

César Gutiérrez

Ondas no lineales en el plasma

Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001

Universidad Autónoma del Estado de México

México

Available in: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10402203>



Ciencia Ergo Sum,

ISSN (Printed Version): 1405-0269

ciencia.ergosum@yahoo.com.mx

Universidad Autónoma del Estado de México

México

[How to cite](#)

[Complete issue](#)

[More information about this article](#)

[Journal's homepage](#)

www.redalyc.org

Non-Profit Academic Project, developed under the Open Acces Initiative

Ondas no lineales en el plasma

CÉSAR GUTIÉRREZ TAPIA*

Resumen. *El plasma por naturaleza es un medio fuertemente no lineal. Una parte importante de la física del plasma la constituye su electrodinámica, donde la interacción no lineal de ondas es muy importante para estudiar una gran gama de procesos no lineales que ocurren en él. En este trabajo se describe de forma introductoria la electrodinámica no lineal del plasma y en el marco de la interacción no lineal de ondas se describen algunos de los procesos más importantes que ocurren en el plasma.*

Palabras clave: *plasma, ondas, interacción, inestabilidad.*

Non Linear Waves in Plasma

Abstract. *By virtue of its nature, plasma is a non linear substance. An important part of Plasma Physics is linked to the electrodynamics of the plasma, where the non linear interaction of waves is essential for studying a whole gamut of non linear processes that occur in plasma. This work describes in introductory form the non-linear electrodynamics of the plasma; and within the framework of the non linear interaction of waves, it also describes some of the most important processes that occur in plasma.*

Keywords: *plasma, waves, interaction, instability.*

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 14 de mayo de 2001

Introducción

El plasma consiste en un gas ionizado cuasi-neutro, en el cual la región de cuasineutralidad del plasma debe ser mayor que el radio de Debye ($r_D = (\sqrt{kT_e}/4\pi e^2 N_e)$) y el tiempo en que esta neutralidad se mantiene debe ser mayor que el inverso de la frecuencia plásmica de los electrones ($\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_e}$), donde e , n_e y m_e son la carga, la densidad y la masa del electrón, respectivamente.

En la física de plasmas, se estudian siete grandes áreas: los plasmas de baja temperatura; plasmas no neutros; fusión nuclear por confinamiento inercial; fusión nuclear por confinamiento magnético; haces, aceleradores y fuentes de radiación coherente; plasmas espaciales y plasmas astrofísicos.

La física de plasmas juega un papel importante en las investigaciones relacionadas con la fusión nuclear como una fuente de energía limpia y renovable. Para controlar el proceso de fusión, que es la fuente de energía del sol y las estrellas, debemos aprender a crear plasmas de deuterio y tritio (isótopos del hidrógeno) calientes y densos en el laboratorio. Existen dos grandes áreas en las investigaciones del proceso de fusión que son: las investigaciones relacionadas con el confinamiento inercial y aquellas relacionadas con el confinamiento magnético.

La importancia del estudio de la interacción no lineal de ondas en el plasma surge cuando se plantea el problema de la fusión termonuclear controlada con base en el confinamiento inercial (Langmair, 1925). La idea de este esquema consiste en lograr las reacciones de fusión aumentando la densidad

*Departamento de Física, ININ. Apartado Postal 18-1027. México, D.F. C.P. 11801. Facultad de Ciencias, UAEM.
Teléfono: (5) 329 72 00 ext. 2234. Correo electrónico: cgf@nuclear.inin.mx

del plasma y disminuyendo el tiempo de confinamiento del mismo para satisfacer el criterio de Lawson $n\tau > 2^{29} \text{ seg}/\text{m}^3$, donde n es la densidad del plasma y τ es el tiempo de confinamiento. Por ejemplo, si tenemos un plasma con densidad de $n \approx 10^{29}$, hay que confinarlo sólo por un tiempo del orden de millonésimas de segundo, y surge entonces el problema de cómo confinar este plasma. Con esta densidad y a una temperatura de 100 millones de grados Kelvin, la presión es mayor de un billón de atmósferas, por lo que aun con los campos magnéticos que podemos generar (\sim MGauss) no podríamos confinar el plasma. El problema de cómo confinar este plasma originó la idea del confinamiento inercial, el cual con base en los experimentos realizados con las bombas de hidrógeno se puso de manifiesto que una cierta cantidad de masa con una densidad y temperatura muy altas, los gases que surgen en la explosión no se expanden de forma instantánea, sino de forma lenta, ya que surgen las fuerzas de inercia, las cuales retardan la expansión. En este tiempo, en el plasma se alcanza a generar una gran cantidad de energía. Esta forma de confinamiento, cuando nada confina al plasma, se llama *confinamiento inercial*.

A diferencia del confinamiento inercial, en el *confinamiento magnético* se pretende alcanzar altas temperaturas y tiempos de confinamiento largos, de acuerdo con el criterio de Lawson (Martinell, 1995). Es importante mencionar que uno de los principales problemas a resolver en el confinamiento magnético es entender el transporte de partículas y energía hacia las paredes del contenedor en el marco de las teorías de turbulencia.

La forma de realizar el confinamiento inercial es mediante el uso de un sistema de láseres de gran potencia (\sim MJoules). Resultó que si se emplea una cápsula, de una mezcla de deuterio-tritio y se comprime con los láseres, se aumenta la densidad de la cápsula, y al mismo tiempo se disminuye su tamaño. El esquema para describir cómo ocurren las reacciones de fusión es el siguiente: el sistema de láseres comprime la cápsula de deuterio-tritio de tal manera que la compresión y el calentamiento de la superficie de la cápsula se incrementen de manera suave. Al principio, la potencia de los láseres no debe ser tan grande, sino que en el lapso de un tiempo corto ésta debe crecer abruptamente. Es decir, casi toda la energía de los láseres se debe gastar en el último momento. Esto equivale a decir que la primer mitad de la energía de los láseres se gasta en la compresión de la cápsula y la otra mitad en el calentamiento hasta alcanzar la temperatura para que las partículas rompan el potencial de Coulomb y ocurran las reacciones de fusión.

Es bien conocido que un plasma real es bastante complejo. En éste se desarrollan una gran variedad de formas de ruido

y oscilaciones que surgen de forma espontánea en el plasma. Langmuir fue el primero que consideró que las fluctuaciones presentes en el plasma representan oscilaciones alrededor de ciertas posiciones de equilibrio, las cuales determinan totalmente lo que ocurre en un plasma (Langmuir, 1927; Vedenov, 1967). La naturaleza no lineal del plasma se ha estudiado por diferentes métodos, tales como la teoría de la electrodinámica no lineal (Kadomtsev, 1965; Kovrizhnikh, 1965; Tsitovich, 1970; Akhiezer y Polovin, 1975; Sagdeev y Galeev, 1969; Gorbunov, 1964) y los métodos hamiltonianos (Sagdeev, Usikov y Zaslavsky, 1988).

Existe una gran gama de procesos no lineales que ocurren en el plasma y que tienen diferentes implicaciones, como son las inestabilidades paramétricas descubiertas por primera vez en 1962 y relacionadas con las inestabilidades de dispersión (Duderstadt y Moses, 1982). Estas inestabilidades generalmente tienen un umbral con respecto a las amplitudes de las ondas incidentes y se basan en la interacción resonante de las ondas. En el caso más simple, esta resonancia es la resonancia en el espacio y tiempo de los modos correspondientes con respecto al modo fundamental, o a otros armónicos de mayor orden. Estas condiciones se pueden escribir como (Sagdeev y Galeev, 1969)

$$n\omega_0 = \omega_1 + \omega_2; nk_0 = k_1 + k_2, n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde ω_0 , k_0 son la frecuencia y el vector de la onda incidente ω_1, k_1 ; ω_2, k_2 son las frecuencias y los vectores de onda de las ondas excitadas en las inestabilidades.

