CONSIDERAÇÕES SOBRE O ARTIGO "MÉTODOS NUMÉRICOS NO ENSINO DA FÍSICA EXPERIMENTAL"

O artigo "Métodos numéricos no ensino da física experimental" (Barroso et al., 1991) pretende exemplificar como dados experimentais devem ser tratados. Por considerar este objetivo importante passo a tecer algumas críticas e fazer algumas correções no referido artigo.

Iniciarei apontando alguns erros que encontrei em tabelas e fórmulas. Em seguida, tecerei outras críticas de natureza teórica e metodológica. As equações identificadas por um número são aquelas encontradas no artigo sob crítica; as equações por mim apresentadas serão identificadas por letras.

As duas primeiras médias da Tabela 1 são incoerentes com as medidas apresentadas nesta tabela. Se as medidas para o tempo das 100 oscilações forem corretas então as duas primeiras médias são respectivamente 222,66 s e 203,78 s. Como na Tabela 3 são apresentados dados compatíveis com as médias da Tabela 1, imagino que haja erros nos tempos das 100 oscilações.

As equações 7 e 8 estão erradas. As corretas são respectivamente:

$$K = \frac{\langle T^2 p\rangle - \langle T^2\rangle\langle p\rangle}{\langle T^4\rangle - \langle T^2\rangle\langle T^2\rangle} \qquad \text{(A)}$$

$$po = \frac{\langle T^4\rangle\langle p\rangle - \langle T^2 p\rangle\langle T^2\rangle}{\langle T^4\rangle - \langle T^2\rangle\langle T^2\rangle}$$

(B)

O coeficiente de correlação linear ou de Pearson entre x e y é dado pela seguinte equação:

$$r = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{[(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle\langle x\rangle)(\langle y^2\rangle - \langle y\rangle\langle y\rangle)]^{1/2}} \qquad \text{(C)}$$

Para que a equação 12 seja o coeficiente de correlação linear entre p e T^2 ela deve ser corrigida para:

$$r = \frac{\langle pT^2\rangle - \langle p\rangle\langle T^2\rangle}{[(\langle p^2\rangle - \langle p\rangle\langle p\rangle)(\langle T^4\rangle - \langle T^2\rangle\langle T^2\rangle)]^{1/2}} \qquad \text{(D)}$$

A equação 12 é um caso particular da equação D, aplicável a variáveis com médias nulas (o que não é o caso no problema tratado).

As equações 13 e 14 estão também erradas. Aliás, a constante K referida anteriormente (equação A) é a declividade da reta de regressão de p contra T^2. As equações 13 e 14 devem ser corrigidas como abaixo:

$$tg\theta_1 = \frac{\langle T^2 p\rangle - \langle T^2\rangle \langle p\rangle}{\langle T^4\rangle - \langle T^2\rangle \langle T^2\rangle} \tag{E}$$

$$tg\theta_2 = \frac{\langle T^2 p\rangle - \langle T^2\rangle \langle p\rangle}{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle \langle p\rangle} \tag{F}$$

Passo agora a outro tipo de crítica.

Conforme os autores, na página 126, "o comprimento L do pêndulo simples se estende da suspensão ao centro de gravidade do sistema oscilante, isto é, o centro de gravidade do conjunto de pesos: peso do fio, peso da suspensão da esfera e o peso da esfera". Esta frase tem um erro semântico, pois se o fio e a suspensão tiverem peso certamente não está se tratando de um pêndulo simples. Se o início da frase for alterado para o comprimento do pêndulo simples equivalente, ela também continuará errada, pois o comprimento do pêndulo simples equivalente a um pêndulo físico (aquele pêndulo simples que tem o mesmo período do pêndulo físico) não se estende do ponto de suspensão ao centro de gravidade do sistema oscilante; se estende sim do ponto de suspensão ao centro de oscilação (Symon, 1972). Pode-se demonstrar facilmente que o comprimento L do pêndulo simples equivalente a uma esfera maciça de raio R suspensa por um fio sem massa de comprimento D é:

$$L = D + R + \frac{2\,R^2}{5\,(D+R)} \tag{G}$$

O comprimento de pêndulo simples equivalente é sempre maior do que a distância entre a suspensão e o centro de gravidade do sistema oscilante, ou seja, o centro de oscilação está mais distante da suspensão do que o centro de gravidade.

A distância p_o preferida pelos autores é na verdade a distância entre o ponto em que está preso o gancho e o centro de oscilação. Para que p_o não se altere significativamente durante o experimento é necessário que não apenas o peso do fio seja desprezível frente ao peso do objeto suspenso, mas que também sejam desprezíveis as dimensões do objeto suspenso frente ao comprimento do fio; preenchidas estas condições será desprezível a distância entre o centro de gravidade e o centro de oscilação. Se o objeto suspenso for uma esfera (sem gancho) então a equação A permite investigar a razoabilidade de quase invariância de p_o durante o experimento; o termo $2\ R^2\ /\ (5(d+R))$ da equação G deve ser da ordem do erro na determinação do comprimento p, ou melhor, menor do que o erro.

