistemáticos não estiverem presentes; caso contrário a média dos valores medidos estima a soma dá valor verdadeiro com o erro sistemático. Note-se que o valor verdadeiro de uma grandeza é um ente teórico, um construto, inobservável mas estimável empiricamente através dos valores medidos.

Para os dados da Tabela 1 obtém-se:

$$\sum f_j \, t_j = (2\,.34) + (1\,.35) + \ldots + (0\,.\,59) + (2\,.\,60) = 17842 cs$$

Portanto a média dos valores medidos é:

$$\vec{t} = \frac{17842}{396} \cong 45{,}056 cs$$

Mais adiante discutir-se-á sobre o número de algarismos significativos presentes na média. Neste momento ela é calculada com diversos algarismos.

O desvio padrão dos valores medidos é dado por:

$$\widehat{S}_x = \sqrt{\Sigma\, f_j\, (x_j - x)^{-2} \,/\, (n-1)}, \qquad (2)$$

onde:

$(x_j - \vec{x})$ - desvio do j-ésimo valor medido de x em relação à média dos valores medidos.

Alternativamente o desvio padrão dos valores medidos pode ser calculado por:

$$\widehat{S}_x = \sqrt{(\Sigma\, f_j^2 x_j - nx^{-2}) \,/\, (n-1)} \qquad (3)$$

A equação 3 permite calcular o desvio padrão sem necessidade do cálculo dos desvios em relação à média, diretamente com os valores medidos; ela é utilizada comumente nas calculadoras eletrônicas.

Para os dados da Tabela 1 obtém-se:

$$\Sigma\, f_j\, t_j^2 = (2\,.\,34^2) + (1\,.\,35^2) + \ldots + (0\,.\,59^2) + (2\,.\,60^2) = 81238\, cs^2$$

O desvio padrão dos tempos medidos calculado pela equação 3 é:

$$\widehat{S}_t = \sqrt{(812238 - (396\,.\,45{,}056^2))/(396-1)}$$

$$\widehat{S} \cong 4{,}595\, cs$$

O desvio padrão dos valores medidos é uma medida de dispersão dos valores medidos em torno da média. Se os valores medidos tiverem distribuição normal ou de Gauss então o intervalo compreendido pela média menos um desvio padrão e a média mais um desvio padrão contém aproximadamente 68% dos valores medidos. Se o intervalo compreender dois desvios padrão em torno da média, contém aproximadamente 95% dos valores medidos. Se o intervalo compreender três desvios padrão em torno da média, contém aproximadamente 99,7% dos valores medidos, ou seja, praticamente todos os valores medidos. Para outros intervalos, as respectivas proporções podem ser encontradas em Spiegel (1979).

A desigualdade de Tchebychef (Ventsel, 1973) afirma que, para <u>qualquer</u> distribuição dos valores medidos, o penúltimo e o último intervalo referido acima (dois e três desvios padrão em torno da média) contêm respectivamente no <u>mínimo</u> 75% e 89% dos valores medidos.

Para os dados da Tabela 1, verifica-se que no intervalo (45,056± 4,595) cs estão contidos aproximadamente 74% dos valores medidos; no intervalo (45,056 ± 2 x 4,595) cs estão contidos aproximadamente 95% dos valores medidos e no intervalo (45,056 ± 3 x 4,595) cs estão contidos aproximadamente 99,5% dos valores medidos. Como estas proporções são semelhantes às da distribuição normal ou de Gauss, conclui-se que os dados da Tabela 1 possuem distribuição aproximadamente normal ou gaussiana.

Supondo-se que cada valor medido é o resultado da adição de um erro aleatório ao valor verdadeiro, então o desvio padrão dos valores medidos é uma estimativa do erro, ou mais precisamente, uma estimativa do desvio padrão de erro. Caso haja erro sistemático, o desvio padrão dos valores medidos estimará o erro aleatório apenas; a adição de uma constante (erro sistemático) a uma variável (valor verdadeiro mais erro aleatório) não altera o desvio padrão desta variável.

O desvio padrão dos tempos medidos da Tabela 1, aproximadamente 5 cs, estima o desvio padrão de erro devido aos tempos de reação do experimentador pois, supostamente, estes são as maiores e preponderantes fontes de erro. Em situações onde o erro é devido a muitas fontes diferentes, o desvio padrão dos valores medidos estimará o erro total.

