

J. Fujioka, R. F. Rodríguez, A. Espinosa-Cerón
Solitones embebidos: estables, inestables, continuos y discretos
Ciencia Ergo Sum, vol. 13, núm. 3, noviembre-febrero, 2006, pp. 312-318,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10413310>



Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

www.redalyc.org

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Solitones embebidos: estables, inestables, continuos y discretos

J. Fujioka*, R.F. Rodríguez y A. Espinosa-Cerón

Recepción: 30 de junio de 2005

Aceptación: 16 de noviembre de 2005

* Instituto de Física, UNAM, Apdo. Postal 20-364, C. P. 1000, México, D.F.

Los autores agradecen a la Dirección de Servicios de Cómputo Académico (DGSCA) de la UNAM su autorización para usar sus computadoras Origin 2000 y Bakliz en el estudio de los solitones embebidos. Con ayuda de estas computadoras se obtuvieron los resultados numéricos presentados en las referencias Espinosa-Cerón *et al.* (2003), Espinosa-Cerón (2003), Rodríguez *et al.* (2003), y González (2004). Asimismo, se agradece el apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-PAPIIT) a través del proyecto IN112503.

Resumen. En 1997 se descubrió un nuevo tipo de solitones, bautizados en 1999 como “solitones embebidos”. Estas peculiares ondas no lineales son interesantes porque existen bajo condiciones en las que hasta hace poco se creía que la propagación de ondas solitarias era imposible. En este trabajo se explica qué son los *solitones embebidos*, en qué modelos se han encontrado, y qué variantes existen (estables, inestables, continuos, discretos, etc.).

Palabras clave: solitones embebidos, ondas no lineales, ondas solitarias.

Embedded Solitons: Stable, Unstable, Continuous and Discrete

Abstract. In 1997 a new type of soliton was discovered, and its variants were baptized as “embedded solitons” in 1999. These peculiar nonlinear waves are interesting because they exist under conditions in which, until recently, it was considered that the propagation of solitary waves was impossible. This communication explains what these *embedded solitons* are, in which models they have been found, and what variants exist (stable, unstable, continuous, discrete, etc.).

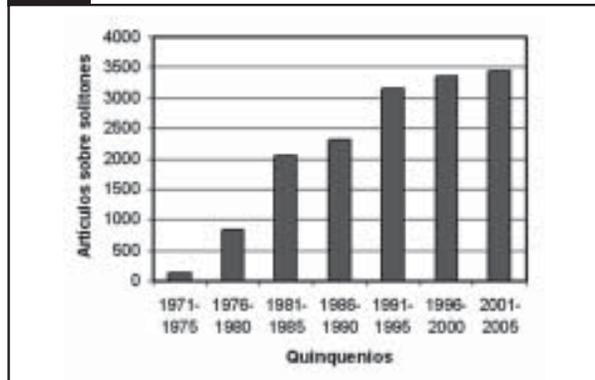
Key words: embedded solitons, nonlinear waves, solitary waves.

Introducción

Los solitones son ondas solitarias capaces de propagarse sin distorsión a través de sistemas no lineales, es decir, sistemas cuyo comportamiento está gobernado por ecuaciones no lineales (ecuaciones diferenciales parciales, en el caso de sistemas continuos, y ecuaciones diferenciales y en diferencias, en el caso de sistemas discretos). En un principio, el término ‘solitón’ sólo se aplicaba a ondas muy estables, que recuperaban su forma y velocidad iniciales después de chocar con ondas similares. Sin embargo, con el paso del tiempo, este término (solitón) empezó a aplicarse a todas las ondas solitarias capaces de propagarse en sistemas no lineales.