Pela Tabela 1 os períodos do pêndulo foram determinados com erros ou imprecisões da ordem de 10^{-4} s. Para erros tão pequenos, deve-se questionar se não há necessidade de se fazer correções para a amplitude na equação 1. Deve-se questionar para que amplitudes a equação 1 se constitui em uma aproximação razoável. A dependência do período com a amplitude angular (Θ_m) é dada pela equação:

$$T = 2\pi\,[\frac{L}{g}]^{1/2}(1 + \frac{1}{4}sen^2(\frac{m}{2}) + \frac{9}{64}sen^4(\frac{m}{2}) + ...) \qquad \text{(H)}$$

Como os períodos medidos são da ordem de grandeza de segundos e as suas imprecisões da ordem de 10^{-4} s, é necessário que o primeiro termo da equação H que aparece a amplitude angular seja no máximo da ordem de 10^{-4}. Ou seja:

$$\frac{1}{4}sen^2\,(\frac{m}{2}) \leq 10^{-4}$$

Portanto:

$$\theta_m \leq 2{,}3^o$$

Para o comprimento do pêndulo, da ordem de 120 cm, a amplitude linear da oscilação não deve ser maior do que 4,8 cm e para o comprimento de 40 cm a amplitude linear deve ser menor do que 1,6 cm (estes valores foram obtidos multiplicando-se o comprimento pelo seno da amplitude angular). Se as amplitudes forem maiores do que esses valores, não se poderá mais aceitar a equação 1 como válida. Será que as amplitudes nos experimentos efetivamente realizados foram menores do que 4,8 cm e 1,6 cm respectivamente? Suponho que não porque com amplitudes iniciais desta ordem fica extremamente difícil contar as 100 oscilações da Tabela 1; além disso, uma amplitude de 1,6 cm é muito provavelmente menor do que as dimensões do corpo suspenso, dificultando o reconhecimento do momento em que o pêndulo passa pelo ponto de máxima velocidade referido pelos autores.

A fim de determinar as constantes da reta de regressão p contra $T^2\,(\widehat{p} = K\,T^2\, - P_o)$ os autores utilizaram o método dos mínimos quadrados. Este método permite não apenas a determinação de K e p_o mas também os desvios padrão (erros ou imprecisões) de ambos. Conhecida a imprecisão de K se pode imediatamente determinar a imprecisão de g pois g é uma função linear de K, conforme a equação 7.

Os autores optaram por um outro caminho para a determinação do erro em 9 (vide Tabela 4). Para tanto calcularam g a partir de T^2 pela equação $g = 4\pi^2\;L/T^2$ onde L = p + p. O valor de p_o, que não era conhecido, foi substituído pelo valor calculado através da reta de regressão. Desta forma o erro em p_o não foi considerado no cálculo de g (p_o entrou nos cálculos como se fosse uma quantidade sem dispersão) e também foi desprezada a covariância do erro em p_o com o erro em K (as estimativas de K e p_o pela equação de regressão não são independentes e portanto os seus erros também não; os erros cavariam, estão correlacionados).O procedimento utilizado pelos autores somente estaria correto se o erro em p_o e a covariância deste com o erro em K fossem desprezíveis; nestas circunstâncias ainda deve-se fazer uma correção na equação 10, substituindo-se (n-1) por (n-2) (esta correção se deve à perda de mais um grau de liberdade na estimativa do erro de g). Por tudo isto os autores obtiveram uma subestimativa do erro em g conforme se constatará a seguir.

A determinação do erro (desvio padrão) de K é realizada da seguinte maneira:

1) Com a equação de regressão de p contra T^2 determinam-se os valores estimados para p $(\hat{p})$. A equação de regressão conforme os autores é: p = 24,776529 T^2 - 2,88829. A tabela abaixo apresenta os valores estimados para p a partir dos valores medidos de T.