Outro significado possível para o desvio padrão dos valores medidos é que ele estima o erro em um único valor medido. Um único valor medido do tempo de queda está sujeito a um erro de aproximadamente 5 cs, ou mais precisamente o intervalo compreendido por um único valor medido mais ou menos um desvio padrão tem a probabilidade de aproximadamente 68% de conter o valor verdadeiro. Três desvios padrão em torno de um único valor medido determina um intervalo que muito certamente contém o valor verdadeiro (probabilidade de aproximadamente 99,7% para a distribuição de Gauss ou no mínimo de 89% para uma distribuição qualquer).

Note-se agora que a imprecisão nominal ou erro nominal de cada valor medido da Tabela 1 é 1 cs; o erro real de cada valor medido, caso não haja erro sistemático, é aproximadamente 5 cs. Apesar do cronômetro medir intervalos com imprecisão de 1 cs, o acionamento manual do cronômetro introduz erro devido ao tempo de reação do experimentador e amplia a imprecisão.

Uma lição importante que se pode tirar deste exemplo é que o erro nominal e o erro real de uma medida podem ser diferentes; comumente o último é maior do que o primeiro. O valor real do erro de um único valor medido é estimável empiricamente através do desvio padrão dos valores medidos.

III. O desvio padrão da média dos valores medidos

O que aconteceria se, ao invés de se ter apenas um conjunto de n valores medidos, se tivesse diversos conjuntos de n valores medidos e em cada um fosse calculada a média?

Obter-se-iam diversos valores para a média, distribuídos em torno do valor verdadeiro caso não haja erro sistemático. O teorema do limite central (Larson, 1978) permite afirmar que a distribuição das médias é aproximadamente normal ou gaussiana independentemente da distribuição dos valores medidos; a aproximação é tanto melhor quanto maior for n.

Adicionalmente pode-se demonstrar que as médias se distribuem com um desvio padrão (desvio padrão da média ou $S_{\bar{x}}$) estimável por:

$$S_{\bar{x}} \cong \widehat{S}_x / \sqrt{n} \tag{4}$$

A expressão 4 mostra que não se necessita calcular a média em diversos conjuntos de n medidas para se estimar o desvio padrão da média. Basta que se tenha um único conjunto de n medidas.

$$S_{\bar{t}} \cong 4{,}595 / \sqrt{396} \cong 0{,}231\, cs$$

O desvio padrão da média estima o erro que se tem na média de um conjunto de n valores medidos em relação ao valor verdadeiro, caso não haja erro sistemático. Pode-se agora afirmar que o valor verdadeiro do tempo de queda tem a probabilidade de aproximadamente 68% de estar contido no intervalo determinado pela média menos um desvio padrão da média até a média mais um desvio padrão da média. Se o intervalo for construído com dois desvios padrão da média em torno da média, a probabilidade de conter o valor verdadeiro é aproximadamente 95%. Se o intervalo for construído com três desvios padrão da média em torno da média, a probabilidade de conter o valor verdadeiro é quase 100% (aproximadamente 99,7%). Esses intervalos são denominados intervalos de confiança (IC) para o valor verdadeiro da grandeza e é conveniente escrevê-los da seguinte forma:

$$IC(\, x_{verd}\,; 68\%) \cong \vec{x} \pm 1\, S_{\bar{x}}\,, \tag{5}$$

$$IC(x_{verd};95\%) \cong \vec{x} \pm 3\, S_{\bar{x}}\,, \tag{6}$$

$$IC(x_{verd};99{,}7\%) \cong \vec{x} \pm 3\, S_{\bar{x}} \tag{7}$$

Os lados esquerdos das expressões 5, 6 e 7 são lidos como se segue: intervalo de confiança para o valor verdadeiro de x no nível de confiança (com a probabilidade) de 68% ou 95% ou 99,7%.

As probabilidades referidas em 5, 6 e 7, obtidas da distribuição de Gauss, valem aproximadamente para a distribuição das médias mesmo quando os valores medidos não se distribuem normalmente; tal é decorrência do teorema do limite central já referido.