El interés en los solitones ha ido creciendo de manera constante desde su descubrimiento en 1965 por Zabusky y Kruskal (1965). Esto puede apreciarse si observamos cómo ha ido creciendo el número de artículos publicados cada año en torno a estas peculiares ondas. En la figura 1 podemos ver el número de artículos publicados sobre solitones (agrupados en quinquenios), que aparecen en el banco de datos INSPEC (que contiene los trabajos publicados sobre astronomía, física y matemáticas). Estos datos muestran que en el quinquenio 1971-1975 se publicaron 151 artículos que hacían referencia a los solitones, mientras que en el quinquenio 1996-2000 se publicaron nada menos que 3,503 artículos.

Figura 1. Artículos publicados sobre solitones desde 1971 hasta el 2000.



Al entrar un poco más en detalle uno puede encontrar que hay varios tipos de solitones: brillantes, oscuros, topológicos, no topológicos, solitones de Bragg, solitones vectoriales, solitones tipo vórtice, solitones espacio-temporales (balas de luz), solitones discretos, etc. La mayoría de estas categorías se conocen desde la década de los setenta. Sin embargo, a finales de los noventa se encontró un nuevo tipo de solitones, que se bautizaron en 1999 con el nombre de *solitones embebidos*. En estas páginas veremos qué son estos solitones, y haremos una revisión de los principales resultados que se han encontrado hasta ahora en torno a ellos.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 1 explicaremos cómo se relacionan los solitones normales (*i.e.*, no embebidos) y las ondas periódicas de pequeña amplitud que pueden propagarse en un sistema no lineal. En la sección 2 mostraremos los primeros sistemas en los cuales se encontraron solitones embebidos (los cuales resultaron ser aislados e inestables). En la sección 3 examinaremos los sistemas en los cuales se han encontrado familias continuas de solitones embebidos, así como solitones embebidos estables. También explicaremos qué son los *solitones doblemente embebidos*. En la sección 4 veremos que los solitones embebidos también pueden existir en sistemas discretos. Finalmente, presentamos algunos comentarios finales.

1. Solitones normales y ondas lineales

En todo sistema no lineal donde puedan propagarse solitones, es posible también la propagación de ondas periódicas de pequeña amplitud (que satisfacen la versión linearizada de las ecuaciones no lineales que gobiernan el sistema que estamos considerando). Sin embargo, para que pueda existir un auténtico solitón es imprescindible que no se produzcan resonancias entre el solitón y

las ondas lineales de pequeña amplitud, ya que cuando se produce una resonancia de este tipo, la onda solitaria va debilitándose paulatinamente, y parte de su energía se va transfiriendo a las ondas lineales. Como veremos a continuación, esta condición de no resonancia adopta distintas formas, dependiendo de si el solitón considerado es real o complejo.

Consideremos primeramente qué pasa cuando tenemos solitones reales. Como ejemplo de solitones reales tomemos los solitones de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) (Drazin y Johnson, 1984):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 6w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

En este caso los solitones tienen la forma (Toda, 1989):

$$w(x, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t), \quad (2)$$

donde κ es una constante real arbitraria. Podemos ver que la velocidad de estos solitones es siempre positiva. En cambio, si sustituimos la función:

$$w(x, t) = \sin(kx - \Omega t) \quad (3)$$

en la parte lineal de la ecuación KdV, encontramos que estas ondas lineales deben satisfacer la relación de dispersión:

$$\omega(k) = -k^3, \quad (4)$$

de manera que la velocidad de fase de estas ondas es siempre negativa:

$$\frac{\omega}{k} = -k^2. \quad (5)$$

Vemos, pues, que en este caso los solitones viajan hacia la derecha, mientras que las ondas lineales viajan a la izquierda. Debido a este hecho los solitones de la ecuación KdV no entran en resonancia con las ondas lineales.