Otro aspecto de los procesos no lineales del plasma son los fenómenos colectivos del plasma, como es la radiación en el diapason de las ondas de Langmuir y ciclotrónicas (Oraevskii y Sagdeev, 1962) donde sus frecuencias varían en el tiempo a intervalos de tiempo relativamente cortos. Un objeto muy importante donde se estudian estos procesos no lineales es la magnetósfera de la tierra (Garnett, 1974). Estos procesos están íntimamente relacionados con la formación de estructuras llamadas solitones (Petviashvili, 1980).

Las aplicaciones de los plasmas de baja temperatura, sobre todo en el área de ciencia de materiales, actualmente son muy importantes, donde los fenómenos colectivos (no lineales) juegan un papel fundamental (Camps *et al.*, 1995; Gutiérrez-Tapia y Arzate-Plata, 1997; Lieberman y Lichtenberg, 1994).

En este trabajo se da una introducción a la electrodinámica no lineal del plasma para explicar algunos de los procesos más conocidos en la interacción no lineal de ondas en un plasma y se describen algunos de los procesos no lineales más importantes que ocurren en el plasma. En la sección I se

obtiene la ecuación material no lineal; en la sección II se muestra de forma general el surgimiento de los procesos no lineales; en la sección III se obtiene la ecuación no lineal reducida; en la sección IV con base en la ecuación no lineal reducida se describe la interacción de tres ondas; en la sección V se muestra la existencia de leyes de conservación en el caso de la interacción no lineal de tres ondas; en la sección VI se describen algunos ejemplos de procesos no lineales que ocurren en el plasma. Finalmente, se discuten los principales resultados del trabajo.

I. Ecuación material no lineal

En campos electromagnéticos débiles se puede considerar que la reacción del medio (a través de una corriente o de la inducción de otros campos) es proporcional a la tensión del campo. En esta suposición se basa la electrodinámica lineal en los límites de la cual es válido el principio de superposición.

En campos más intensos, la aproximación lineal deja de ser válida. Esto significa que la reacción del medio ya no será proporcional a la tensión del campo, sino que surge una relación más compleja con la tensión del campo. Si la no linealidad es débil, su tratamiento se logra con la introducción de términos que contengan potencias de la intensidad del campo de más alto orden en la ecuación material que determina la reacción del medio.

Si despreciamos la dispersión (retardamiento y no localidad de la reacción del medio) y consideramos que el medio es isótropo, entonces la reacción del medio se puede proponer en la forma

$$D = \epsilon E + \epsilon^3 E^2 E + \dots \quad (1)$$

En un medio no isótropo, donde se tienen direcciones determinadas, la ecuación material contiene términos cuadráticos con respecto al campo eléctrico, es decir

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j + \epsilon_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \epsilon_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \quad (2)$$

Para introducir la dispersión temporal y espacial se puede, como en la electrodinámica clásica, considerar que la permitividad dieléctrica tiene la forma

$$D_i(x, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d r' \epsilon_{ij}(t-t', r-r') E_j(t', r') + \int_{-\infty}^t dt' \int d r' \int_{-\infty}^t dt'' \int d r'' \epsilon_{ijkl}(t-t', r-r', t''-t'', r''-r'')$$

$$\times E_j(t', r') E_k(t'', r'') + \dots \quad (3)$$

Al suponer la serie anterior de la permitividad dieléctrica se considera que esta serie converge, ya que los términos de orden más alto serán menores que los de orden menor. Aquí es importante señalar que el parámetro pequeño será el cociente de la magnitud de los campos considerados entre la magnitud de los campos que surgen entre las partículas del medio. Este parámetro se escribe en la forma

$$E_{ext}/E_{int}$$

donde E_{ext} y E_{int} indican los campos externos e internos, respectivamente. Los campos internos son los que determinan la energía interna del medio, por lo que la relación mencionada entre los campos se puede representar como una relación entre la densidad de energía del medio W y la densidad de energía interna W_0 . Para el caso de un plasma, esta condición indica que $E^2 < NT$ (N es el número de partículas en unidad de volumen y T la temperatura) y la aproximación lineal es válida, en caso contrario los efectos no lineales serán más importantes.

Es frecuente usar la ecuación material con exactitud de hasta cierta potencia del campo. Si se consideran sólo los términos proporcionales a E^2 , se dice que se tiene una aproximación cuadrática; si se consideran términos proporcionales a E^3 , se dice que se tiene una aproximación cúbica y así sucesivamente.

II. Principales procesos no lineales

Antes de analizar las ecuaciones de la electrodinámica no lineal y sus soluciones, veamos los principales procesos (efectos) que surgen por la no linealidad de las propiedades del medio.

Empecemos por la aproximación cuadrática que tiene lugar en un medio no isótropo sin dispersión. Si en dicho medio se propaga una onda y el campo eléctrico en el medio varía en la forma

$$E = \frac{1}{2} \{ E_{10} e^{-i\omega t + i k_1 r} + c.c. \}$$

debido a la no linealidad de la ecuación material en el medio, surge una inducción la cual varía por otra ley. De acuerdo a la ecuación (2), la inducción contiene ahora términos cuadráticos,

$$D_i^{(nl)} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \{ E_{10j} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} + c.c. \} \frac{1}{2} \{ E_{10k} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} \} \quad (4)$$

Es importante mencionar que la inducción es una fuente de campo, por lo que además del campo de la onda incidente surge un campo con una dependencia espacio-temporal de la forma $e^{-2i\omega_1 + 2ik_1 r}$. En otras palabras, en un medio no lineal, cuando se propaga una onda siempre surge el segundo armónico, además de que surgen términos constantes que no dependen de las coordenadas y del tiempo. Esto significa que surge un campo homogéneo y constante, o una corriente eléctrica.

Veamos ahora el caso cuando sobre el medio inciden dos ondas con diferentes frecuencias, en la forma

$$E_1 = \frac{1}{2} \{ E_{10} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} + c.c. \},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \{ E_{20} e^{-i\omega_2 t + ik_2 r} + c.c. \}.$$

Es claro que además de los efectos que genera cada una de las ondas, surgen otros relacionados con sus interacciones determinados por los campos de ambas ondas. En el medio surge una inducción en la frecuencia $\omega_1 + \omega_2$ y el vector de onda $k_1 + k_2$, y también en la diferencia de frecuencias $\omega_1 - \omega_2$, así como en la diferencia de los vectores de onda $k_1 - k_2$. La inducción y la corriente son fuentes de campo y estos campos se llaman campos mezclados.

Consideremos ahora un medio isótropo, donde es posible únicamente la aproximación cúbica. Si sobre este medio incide una onda con frecuencia ω_1 y vector de onda k_1 , entonces junto a la inducción lineal también surge la inducción no lineal (ver ecuación 1),

$$D = \frac{\epsilon}{2} (E_{10} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} + c.c.)$$

$$+ \frac{\epsilon^{(3)}}{4} (E_{10}^2 e^{-2i\omega_1 t + 2ik_1 r} + 2|E_{10}|^2 + E_{10}^{*2} e^{2i\omega_1 t - 2ik_1 r}) \frac{1}{2} (E_{10} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} + c.c.).$$

Se observa que la aproximación cúbica conduce a la aparición del tercer armónico de la onda incidente en la frecuencia $3\omega_1$ y con un vector de onda $3k_1$. Además, la permitividad dieléctrica de la propia onda varía en la forma

$$\epsilon_{eff} = \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon^{(3)} |E_{10}|^2 \quad (5)$$

Si sobre el medio isótropo inciden dos ondas con frecuencias ω_1 y ω_2 , y vectores de k_1 y k_2 , entonces surge una inducción en las frecuencias mezcladas $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_2 \pm \omega_1$ y correspondientemente con vectores de onda $2k_1 \pm k_2$ y $k_2 \pm k_1$. Además, la permitividad dieléctrica (5) resulta ahora una función de ambas ondas. Este efecto se conoce como *modulación cruzada*.