T (s)	$\hat{p}$ (cm)
2,2272	120,0137
2,0376	99,9792
1,8290	79,9952
1,5934	60,0174
1,3156	39,9950

2) Calculam-se as diferenças entre os valores estimados e os valores medidos de p. Somam-se os quadrados destas diferenças encontrando-se assim a soma dos quadrados (o método dos mínimos quadrados torna esta soma mínima). Esta soma (SQ) pode ser utilizada para avaliar se a equação de regressão (neste caso uma reta) se ajusta adequadamente aos dados experimentais; se o ajuste for perfeito SQ será nulo; quanto maior SQ, tanto pior é o ajuste. O cálculo de SQ está indicado a seguir:

$$SQ = (120 - 120{,}0137)^2 + (100 - 99{,}9792)^2 + ... + (40 - 39{,}9950)^2$$
$$SQ = 0{,}000969\, cm^2$$

Pode-se determinar o coeficiente de correlação a partir de SQ pela equação abaixo:

$$r = [1 - \frac{SQ}{n\,(\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle \langle p \rangle)}]^{1/2} \qquad \text{(I)}$$

Portanto:

$$r = [\,1 - \frac{0{,}000969}{5\,(7760 - 80^2)}]^{1/2} = 0{,}99999993$$

3) O erro (desvio padrão) de K será então:

$$\sigma_K = [\frac{SQ}{n\,(n-2)\,(\langle T^4 \rangle - \langle T^2 \rangle \langle T^2 \rangle)}]^{1/2} \qquad \text{(J)}$$

Portanto:

$$\sigma_K = [\frac{0,000969}{5\,(5-2)\,(12,49515 - 3,3454^2)}$$

$$\sigma_K \cong 7,0\,.\,10^{-9}\,\frac{cm}{s^2}$$

Finalmente determinam-se g e o erro (desvio padrão) de g pelas seguintes equações:

$$g = 4\pi^2\ K \tag{L}$$

$$\sigma_g = 4\pi^2 \sigma_K \tag{M}$$

Portanto:

$$g = 4\pi^2\ .\,24,776529 \cong 978,1\,cm/s^2$$

$$\sigma_g = 4\pi^2\ .\,7,0\,.\,10^{-9} \cong 0,3\,cm/s^2$$

Note-se que o erro estimado por este procedimento é três vezes maior do que o estimado pelos autores. O valor estimado para g através da equação L é uma subestimativa de g, devido à ausência de correção para a amplitude.

Para maiores detalhes sobre o método dos mínimos quadrados pode-se consultar Larson (1978), Wherry (1984), Snedecor e Cochran (1974) e Helene é Vanin (1981).

A lição final que se pode tirar de toda essa discussão é que uma sofisticação de procedimentos experimentais deve ser acompanhada por uma sofisticação teórica, seja no domínio dos métodos estatísticos e quantitativos, seja no domínio da física envolvida no experimento.

Referências

BARROSO, R.C.R.S., AZEVEDO, C.A., GONÇALVES, R.A., SANTIAGO, A.J. Métodos numéricos no ensino da física experimental. Cad. Cat. Ens. Fis., v. 8, n. 2, p. 125-136, 1991.

LARSON, J.H. Introducción a ia teoria de probabilidades e inferencia estadística. México: Limusa, 1978.

HELENE, O.A.M., VANIN, V.R. Tratamento estatístico de dados em física experimental. São Paulo: Edgar Blücher, 1981.

SNEDECOR, G.W., COCHRAN, W.G. Metodos estadísticos. México: Continental, 1974.

SYMON, K.R. Mechanics. London: Addison-Wesley, 1971.

WHERRY, R.J. Contributions to correlational analysis. Orlando: Academic Press, 1984.

Fernando Lang da Silveira
Instituto de Física-UFRGS
Instituto de Física e
Pós-Graduação em Educação-PUCRS
Porto Alegre-RS

SOBRE AS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ARTIGO "MÉTODOS NUMÉRICOS NO ENSINO DA FÍSICA EXPERIMENTAL"

Caro Editor:

Obrigado por sua carta de 05 de junho de 1992.

Li o manuscrito "Considerações sobre o artigo Métodos Numéricos no Ensino da Física Experimental". Sob o nosso ponto de vista, passamos a comentá-lo.

Conforme o autor anunciou, a Tabela 1, na 3ª medida do tempo de 100 oscilações, encontra-se com erro (de datilografia, as médias e os valores utilizados em todo o artigo estão corretas) para os valores doe p de 120 e 100 cm. Numa errata, as correções poderiam ser:

- "Na Tabela 1, na 3ª medida do tempo Δt para 100 oscilações,onde está 222,6 leia-se 222,9 e onde esta 203,9 leia-se 203,8, para p de 120,0 e 100,0 respectivamente."

O autor das 'Considerações...', também tem razão no que diz respeito às Eq. 7 e Eq. 8. A correção seria:

2

-"Nas Eq. 7 e Eq. 8, onde está T leia-se T^2 e onde está T^2 leia-se T^4".

No que diz respeito às Eq. 12, Eq. 13 e Eq. 14, ao contrário do sugerido, não encontramos inconsistância. Nós omitimos a transformação de coordenada efetuada e reportamos, no artigo, o leitor para a referência, no caso a de nº. 4. Segue em anexo, a dedução das equações utilizadas. [1]

Assim, em resumo, os erros apresentados são apenas de datilografia, os quais poderiam ter sido evitados na leitura da 'prova do artigo', a qual, lamentavelmente, só recebi após a publicação do artigo (encontrava-me viajando).