Pasemos ahora al caso complejo. La ecuación más famosa que tiene solitones complejos es la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) (Fujioaka, 2003):

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación aparece en muchos campos, pero es particularmente importante en telecomunicaciones, ya que describe la propagación de pulsos luminosos a través de fibras ópticas (Agrawal, 1989). En este caso $u(z, t)$ es una función comple-

ja, z y t son variables reales, y los solitones fundamentales de esta ecuación tienen la forma (Kivshar y Agrawal, 1989):

$$u(z, t) = A \operatorname{sech}(At) \exp\left[i \frac{A^2}{2} z\right], \quad (7)$$

donde A es una constante real arbitraria. Esta expresión muestra que los solitones de la ecuación NLS tienen una componente oscilatoria (dada por la exponencial compleja) cuyo número de onda ($A^2/2$) es siempre positivo. Por lo que respecta a las ondas lineales, éstas son también complejas, y al sustituir:

$$u(x, t) = \exp[i(kz - \omega t)] \quad (8)$$

en la parte lineal de la ecuación NLS es fácil ver que estas ondas deben satisfacer la relación de dispersión inversa:

$$k(\omega) = -\frac{1}{2} \omega^2 \quad (9)$$

Esta expresión nos muestra que todas las ondas lineales tienen números de onda negativos, al contrario de lo que ocurre con los solitones. Debido a esta diferencia de signos los solitones de la ecuación NLS no entran en resonancia con las ondas lineales.

Los resultados mencionados arriba sugieren que los solitones reales no pueden tener velocidades que estén contenidas en el rango de velocidades permitidas para las ondas lineales, y que los solitones complejos no pueden tener números de onda que estén en el rango de números de onda permitidos para estas ondas. Esta opinión se vio fortalecida cuando se encontró que cualquier condición inicial semejante a un solitón que evolucione de acuerdo con la ecuación (Wai *et al.*, 1986 y 1990; Kuehl y Zhang, 1990):

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i \varepsilon_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (10)$$

inevitablemente empieza a emitir radiación al entrar en resonancia con ondas lineales, y la frecuencia de la radiación emitida está definida por la ecuación (Akhmediev y Karlsson, 1995):

$$\frac{A^2}{2} = -\frac{1}{2} \omega^2 + \varepsilon_3 \omega^3, \quad (11)$$

donde A es la amplitud de la onda inicial. Como $A^2/2$ es precisamente el valor que tendría el número de onda de un solitón de altura A , la ecuación (11) es precisamente la condición de resonancia entre la onda inicial y las ondas lineales.

En forma similar, también se encontró que cualquier condición inicial parecida a un solitón que evolucione de acuerdo con la ecuación (Höök y Karlsson, 1993; Karlsson y Höök,

1994; Akhmediev *et al.*, 1994; Buryac y Akmediev, 1995):

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (12)$$

empieza a emitir radiación al entrar en resonancia con ondas lineales, y la frecuencia de la radiación está definida en este caso por la ecuación (Akhmediev, 1995):

$$\frac{A^2}{2} = -\frac{1}{2} \omega^2 + \varepsilon_4 \omega^4, \quad (13)$$

que es nuevamente la condición de resonancia entre la onda inicial (de altura A) y las ondas lineales.

Los resultados anteriores fortalecieron la opinión de que un solitón no puede tener un número de onda que esté inmerso en el rango de la relación de dispersión inversa $k(\omega)$, y esta opinión prevaleció hasta mediados de 1997.

2. Solitones embebidos aislados e inestables

Durante la década de los noventa se estudiaron exhaustivamente varias extensiones de la ecuación NLS que son útiles para describir la propagación de pulsos luminosos ultracortos (de picosegundos o femtosegundos de duración) a lo largo de fibras ópticas (Wai *et al.*, 1990; Akhmediev y Karlsson, 1993; Höök, 1994; Akhmediev *et al.*, 1994 y Buryac y Akmediev, 1995), y para describir la propagación de pulsos luminosos intensos en materiales saturables (en los cuales el índice de refracción no depende linealmente de la intensidad luminosa) (Herrmann, 1991 y 1992; Gatz y Herrman, 1991 y 1992; Hickman, 1993 y Krolikowski y Luther-Davies, 1993). En el primer caso (pulsos rápidos) se utilizan ecuaciones tipo NLS que incluyen derivadas de orden superior, como las ecuaciones (10) y (12), y en el segundo caso se utilizan extensiones de la ecuación NLS que tienen no linealidades saturables de la forma:

$$\frac{|u|^2}{1 + \gamma |u|^2}, \quad (14)$$

o bien, no linealidades de la forma:

$$\gamma_1 |u|^2 - \gamma_2 |u|^4. \quad (15)$$

Lo que se mencionó anteriormente indica que para describir la propagación de pulsos luminosos rápidos e intensos en materiales saturables es de utilidad la ecuación:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0, \quad (16)$$

así como la ecuación más completa:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i \varepsilon_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0. \quad (17)$$

En 1997 apareció un artículo en el *Journal of the Physical Society of Japan* en el cual se estudiaba la ecuación (16), y se demostraba que esta ecuación poseía soluciones tipo solitón que tienen un número de onda que está inmerso en el rango de números de onda permitidos para las ondas lineales (Fujioka y Espinosa, 1997). Este fue el primer trabajo en el cual se encontró una expresión analítica explícita para este tipo de solitones. Este artículo echó por tierra la opinión de que los solitones no pueden tener números de onda que estén inmersos en el espectro lineal del sistema considerado. Posteriormente, la respuesta ante perturbaciones de los peculiares solitones de la ecuaciones (16) fue estudiada con más detalle en Espinosa-Cerón *et al.* (2003).

En 1998 los resultados numéricos encontrados por Champneys, Malomed y Friedman al estudiar el siguiente sistema de dos ecuaciones tipo NLS acopladas que describen la propagación de dos pulsos luminosos que se propagan en direcciones contrarias en una fibra óptica con una rejilla de difracción (Champneys y Malomed, 2000):

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\sigma |u|^2 + |v|^2) u + v = 0, \quad (18a)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial t} - i \frac{\partial v}{\partial x} + D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\sigma |v|^2 + |u|^2) v + u = 0, \quad (18b)$$

mostraron que también en este sistema podría haber ondas viajeras con números de onda inmersos en el espectro lineal del sistema. Desafortunadamente en este caso no se pudieron encontrar soluciones analíticas explícitas. Sin embargo, en 1999 Yang, Malomed y Kaup encontraron que en el sistema (Yang *et al.*, 1999):

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma_1 |u|^2 u + u^* v = 0, \quad (19a)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4\gamma_2 |u|^2 v + \frac{1}{2} u^2 + \kappa v = 0, \quad (19b)$$

el cual describe la propagación de luz en un medio óptico no lineal en el cual hay generación del segundo armónico, sí existen expresiones explícitas para ondas solitarias con números de onda inmersos en el espectro lineal del sistema (*i.e.*, en el rango de números de onda de las ondas lineales). Yang, Malomed y Kaup decidieron bautizar a este tipo de ondas con el nombre de *solitones embebidos*, para indicar así que su número de onda está *embebido* en el espectro lineal del sistema.

Un poco después Champneys y Malomed encontraron otro sistema óptico en el cual los resultados numéricos indicaban la existencia de solitones embebidos (Champneys y Malomed, 1998). El sistema es el siguiente:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial x} + (2k)^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + (\sigma |u|^2 + |v|^2) u + v = 0, \quad (20a)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial t} - i \frac{\partial v}{\partial x} + (2k)^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + (\sigma |v|^2 + |u|^2) v + u = 0, \quad (20b)$$

Sin embargo, en este sistema no existen soluciones analíticas explícitas.