III. Ecuación no lineal reducida

Las ecuaciones de Maxwell son válidas también para un medio no lineal. Si se considera que no hay fuentes externas, entonces estas ecuaciones se pueden reducir a una ecuación de la forma

$$\nabla \times (\nabla \times E) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Sin embargo, la inducción en este caso se relaciona con el campo de manera no lineal. La solución de la ecuación no lineal de segundo orden es un problema matemático muy complicado, por lo que es recomendable reducirlo. Esta reducción consiste en la suposición de que las ondas son monocromáticas y sus amplitudes varían lentamente en un periodo y en una longitud de onda. En este caso, vamos a suponer que en el medio se propagan muchas ondas. El campo de estas ondas se puede representar en la forma

$$E(r,t) = \int_0^\infty d\omega dk e^{-i\omega t + ikr} E_0(r,t,\omega,k) + \int_0^\infty d\omega dk e^{i\omega t - ikr} E_0^*(r,t,\omega,k) \\ = 2\text{Re} \int_0^\infty d\omega dk e^{-i\omega t + ikr} E_0(r,t,\omega,k). \quad (7)$$

Otra forma para describir este campo consiste en realizar los cambios $\omega \rightarrow -\omega$, $k \rightarrow -k$ de donde

$$E(r,t) = 2\text{Re} \int_{-\infty}^0 d\omega dk e^{-i\omega t + ikr} E_0^*(r,t;-\omega,-k) \quad (8)$$

donde

$$E_0^*(r,t;-\omega,-k) = E_0(r,t;\omega,k). \quad (9)$$

En resumen, se puede utilizar la forma

$$E(r,t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega dk E_0(\omega,k) e^{-i\omega t + ikr} \quad (10)$$

con la condición adicional (9). Aquí se ha obviado la dependencia con respecto a r y t en la amplitud E_0 de la parte derecha.

Para obtener un conjunto discreto de ondas, de (10) hay que considerar diferentes de cero aquellas amplitudes que correspondan a ciertos valores de frecuencias. Así, por ejemplo, si tenemos únicamente una onda, entonces obtenemos

$$E_0(\omega, k) = E_{10} \delta(\omega - \omega_1) \delta(k - k_1) + E_{10}^* \delta(\omega + \omega_1) \delta(k + k_1),$$

de donde sustituyendo esta expresión en (10), obtenemos

$$E(r, t) = E_{10} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} + c.c.$$

Veamos ahora la ecuación material en un medio no lineal. Por simplicidad despreciemos la dispersión y consideremos un medio anisótropo con una no linealidad cuadrática. Para esto sustituimos (10) en (3) y en el término no lineal hacemos un cambio de variables $\omega' + \omega'' = \omega$, $k' + k'' = k$. Como resultado obtenemos

$$D_i(r, t) = \int d\omega dk e^{-i\omega t + ik r} \left\{ \epsilon_{ij} E_{10}(\omega, k) + \epsilon_{ijk} \int d\omega' dk' E_{0j}(\omega', k') E_{0k}(\omega - \omega', k - k') \right\} \quad (11)$$

Esta expresión se puede considerar como la definición de la amplitud de la inducción no lineal en la frecuencia ω y con el vector de onda k ,

$$D_{i0}(\omega, k) = \epsilon_{ij} E_{0j}(\omega, k) + \epsilon_{ijk} \int d\omega' dk' E_{0j}(\omega', k') E_{0k}(\omega - \omega', k - k'). \quad (12)$$

Sustituyendo (10) en (6) y despreciando las segundas derivadas con respecto a las coordenadas y el tiempo de la amplitud, obtenemos

$$-k \times (k \times E_0) + 2i(k \times (\nabla \times E_0)) - \frac{\omega^2}{c^2} D_0$$

$$- 2i \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial D_0}{\partial t} = 0.$$

Ahora sustituimos (12) en esta ecuación y separamos la parte hermitiana y antihermitiana del tensor

$$\epsilon_{ij} (\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^H + \epsilon_{ij}^A),$$

$$-k_l (k \cdot E_0) + k^2 E_{0i} + 2i(k_l \frac{\partial E_{0l}}{\partial x_i} - k_l \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l})$$

$$- \frac{\omega}{c^2} \left\{ \epsilon_{ij}^H E_{0j} + \epsilon_{ij}^A E_{0j} + \epsilon_{ijl} \int d\omega' dk' E_{0j}(\omega', k') E_{0l}(\omega - \omega', k - k') \right\} - 2i \frac{\omega}{c^2} \left\{ \epsilon_{ij}^H \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \epsilon_{ij}^A \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \epsilon_{ijl} \frac{\partial}{\partial t} \dots \right\} = 0. \quad (13)$$

En primer lugar vamos a considerar que la amplitud del campo es constante. Si consideramos la variación de la amplitud, en la teoría lineal esto se relaciona con la transferencia y disipación de energía. En la teoría no lineal, surge además la interacción entre ondas. Al considerar este efecto, a órdenes bajos, tenemos

$$2i \left(k_l \frac{\partial E_{0l}}{\partial x_i} - k_l \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \epsilon_{ij}^A E_{0j} + \epsilon_{ijl} \int d\omega' dk' E_{0l}(\omega - \omega', k - k') E_{0j}(\omega', k') \right\} - 2i \frac{\omega}{c^2} \epsilon_{ij}^H \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} = 0,$$

donde se han despreciado los términos del tipo $\epsilon_{ij}^A \frac{\partial}{\partial t}$ y $\epsilon_{ijl} \frac{\partial}{\partial t} \dots$. Para obtener una ecuación parecida a las ecuaciones que se utilizan en la teoría lineal multiplicamos esta última ecuación por el vector de polarización $e = \frac{E_0}{E_0}$ y dividimos entre $\frac{i}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i \epsilon_{ij}^H e_j) = \frac{2i\omega}{c^2} e_i \epsilon_{ij}^H e_j$. Como resultado obtenemos la ecuación reducida, la cual determina la variación de la amplitud de la onda con frecuencia ω y vector de onda k ,

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} + v^{(g\gamma)} \frac{\partial E_0}{\partial r} + \gamma E_0(\omega, k) = \int d\omega' dk' a(\omega', k') E_0(\omega', k') E_0(\omega - \omega', k - k'), \quad (14)$$

donde

$$v^{(g\gamma)} = \frac{c^2 [k - e(k \cdot e)]}{\omega e_i \epsilon_{ij}^H e_j} \quad (15)$$

$$\gamma = - \frac{i\omega}{2} \frac{e_i \epsilon_{ij}^A e_j}{e_i \epsilon_{ij}^H e_j}, \quad (16)$$

$$a(\omega', k') = - \frac{i\omega}{2} \frac{e_i(\omega) \epsilon_{ijl} e_j(\omega') e_l(\omega - \omega')}{e_i(\omega) \epsilon_{ij}^H e_j(\omega)} \quad (17)$$

son la velocidad de grupo, el coeficiente de amortiguamiento y el coeficiente de correlación no lineal de las ondas.

Cuando se considera la dispersión, la ecuación material en un medio no lineal (3) contiene bajo el signo de integral el núcleo ϵ_{ijk} que depende de las coordenadas y del tiempo. Esto conduce a que en la ecuación (14) el tensor ϵ_{ijk} sea función de las frecuencias y los vectores de onda, aunque la forma de la ecuación no cambie, esto es

$$\epsilon_{ijk}(\omega, k, \omega', k') = \int_0^\infty d\tau \int d\rho \int_0^\infty d\tau' \int d\rho' e^{i\omega\tau - ik\rho + i\omega'\tau' - ik'\rho'} \epsilon_{ijk}(\tau, \rho; \tau', \rho'). \quad (18)$$

El sentido de la ecuación reducida para la amplitud de la onda con frecuencia ω y vector de onda k es bastante simple. En esta ecuación, junto a la transferencia y disipación de energía, se considera la interacción no lineal de las ondas. Esto significa que con dicha onda interactúan cualquier par de ondas tales que la suma de sus frecuencias y de sus vectores de onda sean iguales a la frecuencia y el vector de onda de la onda considerada.