Após o artigo ter sido publicado, notamos os erros nas fórmulas, entretanto, como os valores numéricos estão corretos, e por julgar que uma checagem cuidadosa do leitor mostraria facilmente a expressão correta, não nos preocupamos e fazer uma errata. Aproveito a oportunidade para sugerir que o CCEF só publique os artigos cujas 'provas tenham sido devolvidas e corrigidas pelos autores; e/ou dê um prazo maior para que os autores possam conferir as provas'.

Passamos agora a discutir o 'outro tipo de crítica'. Não argumentaremos contra (nem a favor) do possível erro semântico sugerido pelo autor. Isto nos levaria a discutir se todas as aproximações teóricas que fazemos na física devem ou não ser feitas; i.é., devemos discutir, ou não, pêndulo simples, movimento harmônico simples, etc.; ou, pior ainda, poderíamos chegar à conclusão de que nenhuma aproximação teórica pode ser feita e que deveríamos iniciar um curso de Física I com a Mecânica Estatística Quântum -Relativista, a qual, talvez, em última análise, fornece a física correta de todos os fenômenos!! Assim, com relação a este aspecto, apenas tomamos conhecimento do ponto de vista do autor das 'Considerações' (não devemos discutir pêndulo simples, porque, na realidade, este não existe) e daremos prosseguimento ao nosso pronunciamento.

Chegamos, finalmente, a um ponto extremamente interessante, ressaltado pelo autor das 'Considerações...' - Deve-se questionar para que amplitudes a Eq. 1 constitui uma aproximação razoável, ou ainda, para que amplitudes a equação não-

-linear do 'pêndulo simples' deve ser utilizada?; -Como verificar isto experimentalmente?

Conforme comentamos no artigo em questão (penúltimo parágrafo), por simplicidade consideramos e pequeno e desprezamos o atrito. E ainda, como anunciamos na carta ao revisor daquele artigo, estudávamos experimentalmente a dependência do período com a amplitude (a eq. não -linear) do 'pêndulo simples'. Estudos preliminares parecem sugerir que o atrito tem um efeito maior sobre a dinâmica do sistema que a correção não - linear, se o número de oscilações for grande. Segue-se que o estudo correto estava envolvendo a dis-

---

[1] Nota do Editor: A dedução das equações foi omitida por não ter sido considerada relevante para o esclarecimento do assunto em questão

cussão de uma equação não-linear e com amortecimento. Entretanto, meu aluno (monitor -4º período de Física) que estava trabalhando no assunto, por motivos particulares, trancou matrícula e o trabalho foi interrompido.

Para finalizar, vejo 'Considerações...' como uma generalização do artigo 'Métodos Numéricos...' e, como tal, não tenho nada contra a idéia do autor. Entretanto, o que estou em dúvida **é se realmente faz sentido prover o exemplo ilustrativo** da Ref. 1 em apenas um de seus aspectos (no caso a dependência do período com a amplitude) e não todos (o caso do atrito, por exemplo). Na minha opinião o autor deveria estender estas considerações para o caso de amortecimento e publicar um artigo completo. Isto evitaria a publicação de uma série de artigos, um invalidando o outro; caso contrário, no futuro, poder-se-ia fazer as mesmas considerações que as feitas, simplesmente incluindo o efeito do atrito e chegar-se-ia às mesmas conclusões. "A lição final que se pode tirar de toda essa discussão é que uma sofisticação de procedimentos experimentais deve ser acompanhada por uma sofisticação teórica, seja no domínio dos métodos estatísticos e quantitativos, seja no domínio da física envolvida no experimento".

Os Autores.

NOTA DO EDITOR

Na resposta que os autores do "Métodos numéricos no ensino da física experimental" dão ao leitor que o crítica, estes mencionam que os erros cometidos no artigo são de datilografia e que poderiam ter sido evitados na leitura da prova do mesmo. Com relação a este ponto, fazemos questão de deixar claro aos leitores que no artigo publicado os erros são de inteira responsabilidade de seus autores, já que o mesmo foi transcrito e revisado de acordo com o original apresentado.

Por outro lado, desde o primeiro número do Caderno, tem sido política deste periódico adotar, como praxe, sem qualquer exceção, encaminhar ao(s) autor (es) o trabalho na forma em que será publicado, aguardando o seu pronunciamento dentro de um prazo nunca inferior a 15 dias. Como esta sistemática tem sido bem aceita por todas as pessoas que colaboram com matérias para a revista, não vemos qualquer razão para mudá-la.