En donde sí se hallaron solitones embebidos con expresiones analíticas explícitas, fue en el caso de la ecuación (17), la cual contiene a la ecuaciones (16) como caso particular. En un artículo publicado en 2003 (Espinosa-Cerón *et al.*, 2003), se encontró que la ecuación (17) tiene solitones brillantes y oscuros, y se mostró que los solitones brillantes son solitones embebidos. En este trabajo, Espinosa-Cerón *et al.* (2003) explicaron por primera vez por qué estos solitones embebidos no entran en resonancia con las ondas lineales, a pesar de tener un número de onda inmerso en el rango de la relación de dispersión inversa (*i.e.*, en el espectro lineal del sistema). Este fue un resultado importante, porque en los trabajos anteriores no se había podido encontrar una explicación satisfactoria para esta ausencia de resonancia. Otro resultado interesante presentado en este trabajo, fue el hallazgo de que al perturbar a un solitón embebido de la ecuación (17) se emite radiación en frecuencias inesperadas. La explicación de esta radiación se presenta en el citado trabajo.

En los cinco sistemas mencionados arriba (Fujioka y Espinosa, 1997; Espinosa-Cerón *et al.*, 2003; Champneys, *et al.*, 1998; Yang y Malomed *et al.*, 1999; Champneys y Malomed, 1999 y Espinosa-Cerón, *et al.*, 2003), los solitones embebidos encontrados resultaron ser *soluciones aisladas*. Es decir, sólo pueden existir para un único valor de la altura, una única anchura, y un único número de onda. Los valores de estos parámetros (altura, anchura, etc.) quedan determinados por los coeficientes de las ecuaciones consideradas. Además, estos solitones embebidos resultaron ser *semiestables*: cuando se perturba uno de estos solitones *incrementando su energía*, el solitón perturbado tiende a estabilizarse, aproximándose al solitón exacto. En cambio, cuando la perturbación *disminuye la energía del solitón*, éste entra en resonancia con las ondas lineales y empieza a perder energía, lenta pero continuamente. En este caso, aunque la pérdida de energía es muy lenta, el solitón, en rigor, no alcanza un nuevo estado de equilibrio.

3. Solitones embebidos estables y en familias

Hasta 1999 se pensaba que los solitones embebidos eran forzosamente soluciones aisladas e inestables. Sin embargo, a principios de 2000, Champneys y Malomed encontraron evidencias numéricas que indicaban que podrían existir *familias continuas* de solitones embebidos. El sistema que estudiaron describe la interacción de tres ondas luminosas que se propagan a través una guía de ondas plana, en la cual se ha grabado una rejilla de difracción (Champneys y Malomed, 2000 y Mak *et al.*, 1998). El sistema de ecuaciones al que se llega en este caso es el siguiente:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial u}{\partial x} + v + wv^* = 0, \tag{21a}$$

$$i \frac{\partial v}{\partial z} - i \frac{\partial v}{\partial x} + u + wv^* = 0, \tag{21b}$$

$$2i \frac{\partial w}{\partial z} + D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - qw + uv = 0, \tag{21c}$$

pero no hay expresiones analíticas para los solitones capaces de propagarse en este sistema.

La primera ecuación en la cual se encontró *explícitamente* una familia continua de solitones embebidos es una complicada extensión de la ecuación KdV analizada por Yang en el 2001 (Yang, 2001):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u_{xxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x = \varepsilon F(u), \tag{22}$$

donde:

$$F(u) = -(auu_{xxx} + bu_x u_{xx} + cu^2 u_x), \tag{23}$$

es un término de perturbación ($\varepsilon \ll 1$), y a , b y c son constantes reales. En este caso, sin embargo, el *embebidamiento* es diferente al de todos los casos mencionados anteriormente, ya que aquí los solitones son reales. En este caso la cantidad que está *embebida* en el espectro lineal del sistema no es un número de onda (o una frecuencia), sino la velocidad de los solitones de la ecuación (27), los cuales tienen la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{k}{2} (x - Ct) \right], \tag{24}$$

donde $C = k^2 + k^4$ es la velocidad del solitón, y $k > 0$ es un parámetro arbitrario. Yang (2001) probó que todos los solitones de esta familia están embebidos si los coeficientes que aparecen en la ecuación (28) satisfacen la condición (a, b, c) $\propto (1, -1, 3)$.