IV. Interacción de tres ondas

De acuerdo con Tsitovich (1970), vamos a considerar que en el medio se tienen sólo tres ondas con frecuencias $\omega_{1,2,3}$ y vectores de onda $k_{1,2,3}$ respectivamente. En este ejemplo analizaremos un proceso elemental de la interacción no lineal de ondas.

Iniciamos por la deducción de las ecuaciones para las amplitudes. Para esto suponemos que en la ecuación (10) son diferentes de cero únicamente las amplitudes de tres ondas, de donde

$$E_0(\omega, k) = E_1\delta(\omega - \omega_1)\delta(k - k_1) + E_1^*\delta(\omega + \omega_1)\delta(k + k_1) + E_2\delta(\omega - \omega_2)\delta(k - k_2) + E_2^*\delta(\omega + \omega_2)\delta(k + k_2) + E_3\delta(\omega - \omega_3)\delta(k - k_3) + E_3^*\delta(\omega + \omega_3)\delta(k + k_3) \quad (19)$$

Sustituyendo este conjunto de términos en (14) obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \gamma\right) [E_1\delta(\omega - \omega_1)\delta(k - k_1) + \dots] = \int d\omega' dk' a(\omega', k') [E_1\delta(\omega - \omega' - \omega_1)\delta(k - k' - k_1) + \dots] \times [E_1\delta(\omega' - \omega_1)\delta(k' - k_1) + \dots] \quad (20)$$

En la parte derecha de esta expresión se tienen 36 términos, a cada término corresponden diferentes efectos no

lineales. Por ejemplo, el término $E_1^2\delta(\omega - 2\omega_1)\delta(k - 2k_1)$ describe la generación del segundo armónico de la primera onda. Términos análogos surgen para otras ondas. Los procesos relacionados con la interacción no lineal de tres ondas son los términos

$$E_1E_2\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2), E_1E_2^*\delta(\omega - \omega_1 + \omega_2),$$

$$E_1E_3^*\delta(\omega - \omega_1 + \omega_3), E_1^*E_2^*\delta(\omega + \omega_1 + \omega_3),$$

$$E_1E_3\delta(\omega - \omega_1 - \omega_3),$$

y así sucesivamente (en total 16 términos). Sin embargo, no es necesario considerar todos los términos si se asume que $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$. Como por ejemplo, el término $E_1E_2^*\delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)$ corresponde a la excitación de una onda con frecuencia ω_3 , pero como $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ este término hay que despreciarlo.

Para obtener una ecuación para la amplitud de la primera onda, mantenemos en la parte izquierda únicamente el término proporcional a $\delta(\omega - \omega_1)\delta(k - k_1)$ y en la parte derecha sólo los términos proporcionales a la amplitud de la segunda y tercera onda que contienen el término $\delta(\omega - \omega_3 - \omega_2)\delta(k - k_3 + k_2)$. Este término es único y precisamente describe el proceso de interacción de tres ondas, donde se satisface la condición

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, k_3 = k_1 + k_2. \quad (21)$$

Como resultado, para la amplitud de la primera onda obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_1\right) E_1 = a_{23} E_2^* E_3 \quad (22)$$

donde, v_1 y γ_1 son la velocidad de grupo y el decremento de la primera onda respectivamente; el coeficiente considera la interacción no lineal de las ondas 2 y 3 de acuerdo con (17) (los índices indican la polarización de las ondas)

$$a_{23} = -\frac{i\omega_1}{2} \frac{e_{i1} \epsilon_{ijl} e_{j2} e_{l3}}{e_{i1} \epsilon_{ij}^H e_{j1}}$$

De forma análoga se obtiene la ecuación para la segunda onda. En la parte izquierda sólo se considera el término proporcional a $E_2\delta(\omega - \omega_2)\delta(k - k_2)$, y en la parte derecha el término proporcional a $\delta(\omega + \omega_1 - \omega_3)$.

Como resultado obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_2\right) E_2 = a_{13} E_1^* E_3 \quad (23)$$

donde

$$a_{13} = -\frac{i\omega_2 e_{i2} \epsilon_{ijl} e_{jl} e_{l3}}{2 e_{i2} \epsilon_{ij}^H e_{j2}} \quad (24)$$

Para obtener las ecuaciones para la tercera onda en la parte izquierda se mantiene el término proporcional a $E_3 \delta(\omega - \omega_3) \delta(k - k_3)$, y en la parte derecha el término proporcional a $\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_3 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_3\right) E_3 = a_{12} E_1^* E_2, \quad (25)$$

donde

$$a_{12} = -\frac{i\omega_3 e_{i3} \epsilon_{ijl} e_{jl} e_{l2}}{2 e_{i3} \epsilon_{ij}^H e_{j3}} \quad (26)$$

El sistema de ecuaciones (22)-(26) describe la interacción no lineal de tres ondas, donde la frecuencia más grande es ω_3 y se satisfacen las condiciones (21). Estas condiciones se conocen como *relaciones de dispersión*. Este nombre se relaciona con la analogía cuántica, ya que si multiplicamos (21) por la constante de Planck \hbar obtenemos la Ley de Conservación de Energía y Momento. Por lo anterior, el proceso de interacción de tres ondas se puede estudiar como el proceso de descomposición del cuanto 3 en los cuantos 1 y 2. Es obvio que es posible el proceso inverso, llamado proceso de suma de ondas. Es importante señalar que el proceso de interacción no lineal es local e instantáneo en el tiempo. Para que este proceso ocurra son necesarias determinadas regiones de espacio y cierto intervalo de tiempo, por lo que las condiciones (21) tienen el sentido de condiciones de sincronismo de fase en el tiempo y el espacio. En otras palabras, dos ondas interactúan con una tercera si estas forman un campo no lineal, el cual varía en el tiempo y espacio igual que el campo de la tercera onda.

V. Leyes de conservación en la interacción de ondas

De acuerdo con las ecuaciones (22)-(26), la variación de la amplitud de cada una de las tres ondas en cada punto del espacio y del tiempo se relaciona con la expulsión de la onda de este punto, por la disipación y la interacción de las ondas

una con otra. Si se desprecia la disipación, entonces queda únicamente la interacción entre ondas y es obvio que en esta aproximación el sistema de tres ondas es cerrado. En tales sistemas se tienen determinadas leyes de conservación.

Para determinar estas leyes de conservación escribimos las ecuaciones (22)-(26) en la forma

$$2e_{i1} \epsilon_{ij}^H e_{j1} \left(\frac{\partial E_1}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial E_1}{\partial r}\right) = -iw_1 e_{i1} \epsilon_{ijl} e_{j2} e_{l3} E_2^* E_3, \quad (27)$$

$$2e_{i2} \epsilon_{ij}^H e_{j2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial t} + v_2 \cdot \frac{\partial E_2}{\partial r}\right) = -iw_2 e_{i2} \epsilon_{ijl} e_{j1} e_{l3} E_1^* E_3, \quad (28)$$

$$2e_{i3} \epsilon_{ij}^H e_{j3} \left(\frac{\partial E_3}{\partial t} + v_3 \cdot \frac{\partial E_3}{\partial r}\right) = -iw_3 e_{i3} \epsilon_{ijl} e_{j1} e_{l2} E_1 E_2, \quad (29)$$

Multiplicando la primer ecuación por E_1^* y sumando a su complejo conjugado, obtenemos en la parte izquierda el término $2e_{i1} \epsilon_{ij}^H e_{j1} (\partial|E_1|^2 / \partial t + v_1 \partial|E_1|^2 / \partial r)$, el cual multiplicado por $1/16\pi$ nos permite obtener la ecuación para la energía en la forma

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial r} = -\frac{i\omega_1}{16\pi} e_{i1} \epsilon_{ijl} e_{j2} e_{l3} (E_1^* E_2^* E_3 - E_1 E_2 E_3^*). \quad (30)$$

En la deducción de (30) se supuso que el tensor dieléctrico no lineal es real, lo cual es válido en el caso cuando no hay disipación.