Calculando-se o primeiro e o terceiro destes intervalos para os dados da Tabela 1 obtém-se:

$$IC(t_{verd};68\%) \cong (45{,}056 \pm 0{,}231)\, cs\,, \tag{8}$$

$$IC(t_{verd};99{,}7\%) \cong (45{,}056 \pm 3\, x\, 0{,}231)\, cs \tag{9}$$

É usual expressar o desvio padrão da média (ou três vezes o desvio padrão da média) com apenas um algarismo significativo. Portanto os intervalos anteriores ficariam sendo:

$$IC(t_{verd}; 68\%) \cong (45{,}1 \pm 0{,}2)\ cs\ , \tag{10}$$

$$IC(t_{verd}; 99{,}7\%) \cong (45{,}1 \pm 0{,}7)\ cs\ . \tag{11}$$

Pode-se demonstrar que com mais de vinte valores medidos, tanto o desvio padrão dos valores medidos quanto o desvio padrão da média já podem ser expressos com dois algarismos significativos. Entretanto, por simplicidade, adotar-se-á a regra anterior de expressar a parte que é somada e subtraída à média com apenas um algarismo significativo.

Note-se que a imprecisão da média ou erro da média (estimado pelo desvio padrão da média ou mesmo por três desvios padrão da média) é inferior à imprecisão nominal ou erro nominal dos valores medidos (0,2 cs < 1 cs) e muito menor do que o erro real (0,2 cs «5 cs). Como isto é possível?

De acordo com a expressão 4 o desvio padrão da média é inversamente proporcional à raiz quadrada do número de medidas; como o número de medidas é grande, 396, o erro da média será muito menor do que o erro de uma medida (estimado pelo desvio padrão dos valores medidos). Note-se também-se que a redução de uma ordem de grandeza no desvio padrão da média implica em se ter cem vezes mais medidas. Em termos práticos pode ser extremamente trabalhoso diminuir o desvio padrão da média por uma ordem de grandeza. Caso se desejasse medir o tempo de queda com erro de 0,02 cs seriam necessárias 396 x 100 ou 39600 medidas. Outro aspecto que merece ser levado em consideração é que além dos erros aleatórios sempre há a possibilidade dos valores medidos estarem, sujeitos a erro sistemático. Este último não é afetado pelo número de medidas pois o desvio padrão de uma variável não se altera quando a ela é adicionada uma constante.

Caso haja erro sistemático os intervalos de confiança dados pelas expressões 5, 6 e 7 conterão a soma do valor verdadeiro com o erro sistemático. Desta forma, para um grande número de medidas, o intervalo de confiança é suficientemente estreito para não conter mais o valor verdadeiro mesmo que o erro sistemático seja pequeno.

O valor verdadeiro também pode ser estimado com erro menor se for diminuído o numerador da expressão 4, o desvio padrão dos valores medidos. Para tanto deve-se alterar o processo de medida, o experimento, reduzindo-se os erros de cada valor medido; no caso do tempo de queda tal poderá ser conseguido substituindo o acionamento manual do cronômetro por uma forma mais sofisticada de acionamento. A redução das fontes de erro poderá implicar em que o erro sistemático, que não é afetado pelo número de medidas, seja diminuído.

IV. Condição para que o erro da média possa ser menor do que o erro nominal dos valores medidos

Pelo exposto na secção anterior sabe-se que o erro de um único valor medido é estimado pelo desvio padrão dos valores medidos. O menor intervalo de separação possível entre duas medidas é às vezes impropriamente tomado como o erro de um único valor medido; no caso do tempo de queda este intervalo é de 1 cs (anteriormente ele foi chamado de erro nominal) e, por razões já apresentadas, entende-se porque o erro de uma medida, aproximadamente 5 cs, é maior do que este intervalo.

Igualmente ficou claro que o erro da média (estimado pelo desvio padrão da média) é menor do que o erro em um único valor medido; aliás, se assim não fosse, qual seria então a razão para se tomar diversas medidas ao invés de uma única?

Em alguns textos introdutórios à teoria de erros é feita a afirmação de que o erro da média de um conjunto de valores medidos não pode ser menor do que o erro de cada medida. Estes textos não são completamente explícitos em definir o que seja o erro de uma medida ou de um único valor medido; subentende-se que ele seja o que se chamou anteriormente de erro nominal. Mesmo em textos mais aprofundados esta afirmação continua sendo feita; por exemplo, Spiridonov e Lopatkin (1973) afirmam que o erro total da média seria igual ao desvio padrão da média adicionado ao erro nominal ou erro de escala (esta é a terminologia dos dois autores para o que se chamou de erro nominal); o intervalo de confiança para o valor verdadeiro seria então obtido por somar e subtrair da média o erro total. Desta forma, o erro da média seria sempre maior do que o erro nominal, tendendo ao erro nominal quando o número de medidas tendesse a infinito.