Los solitones de Yang constituyen la primera familia de solitones embebidos *reales* reportada en la literatura.

La primera familia de solitones embebidos *complejos* (con una forma analítica explícita), fue encontrada en 2003 al estudiar la propagación de luz en cristales líquidos. Rodríguez *et al.* (2003), encontraron que en una primera aproximación la ecuación NLS puede describir la propagación de pulsos luminosos en guías de onda líquido-cristalinas, pero que si se desea mejorar esta aproximación es necesario considerar una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \gamma |u|^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

Como esta ecuación se reduce a la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (mKdV) cuando es real, es evidente que tiene solitones reales. Pero también tiene una familia de solitones complejos de la forma:

$$u(z,t) = A \operatorname{sech} \left(\frac{t-az}{w} \right) \exp[i(qz + rt)] \tag{26}$$

donde los parámetros A , a , w , q y r deben satisfacer algunas condiciones descritas en (Rodríguez *et al.*, 2003). Debido a la presencia de la tercera derivada en la ecuación (30), el rango de la relación de dispersión inversa $k(\omega)$ asociada a esta ecuación contiene todo el eje real, por lo cual el número de onda intrínseco del solitón está inmerso en el espectro lineal. Esto implica que todos los solitones de la ecuación (25) son solitones embebidos. Pero no sólo eso. En el caso en que $a\varepsilon > 0$, también *la velocidad* del solitón (26) está dentro del rango de velocidades permitidas para las ondas lineales. Por lo tanto, los solitones de la forma (26) cuya velocidad (el parámetro a) es de signo contrario al del coeficiente ε están *sencillamente embebidos* (*i.e.*, embebidos únicamente con respecto a su número de onda), pero aquellos solitones para los cuales $a\varepsilon > 0$ están *doblemente embebidos*, ya que tanto su velocidad como su número de onda están inmersos en los respectivos espectros lineales (*i.e.*, los espectros de velocidad y número de onda, respectivamente).

Los resultados numéricos presentados en (Rodríguez *et al.*, 2003) indican que los solitones de la ecuación (25) son estables. Este es un resultado interesante, ya que se trata de los primeros *solitones embebidos estables* que se conocen. Se encontró también que los solitones *sencillamente embebidos* se estabilizan más rápido que los que están *doblemente embebidos*, lo cual muestra que hay una diferencia real entre estos dos tipos de solitones.

4. Solitones embebidos discretos

Para 2003 ya se sabía que los solitones embebidos pueden aparecer en sistemas bastante diferentes, tales como: crista-

les líquidos, sistemas hidrodinámicos, y varios tipos de sistemas ópticos. Sin embargo, todos estos sistemas tienen al menos una característica común: son sistemas continuos. Cuando uno reconoce la existencia de este común denominador surge inmediatamente una pregunta: ¿pueden existir solitones embebidos en sistemas discretos? Con el fin de encontrar la respuesta a esta pregunta, González-Pérez-Sandi *et al.* decidieron estudiar las posibles discretizaciones de la ecuación (16), y a mediados de 2004 encontraron *solitones embebidos discretos* al estudiar la siguiente ecuación diferencial y en diferencias (González-Pérez-Sandi *et al.*, 2004):

$$i \frac{\partial r_n}{\partial t} + \varepsilon_2 \Delta_2 r_n + \varepsilon_4 \Delta_4 r_n + \frac{1}{2} \gamma_1 |r_n|^2 (r_{n+1} + r_{n-1}) - \frac{2}{3} \gamma_2 |r_n|^4 [r_{n-2} + 4\alpha(r_{n+1} + r_{n-1}) + r_{n-2}] = 0, \quad (27)$$

en la cual se han definido:

$$\Delta_2 r_n \equiv \frac{r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1}}{(\Delta x)^2} \quad (28)$$