De forma análoga, de las ecuaciones (23)-(26) se obtienen las ecuaciones para W_2 y W_3 en la forma

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + v_2 \cdot \frac{\partial W_2}{\partial r} = -\frac{i\omega_2}{16\pi} e_{i2} \epsilon_{ijl} e_{j1} e_{l3} (E_1^* E_2^* E_3 - E_1 E_2 E_3^*), \quad (31)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + v_3 \cdot \frac{\partial W_3}{\partial r} = -\frac{i\omega_3}{16\pi} e_{i3} \epsilon_{ijl} e_{j1} e_{l2} (E_1 E_2 E_3^* - E_1^* E_2^* E_3), \quad (32)$$

Algunas de las propiedades de simetría de los tensores ϵ_{ijk} son

$$e_{i1} \epsilon_{ijl} e_{j2} e_{l3} = e_{1j} \epsilon_{ijl} e_{i2} e_{l3} = e_{j1} \epsilon_{ijl} e_{i2} e_{l3} = e_{i2} \epsilon_{ijl} e_{j1} e_{l3}, \quad (33)$$

$$e_{i1} \epsilon_{ijl} e_{j2} e_{l3} = e_{i1} \epsilon_{jil} e_{j2} e_{l3} = e_{j1} \epsilon_{jil} e_{i2} e_{l3} = e_{i3} \epsilon_{ijl} e_{j1} e_{l2}. \quad (34)$$

De esta manera, en las partes derechas de las ecuaciones (30)-(32) aparecen los mismos múltiplos. Dividiendo las

ecuaciones (30)-(32) entre las frecuencias correspondientes obtenemos

$$\frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{\omega_2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial t} + v_2 \cdot \frac{\partial W_2}{\partial r} \right) = \frac{1}{\omega_3} \left(\frac{\partial W_3}{\partial t} + v_3 \cdot \frac{\partial W_3}{\partial r} \right) \quad (35)$$

Esta igualdad relaciona la variación de las densidades de energía de tres ondas por su interacción entre ellas y se conoce como relación de Manley-Rowe.

Si las amplitudes de las ondas no dependen de las coordenadas, entonces todas los cambios ocurrirán en el tiempo. De acuerdo con (35) se tiene la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_2}{\omega_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_3}{\omega_3} \right) \quad (36)$$

A la cantidad $(W_\alpha/\omega_\alpha)=N_\alpha$ se le denomina como el número de cuantos. Este nombre tiene relación con el hecho de que de acuerdo con la mecánica cuántica, la energía de un cuanto es igual a $\hbar\omega_\alpha$. A esta onda le corresponde la densidad de energía W_α con la cual se puede relacionar cierta cantidad de cuantos. De acuerdo con (36), la disminución en unidad de tiempo del número de los cuantos con frecuencia ω_3 es igual al aumento del número de los cuantos con frecuencias ω_1 y ω_2 . Esto último proporciona un sentido más concreto de la interacción no lineal de ondas, como en el caso de los cuantos. Como resultado de un acto elemental de dispersión, la energía y el momento se conservan de acuerdo con las relaciones (21) y equivale a que el número de cuantos que surgen es igual al número de cuantos que decaen.

De la relación (36) se obtiene la Ley de Conservación de Energía para las otras ondas

$$\begin{aligned} \frac{dW_3}{dt} &= -\frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{dW_1}{dt} = -\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1} \frac{dW_1}{dt} \\ &= -\frac{dW_1}{dt} - \frac{dW_2}{dt} = -\frac{d}{dt} (W_1 + W_2), \end{aligned} \quad (37)$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = W = const. \quad (38)$$

Esta última relación indica que en una unidad de volumen la densidad total de energía para tres ondas se conserva.

Otra simplificación de la fórmula (35) se obtiene cuando las amplitudes de las ondas no dependen del tiempo, sino de las coordenadas. En este caso, de (35) tenemos

$$\frac{d}{dr} \frac{v_1 W_1}{\omega_1} = \frac{d}{dr} \frac{v_2 W_2}{\omega_2} = \frac{d}{dr} \frac{v_3 W_3}{\omega_3}. \quad (39)$$

El producto $v_\alpha W_\alpha$ es la densidad del flujo de energía de la onda α , y la cantidad $v_\alpha W_\alpha / \omega_\alpha$ determina la densidad de flujo de los cuantos, es decir, el número de cuantos que pasan por unidad de tiempo a través de una superficie. La relación (39) confirma que la disminución del flujo de cuantos de especie 3 en una capa infinitesimal es igual al aumento del flujo de cuantos de las especies 1 y 2 en esta capa. De la relación (39) se obtienen las leyes de conservación del flujo de energía de las tres ondas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} v_3 W_3 &= -\frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{d}{dr} v_1 W_1 = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} \frac{d}{dr} v_1 W_1 = \\ &= -\frac{d}{dr} (v_1 W_1 + v_2 W_2), \end{aligned} \quad (40)$$

$$I = v_3 W_3 + v_2 W_2 + v_1 W_1 = const. \quad (41)$$

En el caso general, cuando las cantidades $W_{1,2,3}$ dependen tanto de las coordenadas como del tiempo, para la densidad de energía de las tres ondas se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot I = 0 \quad (42)$$

VI. Principales procesos no lineales en el plasma

1. Modelo de una partícula cargada en aproximación cuadrática

El modelo más simple para la descripción del plasma es el modelo de una partícula cargada. Veamos el movimiento de una partícula en la aproximación cuadrática.

De la ecuación de movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = eE(r,t) + \frac{e}{c} (v \times B), \quad (43)$$

expandimos la trayectoria de un electrón en una serie

$$r = r_0 + r_1 + r_2 + \dots,$$

e igualando la parte izquierda y derecha con respecto al orden de la serie, obtenemos el sistema de ecuaciones (hasta términos de segundo orden)

$$m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = eE(r_0, t), \quad (44)$$

$$m \frac{d^2 r_2}{dt^2} = e(r_1 \cdot \nabla) E(r_0, t) + \frac{e}{c} \left(\frac{dr_1}{dt} \cdot B(r_0, t) \right). \quad (45)$$

Veamos el movimiento de un electrón en el campo de una onda monocromática con una frecuencia ω , un vector de onda k y una amplitud E_0

$$E(r, t) = \frac{1}{2} (E_0 e^{ikr-i\omega t} + E_0^* e^{-ikr+i\omega t}). \quad (46)$$

De la Ley de Inducción Magnética de Faraday obtenemos el campo magnético $B_0 = (c/\omega)(k \times E_0)$. De la ecuación (44) obtenemos la velocidad y la posición del electrón en la aproximación lineal en la forma