Silveira, Dionísio e Buchweitz (1983) demonstraram que Spiridonov e Lopatkin estavam errados. Essencialmente demonstraram que <u>a média dos valores medidos é uma estimativa do valor verdadeiro desde que o desvio padrão dos valores medidos</u>, portanto o erro de uma medida, <u>seja maior do que a metade do erro nominal ou de escala;</u> os referidos autores denominaram sensibilidade à metade do erro nominal ou de escala. Em outras palavras, foi demonstrado que se a sensibilidade for menor do que o desvio padrão dos valores medidos, então a média dos valores medidos é uma estimativa do valor verdadeiro e o desvio padrão da média uma estimativa do erro da média em relação ao valor verdadeiro.

A Tabela 2 reproduz os resultados da Tabela 1 caso as medidas tivessem sido realizadas com um cronômetro com erro de escala de 5 cs ou sensibilidade de 2,5 cs. Os dados da Tabela 2 foram obtidos agrupando-se os valores da Tabela 1. Por exemplo, a freqüência correspondente a 40 cs na Tabela 2 foi obtida somando-se as freqüências correspondentes a 38 cs, 39 cs, 40 cs, 41 cs e 42 cs na Tabela 1.

Calculando-se a média dos valores medidos, o desvio padrão dos valores medidos e o desvio padrão da média para a Tabela 2 obtêm-se:

$$\bar{t} \cong 45{,}02\,cs \qquad (11)$$

$$\widehat{S}_{\bar{t}} \cong 4{,}80\,cs \qquad (12)$$

$$\widehat{S}_{\bar{t}} \cong 0{,}24\,cs \qquad (13)$$

Tabela 2 - Valores medidos para o tempo de queda com erro de escala de 5 cs ou sensibilidade de 2.5 cs.

t (cs)	f
35	11
40	116
45	156
50	91
55	17
60	5

O desvio padrão dos valores medidos, apresentado em 12, é quase o dobro da sensibilidade; portanto está preenchida a condição demonstrada por Silveira, Dionísio e Buchweitz. Os resultados de 11 a 13 permitem estimar o intervalo de confiança a 68% em:

$$IC(t_{verd};68\%) \cong (45{,}0 \pm 0{,}2)\,cs \qquad (14)$$

Comparando-se os intervalos de confiança dados pelas expressões 10 e 14 constata-se a superposição de ambos, verificando-se neste caso particular o que foi demonstrado pelos três autores referidos.

O leitor poderá facilmente, a partir da Tabela 1, construir outras tabelas que simulam medidas com sensibilidade ou erro de escala diferentes; verificará em outros casos que os intervalos de confiança para o valor verdadeiro serão semelhantes aos dois anteriores desde que o desvio padrão dos valores medidos seja maior do que a sensibilidade.

Com intuito de afastar qualquer sombra de dúvida que ainda possa pairar sobre este assunto, apresenta-se uma simulação numérica, realizada pelo método de Monte Carlo (Sobol, 1983); a Tabela 3 contém mil valores "medidos" (simulados) de uma variável aleatória com distribuição normal, cuja média (valor verdadeiro) é 9,793, cujo desvio padrão é 0,700 e sensibilidade de 0,5. Essa simulação gera valores que poderiam ser obtidos em m/s^2 para a aceleração gravitacional em Porto Alegre em um experimento bastante grosseiro (com erro grande em cada valor medido).

Tabela 3 - Valores simulados pelo método de Monte Carlo para a aceleração gravitacional.

g (m/s^2)	f
8	26
9	318
10	500
11	150
12	6

Fazendo os cálculos necessários encontra-se:

$$\overline{g} \cong 9{,}792\ m/s^2\ , \tag{15}$$

$$\widehat{S}_g \cong 0{,}744\ m/s^2\ , \tag{16}$$

$$S_{\overline{g}} \cong 0{,}024\ m/s^2\ . \tag{17}$$

Mais uma vez verifica-se a condição de que a sensibilidade (0,5m/s^2) é menor do que o desvio padrão dos valores medidos (0,744 m/s^2) e portanto pode-se obter o intervalo de confiança seguinte:

$$IC(g_{verd};68\%) \cong (9{,}79 \pm 0{,}02)\ m/s^2$$

(18)

O intervalo de confiança acima contém efetivamente o valor verdadeiro. O erro da média, estimado em 16 (0,024 m/s^2), é cerca de quarenta vezes menor do que o erro de escala ou cerca de vinte vezes menor do que a sensibilidade.

Para encerrar esta discussão cabe ainda uma questão: pode o erro da média ser maior do que o erro nominal ou de escala?