$$\Delta_4 r_n \equiv \frac{r_{n+2} - 4r_{n+1} + 6r_n - 4r_{n-1} + r_{n-2}}{(\Delta x)^4}, \quad (29)$$

y Δx es la separación entre posiciones en el sistema discreto. González-Pérez-Sandi *et al.* encontraron que la ecuación (27) tiene solitones discretos brillantes y oscuros, si los coeficientes de la ecuación satisfacen ciertas condiciones. Los solitones brillantes, en particular, tienen la forma:

$$r_n = A e^{-iCt} \operatorname{sech}(Bn\Delta x), \quad (30)$$

donde los valores de las constantes A , B y C se obtienen a partir de un complicado sistema de ecuaciones algebraicas.

Para saber, si el solitón (30) está o no embebido es necesario determinar si su frecuencia interna está dentro del rango de frecuencias permitidas para las ondas lineales (*i.e.*, dentro del rango de la relación de dispersión). Debemos observar que en este caso es menester fijarse en las frecuencias (en lugar de los números de onda) porque en la ecuación (27) la variable de evolución es *el tiempo*, a diferencia de lo que ocurría en la ecuación (16), en la cual la variable de evolución era la distancia de propagación a lo largo del medio no lineal. En la referencia (González, 2004) se muestra que el valor de c cae dentro del rango de la relación de dispersión si se cumplen las dos desigualdades siguientes:

$$1 - \cosh(B\Delta x) < \frac{\varepsilon_2 (\Delta x)^2}{2\varepsilon_4} < 3 - \cosh(B\Delta x) \quad [31]$$

Dependiendo de los coeficientes de la ecuación, estas desigualdades pueden o no cumplirse. En el caso en que se cumplan, el solitón (30) será un *solitón embebido discreto*, de lo contrario será un solitón discreto normal (*i.e.*, no embebido).

Conclusiones

Los solitones embebidos son ondas solitarias de gran interés, ya que existen bajo condiciones en las que hasta hace poco se creía que era imposible la existencia de solitones. Como hemos visto en las secciones anteriores, el campo de los solitones embebidos es un campo bastante nuevo, pero en el cual se ha avanzado más rápido de lo que se esperaba al principio. Inicialmente (por 1997-1998) se tuvo la impresión de que la existencia de estos solitones era un resultado extraño y aislado, y que si bien se presentaba en la ecuación (16), difícilmente aparecería en otra ecuación. Sin embargo, los resultados encontrados poco después demostraron que hay múltiples sistemas en los cuales estos solitones pueden existir. En el lapso de cinco años se encontró que aparecen solitones embebidos en hidrodinámica, óptica, cristales líquidos, e inclusive en sistemas discretos. Se vio que los solitones embebidos pueden ser entes aislados, o presentarse en familias. Se encontró también que si bien la mayoría de estos solitones son semiestables, cuando se presentan en familias pueden ser estables.

El descubrimiento de los solitones embebidos muestra que las resonancias destructivas, que aparentemente parecerían impedir la propagación de ondas solitarias en muchos sistemas no lineales, pueden (en ciertos casos) ser canceladas por la acción de términos no lineales de orden superior. Esta idea sugiere que posiblemente se puedan encontrar solitones embebidos en muchos sistemas no lineales aún no estudiados.

Aparte de la búsqueda de otros sistemas no lineales con solitones embebidos, la investigación matemática rigurosa de estos peculiares solitones es otro campo que apenas empieza a explorarse, y en el cual seguramente hay mucho por hacer.

Bibliografía

- Agrawal, G.P. (1989). *Nonlinear Fiber Optics*. Cap. 2. Academic Press.
- Akhmediev, N. N. y Karlsson, M. (1995). *Phys. Rev. A* 51. 2602.
- Akhmediev, N. N.; A. Buryak and M. Karlsson (1994). *Opt. Commun.* 110. 540.
- Buryak, A. V. y N. N. Akhmediev (1995). *Phys. Rev. E*. 51. 3572.
- Chapman, A. R.; B. A. Malomed y M. J. Friedman (1998). *Phys. Rev. Lett.* 80. 4169.