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{ie}{2m\omega} (E_0 e^{ikr-i\omega t} - E_0^* e^{-ikr+i\omega t}), \quad (47)$$

$$r_1 = -\frac{e}{2m\omega^2} (E_0 e^{ikr-i\omega t} - E_0^* e^{-ikr+i\omega t}), \quad (48)$$

donde el subíndice 0 de r en las últimas expresiones se ha ignorado. Sustituimos estas dos últimas expresiones en (45), de donde obtenemos la forma de la fuerza

$$m \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{ie^2}{4m\omega^2} \left\{ e^{-2i\omega t + 2ikr} (kE_0^2 - 2E_0(k \cdot E_0)) - e^{2i\omega t - 2ikr} (kE_0^*{}^2 - 2E_0^*(k \cdot E_0^*)) + 2[E_0^*(k \cdot E_0) - E_0(k \cdot E_0^*)] \right\} \quad (49)$$

el último término es igual a cero si se considera la amplitud en la forma $E_0 = E_0 \exp(i\phi)$. Como resultado obtenemos, considerando que $\phi = 0$, las expresiones.

$$\frac{dr_2}{dt} = -\frac{e^2}{4m^2\omega^3} (kE_0^2 - 2E_0(k \cdot E_0)) \cos(2k \cdot r - 2\omega t), \quad (50)$$

$$r_2 = -\frac{e^2}{8m^3\omega^4} (kE_0^2 - 2E_0(k \cdot E_0)) \sin(2k \cdot r - 2\omega t). \quad (51)$$

De esta manera, en el campo de una onda electromagnética conjuntamente con la corriente lineal $j_1 = eN_e(dr_1/dt)$, la cual varía con la misma frecuencia que la onda, surge una corriente cuadrática

$$j_2 = eN_e (dr_2/dt)$$

$$= -\frac{e^3 N_e}{4m^2 \omega^3} (kE_0^2 - 2E_0(k \cdot E_0)) \cos[2(k \cdot r - \omega t)]. \quad (52)$$

La corriente (52) es la fuente para la generación del segundo armónico de una onda electromagnética. La magnitud del campo del segundo armónico dependerá de si se satisface la relación de dispersión que relaciona a 2ω con $2k$. Si se satisface la relación de dispersión, entonces la efectividad en la excitación del segundo armónico será mayor al primer armónico. En particular, para una onda transversal en un plasma isótropo, cuando se satisface la relación $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_e^2$ la relación $(2\omega)^2 = (2k)^2 c^2 + \omega_e^2$ ya no se satisface, por lo que la efectividad de generación del segundo armónico será pequeña.

2. Procesos de interacción de tres ondas

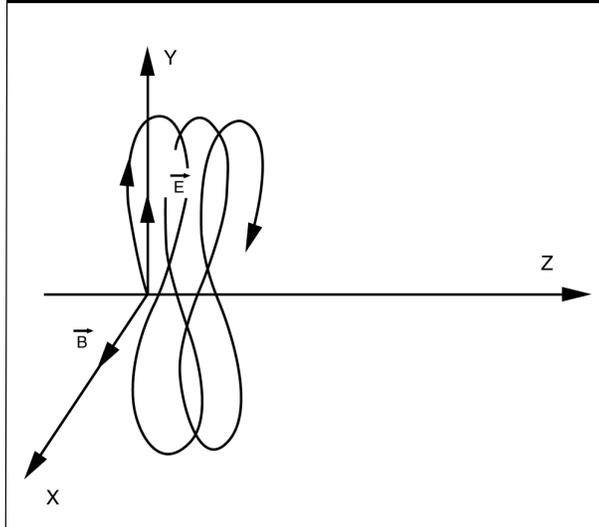
En el punto anterior tratamos el caso de la generación de una corriente en el segundo armónico. Esta corriente sirve de fuente de campos en las frecuencias $\omega_1 \pm \omega_2$. La magnitud del campo en estas frecuencias combinadas depende de si se satisface la relación de dispersión correspondiente. Si las frecuencias $\omega_1 \pm \omega_2$ y los vectores de onda $k_1 \pm k_2$ se relacionan por una relación de dispersión, entonces se excita una onda propia del sistema (Sagdeev y Galeev, 1969; Gorbunov *et al.*; 1964). En este caso se puede hablar de la interacción de tres ondas en el plasma, cada una de las cuales es una onda propia del plasma y la cual satisface una relación de dispersión. Al proceso en el cual dos ondas con frecuencias ω_1 y ω_2 excitan una onda en la frecuencia $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ se le define como proceso de fusión; el proceso inverso es el proceso de dispersión. En particular, la excitación de una onda con menor frecuencia $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ es el resultado del proceso de dispersión $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Sin embargo, la condición de que se satisfagan las relaciones de dispersión para tres ondas, sus frecuencias y vectores de onda de las cuales están relacionados por las relaciones de dispersión $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$, $k_3 = k_1 \pm k_2$ no siempre existe.

3. Fuerzas ponderomotrices en el plasma

Hasta ahora hemos considerado ondas planas con amplitud constante. Sin embargo, la estructura de los campos en el plasma es más compleja. En particular, en procesos tales como la aceleración del plasma, interacción de láseres de alta potencia con el plasma y otros, actúan sobre las partículas del plasma fuerzas especiales que son iguales a cero cuando las ondas son planas (Moore y Fish, 1994; Gutiérrez-Tapia, 1999).

FIGURA 1. VARIACIÓN DE LA TRAYECTORIA DE FORMA DE "OCHO" DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO DE RADIOFRECUENCIA NO HOMOGÉNEO.



Veamos el campo eléctrico del campo en la forma

$$E(r,t) = \frac{1}{2} (\epsilon(r)e^{-i\omega t} + \epsilon^*(r)e^{i\omega t}) \quad (53)$$

Este campo es monocromático. Si $\epsilon(r) = \epsilon_0 e^{ikr}$, entonces la fórmula (53) define el campo de una onda viajera. En este sentido (53) es una generalización de una onda plana.

De (53) y de la ecuación de Maxwell $\nabla \times E = -(1/c)(\partial B/\partial t)$ es fácil determinar el campo magnético

$$B = -\frac{ic}{2\omega} (\nabla \times \epsilon e^{-i\omega t} - \nabla \times \epsilon^* e^{i\omega t}) \quad (54)$$

La ecuación de movimiento de un electrón en este campo se resuelve por un método perturbativo suponiendo que el electrón inicialmente se localiza en el punto $r=r_0$. A primera aproximación tenemos

$$m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{e}{2} (\epsilon(r_0)e^{-i\omega t} + \epsilon^*(r_0)e^{i\omega t})$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{ie}{2m\omega} (\epsilon(r_0)e^{-i\omega t} - \epsilon^*(r_0)e^{i\omega t})$$

$$r_1 = \frac{e}{2m\omega^2} (\epsilon(r_0)e^{-i\omega t} + \epsilon^*(r_0)e^{i\omega t})$$

A segundo orden, sobre el electrón actúa la fuerza

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 r_2}{dt^2} &= f = e(r_1 \cdot \nabla)E + \frac{e}{c} \left[\frac{dr_1}{dt} \times B \right] \\ &= e \left\{ -\frac{e}{2m\omega^2} (\epsilon e^{-i\omega t} + \epsilon^* e^{i\omega t}) \cdot \nabla \right\} \frac{1}{2} (\epsilon^{-i\omega t} + \epsilon^* e^{i\omega t}) \\ &\quad - \frac{ie^2}{2mc\omega} \left[(\epsilon e^{-i\omega t} - \epsilon^* e^{i\omega t}) \frac{ic}{2\omega} (\nabla \times \epsilon) e^{-i\omega t} - (\nabla \times \epsilon^*) e^{-i\omega t} \right] \end{aligned}$$

En la expresión para la fuerza aparecen términos que dependen del tiempo. Precisamente estos términos son los más importantes, por lo que los vamos a escribir separadamente,

$$f_0 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \left\{ (\epsilon \cdot \nabla) \epsilon^* + (\epsilon^* \cdot \nabla) \epsilon + [\epsilon \cdot (\nabla \times \epsilon^*)] + [\epsilon^* \cdot (\nabla \times \epsilon)] \right\}$$

Utilizando la relación $[\epsilon \cdot (\nabla \times \epsilon^*)]_i = \epsilon_n (\partial \epsilon_n^* / \partial x_i) - (\epsilon \cdot \nabla) \epsilon_i^*$ obtenemos una fórmula compacta

$$f_0 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla |\epsilon(r)|^2 \quad (55)$$

Para una onda plana $|\epsilon|^2 = const$ y la fuerza f_0 es igual a cero. A la fuerza (55) se le conoce como fuerza ponderomotriz.