A resposta é positiva. Se houver poucas medidas e o desvio padrão dos valores medidos for maior do que o erro de escala isso poderá acontecer. Por exemplo, se ao invés de se ter as 396 medidas da Tabela 1 se fizesse apenas cinco medidas do tempo de queda, poder-se-ia obter os seguintes valores: 41 cs, 51 cs, 40 cs, 46 cs, 45 cs. Estes cinco valores foram efetivamente obtidos nas cinco primeiras medidas da série de 396.

A média destes cinco valores é 44,6 cs, o desvio padrão dos valores medidos é 4,4 cs e o desvio padrão da média 2,0 cs. O desvio padrão da média (erro da média) é o dobro do erro nominal ou de escala.

V. Um método abreviado para estimar o desvio padrão dos valores medidos

É possível facilmente fazer uma estimativa do desvio padrão dos valores medidos a partir dos valores extremos medidos. A diferença entre o maior e o menor valor medido chama-se amplitude dos valores medidos. Desta forma:

$$A_x = X_{máx} - X_{mín} \, , \tag{19}$$

onde:
A_x - amplitude de x,
$X_{máx}$ – máximo valor de x,
$X_{mín}$ – mínimo valor medido de x.

Para a Tabela 1 a amplitude é 26 cs (60 cs -34 cs); para a Tabela 2 a amplitude é 25 cs (60 cs - 35 cs); para a Tabela 3 a amplitude é 4 m/s^2 (12 m/s^2 - 8 m/s^2). e para o exemplo das 5 medidas do tempo de queda ela é 11 cs (51 cs - 40 cs).

O desvio padrão dos valores medidos será estimado dividindo-se a amplitude por uma constante k. A constante k depende do número de medidas e da forma da distribuição dos valores medidos.

$$\widehat{S}_x \cong \frac{A_x}{k} \tag{20}$$

Os valores de k para a distribuição de Gauss são obtidos por simulação numérica. A Tabela 4 apresenta estes valores em função do número n de medidas. Esta tabela foi especialmente construída para esse trabalho através do método de Monte Carlo (Sobol, 1983).

Tabela 4 - Valores da constante k para a distribuição de Gauss em função do número n de medidas.

n	k	n	k
2	1,4	15	3,6
3	1,9	20	3,8
4	2,2	30	4,2
5	2,4	50	4,6
6	2,6	100	5,0
7	2,8	200	5,5
8	2,9	400	5,8
9	3,1	1000	6,4
10	3,2	2000	6,8

Os desvios padrão dos valores medidos, estimados pela relação 20, nos quatro casos anteriormente referidos são respectivamente:

$$\widehat{S}_t \cong \frac{26}{5,8} \cong 4,5\, cs\,,$$

$$\widehat{S}_t \cong \frac{25}{5,8} \cong 4,3\, cs\,,$$

$$\widehat{S}g \cong \frac{4}{6,4} \cong 0,63\, m/s^2\,,$$

$$\widehat{S}_t \cong \frac{11}{2,4} \cong 4,6\, cs\,.$$

Os desvios padrão das médias estimados a partir dos resultados anteriores são respectivamente:

$$S_{\bar{t}} \cong \frac{4,5}{\sqrt{396}} \cong 0,23\, cs\,,$$

$$S_{\bar{t}} \cong \frac{4,3}{\sqrt{396}} \cong 0,22\, cs\,,$$

$$S_{\bar{g}} \cong \frac{0,63}{\sqrt{1000}} \cong 0,020\, m/s^2\,,$$

$$S_{\bar{t}} \cong \frac{4,6}{\sqrt{5}} \cong 2,1\, cs\,.$$

Comparando-se os valores estimados através da relação 20 com os calculados pela relação 3, verifica-se a concordância aproximada. Os desvios padrão da média, se expressos com apenas um algarismo significativo, são idênticos.

Referências

1. LARSON, H.J. Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística. México: Limusa, 1978.

2. SILVEIRA, F.L., DIONÍSIO, P.H., BUCHWEITZ, B. Inferência sobre a média de uma grandeza a partir de um conjunto de dados: um aspecto relacionado com a sensibilidade das medidas. Ciência e Cultura, v. 35, n. 10, p. 1492-1496, 1983.

3. SOBOL, I. O método de Monte Carlo. Moscou: Mir, 1983.

4. SPIRIDONOV, V.P., LOPATIKIN. A.A..Tratamiento matemático de , dados físico-químicos. Moscou: Mir, 1973.

5. VENTSEL, H. Théorie des probabilités. Moscou: Mir, 1977.