- Champneys, A. R. y B. A. J. Malomed (1999). *Phys A* 32. L547.
- Champneys, A. R. y B. A. Malomed (2000). *Phys. Rev. E* 61. 886.
- Drazin, P. G. y R. S. Johnson (1989). *Solitons: an Introduction*. Cambridge University Press.
- Espinosa-Cerón, A.; J. Fujioka y A. Gómez-Rodríguez (2003). *Rev. Mex. Fís.* 49. 493.
- Espinosa-Cerón, A.; J. Fujioka y A. Gómez-Rodríguez (2003). *Physica Scripta*. 67. 314.
- Fujioka, J. y A. J. Espinosa (1997). *Phys. Soc. Japan*. 66. 2601.
- Fujioka, J. (2003). *NLS: una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger*. Serie FENOMECC, UNAM, México.
- Gatz, S. y J. Herrmann (1991). *J. Opt. Soc. Am. B* 8. 2296.
- Gatz, S. y J. Herrmann (1992). *Opt. Lett.* 17. 484.
- González-Pérez-Sandi, S., J. Fujioka y B. A. Malomed (2004). *Physica D* 197. 86.
- Höök, A. y M. Karlsson (1993). *Opt. Lett.* 18. 1388.
- Herrmann, J. (1991). *J. Opt. Soc. Am. B* 8. 1507.
- Herrmann, J. (1992). *Opt. Commun.* 87. 161.
- Hickmann, J. M. *et al.* (1993) *Opt. Lett.* 18. 182.
- Kivshar, Y. S. y G. P. Agrawal (2003). *Optical Solitons*. Cap. 1. Academic Press, San Diego, CA.
- Kuehl, H. H. y C. Y. Zhang (1990). *Phys. Fluids* B2. 889.
- Karlsson, M. y A. Höök (1994). *Opt. Commun.*, 104. 303.
- Krolikowski, W. y B. Luther-Davies (1993). *Opt. Lett.* 18. 188.
- Mak, W. C. K.; B. A. Malomed y P. L. Chu (1998). *Phys. Rev. E* 58. 6708.
- Pelinovsky, D. E. y J. Yang (2002). *Proc. R. Soc. Lond. A* 458. 1.
- Rodríguez, R. F.; J. A. Reyes; A. Espinosa-Cerón; J. Fujioka y B. A. Malomed (2003). *Phys. Rev. E* 68. 036606-1/14.
- Toda, M. (1989). *Nonlinear Waves and Solitons*. Cap. 5, KTK Scientific Publishers, Tokyo.
- Wai, P. K. A.; H. H. Chen y Y. C. Lee (1990). *Phys. Rev. A* 41. 426.
- Wai, P. K. A.; C. R. Menyuk; Y. C. Lee y H. H. Chen (1986). *Opt. Lett.* 11. 464.
- Yang, J.; B. A. Malomed y D. J. Kaup (1999). *Phys. Rev. Lett.* 83. 1958.
- Yang, J. (20003). *Studies in Applied Mathematics* 106. 337.
- Zabusky, N. J. y M. D. Kruskal (1965). *Phys. Rev. Lett.* 15. 240.

La Colmena
Revista de la Universidad Autónoma del Estado de México

50
abril-junio
2006

INFORMES:
Francisco de P. Castañeda No. 105,
Col. Universidad, Toluca, Estado de México, C.P. 30150
Teléfonos: (722) 2 77 38 35 y 2 77 38 36
E-mail: lacolmena@uaemex.mx
Página electrónica: <http://www.uaemex.mx/plin/colmena/home.html>

50

Three small images of the journal cover are shown, one upright and two tilted. The background features a large, faint watermark of a beehive and the text 'La Colmena'.