Para interpretar el sentido físico de la fuerza ponderomotriz recordemos que la trayectoria de una partícula cargada en un campo electromagnético es un "ocho". Si el campo no es homogéneo, entonces la figura de ocho tiene diferentes anchuras en diferentes puntos de la trayectoria (figura 1). Esto conduce a que después de un cierto periodo de variación del campo, la partícula no regresa al punto inicial, sino que deriva a la región donde el campo es más intenso. Este movimiento de deriva es ocasionado por la fuerza ponderomotriz, la cual expulsa a la partícula de la región donde el campo es más intenso a una región donde el campo es más débil. Como se observa de (55), la fuerza no depende del tipo de carga, sino que depende de la masa de la partícula. Sobre los electrones la acción de esta fuerza será del orden de m_e/m veces más fuerte que para los iones considerando que $Z = 1$.

4. Inestabilidades paramétricas en el plasma

Entre una gran variedad de inestabilidades paramétricas en el plasma se tienen ciertas inestabilidades más analizadas (Gorbunov *et al.*, 1964). Empecemos por la inestabilidad

oscilatoria de dos fluidos. Ésta surge en el plasma cuando la frecuencia de la onda incidente ω_0 es cercana a la frecuencia plásmica de los electrones. Supongamos que en el plasma inmerso en un campo homogéneo de radiofrecuencia se tiene una perturbación de densidad δN_e (figura 2). Por la acción del campo, los electrones del plasma oscilan y salen de la región donde la concentración es mayor pasando a la región donde ésta es menor.

Los iones permanecen inmóviles en este caso. Como resultado, surge un campo rápidamente variable de separación de carga δE , el cual se determina fácilmente de la ecuación $\nabla \cdot D = 0$,

$$\delta E = -\frac{\delta \mathcal{E}}{\epsilon} E_{0\parallel} = \frac{4\pi e^2 \delta N_e}{m\omega_0^2 \epsilon(\omega_0)} E_{0\parallel},$$

donde $E_{0\parallel}$ es el componente paralelo al gradiente de densidad del campo incidente. Si $\omega_0 > \omega_{Le}$ y $\mathcal{E}(\omega_0) > 0$, entonces, en la región donde $\delta N_e > 0$ el campo de separación de carga está dirigido en la misma dirección que el campo incidente. El campo total es mayor dentro de la región de mayor concentración que fuera de esta región, y la fuerza ponderomotriz, la cual es proporcional a $\partial(E_{0\parallel} \delta E)/\partial x$, tiende a disminuir la perturbación inicial de densidad. Si por el contrario, $\omega_0 < \omega_{Le}$ entonces $\mathcal{E}(\omega_0) < 0$ y el campo δE estará dirigido en dirección contraria al campo $E_{0\parallel}$. A su vez, el campo total será menor donde la densidad del plasma es mayor y la fuerza ponderomotriz tenderá a aumentar la perturbación inicial. Como resultado, estas perturbaciones empiezan a crecer y surge la inestabilidad.

Veamos ahora la inestabilidad en un plasma enrarecido, ($\omega_0 \gg \omega_{Le}$), llamada de autoenfoque o de filamentación. Como resultado de su desarrollo en la dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda incidente, ocurre una redistribución de la densidad del plasma y del campo electromagnético. Surgen regiones de baja densidad, pero con una alta intensidad de radiación electromagnética, turnándose con regiones de alta densidad, pero de baja intensidad de radiación electromagnética. La descomposición de la onda electromagnética en "hilos" delgados con alta densidad se llama filamentación. La interpretación física de esta inestabilidad se puede entender si consideramos que la onda incidente se propaga en un plasma con una concentración modulada en la dirección perpendicular al vector de onda k_0 (figura 3).

Todos los electrones del plasma en un punto z oscilan en el campo de la onda incidente de la forma $v = v_E \cos \omega_0 t$, donde $v_E = eE/m\omega_0$. Las variaciones de densidad δN_e ocasionan que surja una corriente $\delta j = ev_E \delta N_e \cos \omega_0 t$. Esta corriente induce un campo magnético $\delta H(y)$ dirigido en el

FIGURA 2. PERTURBACIÓN DE DENSIDAD δN_e EN UN PLASMA INMERSO EN UN CAMPO DE RADIOFRECUENCIA NO HOMOGÉNEO.

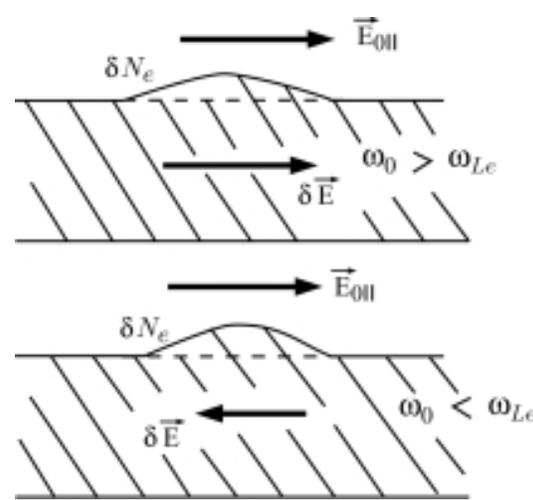
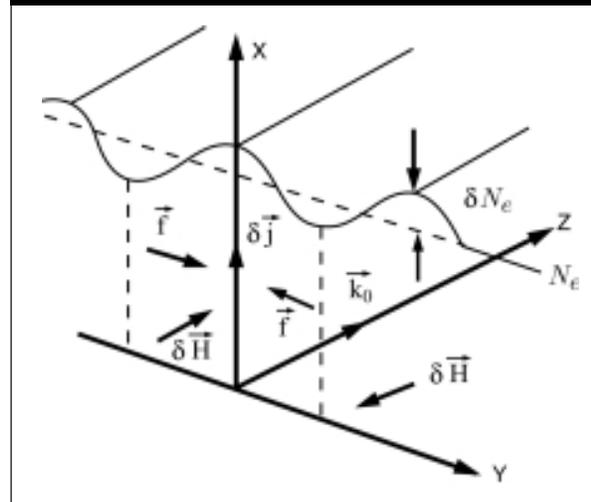


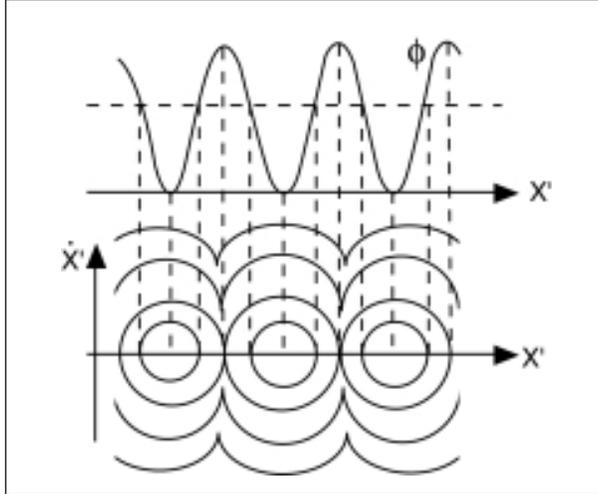
FIGURA 3. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA DE RADIOFRECUENCIA A TRAVÉS DE UN PLASMA CUYA DENSIDAD EN LA DIRECCIÓN PERPENDICULAR A k_0 ES MODULADA.



eje Oz . El campo magnético actúa sobre los electrones, que oscilan en el campo con una fuerza $f = (1/c)(j_0 \times \delta H)$, donde $j_0 = eN_e v_E \cos \omega_0 t$. Esta fuerza incrementa las perturbaciones iniciales de densidad, por lo que surge la inestabilidad.

Otro ejemplo de las inestabilidades paramétricas es lo que se conoce como *dispersión forzada*. Para entender su naturaleza física, consideremos que al encuentro de la onda incidente se propaga una onda electromagnética con menor frecuencia ω_1 . Si las frecuencias de las dos ondas fueran

FIGURA 4. COMPORTAMIENTO DEL POTENCIAL Φ Y SU IMAGEN EN EL ESPACIO FASE.



iguales, entonces obtenemos una onda estacionaria. Esta onda estacionaria se propaga lentamente con una velocidad $v_b = (\omega_0 - \omega)/(k_0 + k_1)$ en el plasma. En el campo de esta onda actúan fuerzas ponderomotrices, las cuales tienden a expulsar al plasma de las crestas a los valles. Las perturbaciones de densidad resultan más significativas cuando la velocidad v_b es igual a la velocidad de la onda longitudinal excitada en el plasma. Si la onda excitada es una onda de Langmuir, se dice que se tiene una dispersión forzada combinada. Si la onda excitada es una onda sónica, se dice que se tiene una dispersión forzada de Mandelshtam-Brillouin. La onda excitada bajo la acción de la fuerza ponderomotriz aumenta la amplitud de la onda dispersada con una frecuencia ω , la cual a su vez aumenta la magnitud de la fuerza ponderomotriz lo que ocasiona la inestabilidad, dando como resultado un aumento brusco de la intensidad de la radiación dispersada.

5. Partículas atrapadas

Hasta ahora se ha utilizado la teoría de perturbación con respecto a la amplitud del campo. Esto supone que el campo perturba poco la trayectoria de las partículas, es decir, $v_E \ll \max(v_{Te}, v_0)$. Es claro que esta condición no se satisface para las partículas resonantes, la velocidad de las cuales coincide con la velocidad de fase de la onda. Estas partículas son las que requieren un tratamiento diferente de un método perturbativo (Sagdeev *et al.*, 1988).

Veamos una onda que se propaga a lo largo del eje Ox y cuyo campo tiene la forma $E = E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x)$. Considérese el sistema de coordenadas de la onda $x = x' + (\omega_0/k_0)t$. En este sistema de coordenadas, el campo es una función perió-

dica de la coordenada $E = -E_0 \sin k_0 x'$. Como la onda es potencial, se puede introducir el potencial, $E = -d\phi/dx'$ donde $\phi = -(E_0/k_0) \cos k_0 x'$ (figura 4). Consideremos el movimiento de una partícula en un campo eléctrico con la condición de que la velocidad inicial de la partícula es cercana a la velocidad de fase. La ecuación de movimiento en la vecindad de los puntos $k_0 x' = \pi n$, donde $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tiene la forma

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -eE_0 \sin k_0 x' \approx -eE_0 k_0 x'.$$

De donde se obtiene que la partícula moviéndose junto con la onda oscila al rededor del punto $x' = 0$ con la frecuencia $\Omega = \sqrt{eE_0 k_0/m}$, y el periodo de oscilación es

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{e k_0 E_0/m}}. \tag{56}$$

La amplitud de las oscilaciones de las partículas depende de la diferencia entre la velocidad de la partícula y la velocidad de fase de la onda. Si esta diferencia es pequeña, entonces es pequeña la amplitud de las oscilaciones. En estos casos se dice que la partícula está atrapada por la onda. Si por el contrario, la diferencia es grande, entonces la partícula puede fugarse del mínimo del potencial y empezar a moverse paralelamente a la onda. Esto será cuando $(mv'^2/2) > (2eE_0/k_0)$. La línea que separa, en el espacio fase, a las partículas atrapadas de las libres se llama separatriz.

Si la onda se inyecta muy rápido al plasma en un tiempo menor que (56), se puede considerar que las partículas no tienen tiempo de moverse con respecto a la onda. Por lo anterior, su número se describe por la función de distribución antes de la inyección de la onda. En una etapa inicial, una parte de las partículas se frenan (su número es menor) y otra parte se aceleran (su número es mayor). En general, la energía de las partículas se incrementa y la energía de las ondas disminuye. Precisamente, en este intervalo de tiempo ($t \ll \tau$) se puede hablar del amortiguamiento de Landau. Si $t \sim \tau$ entonces las partículas que se frenaron empezarán a acelerar y así sucesivamente. En este caso, la energía de las partículas empezará a transmitirse a las ondas y se registrarán oscilaciones de la amplitud de las ondas con un periodo (56).

Sin embargo, el periodo de las oscilaciones de las partículas que tienen diferentes posiciones y velocidades iniciales no coincidirán. Las partículas que oscilan con una amplitud grande se mueven más lentamente y tienen un periodo mayor. Las partículas con menor amplitud tienen un periodo menor.

Como resultado, la sincronía de las oscilaciones de las partículas se corrompe y surge una mezcla de fases. En este caso las partículas, ya no pueden entrar en fase y reconstruir el campo. Se establece un estado estacionario, en el cual la energía de la onda es constante y donde diferentes partículas tienen diferentes fases de oscilación. Es decir, en cada punto del espacio se tienen simultáneamente partículas con diferentes velocidades en el intervalo $(m\Delta v^2/2) = e\Phi_0$. En la función de distribución se forma una meseta y el intercambio de energía entre las partículas y la onda desaparece.

6. Ondas no lineales. Solitones

Otro concepto físico importante que surge en un régimen fuertemente no lineal es el concepto de las ondas solitarias o solitones. Como ejemplo, veamos las ondas no lineales sónico-iónicas (Petviashvili, 1980).

En el modelo de dos fluidos del plasma (electrones e iones), las ecuaciones de movimiento y de continuidad tienen la forma

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_i V_i) = 0, \quad (57)$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_e V_e) = 0, \quad (58)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} = -v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} - \frac{e_i}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} = -v_{Te}^2 \frac{\partial \ln N_e}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (60)$$

donde se asume que el movimiento se realiza en la dirección Ox . El potencial de separación de cargas se define por la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ o sea $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi(eN_e + e_i N_i)$. Veamos el movimiento lento en el plasma relacionado con los iones. En estos movimientos lentos $v_{Te}^2 \gg v_e^2$ y los electrones tienen tiempo de reposicionarse en el espacio de tal forma que en cada punto la presión térmica equilibra la fuerza con la que actúa el campo eléctrico,

$$N_e = N_{e0} \exp(-e\phi/T_e).$$

Inversamente a los iones se les considera fríos ($v_{Ti} \ll v_i^2$) y se desprecia su movimiento térmico.

Vamos a buscar la solución de las ecuaciones (57)-(60) suponiendo que todas las cantidades dependen de las coordenadas y del tiempo en la forma $\chi = x - ut$. Estas soluciones corresponden a ondas no lineales estacionarias y en el caso particular de una dependencia armónica de la variable χ se

transforman en ondas lineales normales. Las ecuaciones reducidas de la hidrodinámica se transforman como

$$\frac{d}{d\chi} [N_i(v_i - u)] = 0, \quad (61)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\chi} (v_i - u)^2 = -\frac{e_i}{m_i} \frac{d\phi}{d\chi} \quad (62)$$

De la primera ecuación obtenemos la Ley de Conservación de los Iones $N_i(v_i - u) = \text{const}$. Si cuando $N_i = N_{i0}$, $v_i = 0$, entonces $N_i(v_i - u) = N_{i0}u$. De la segunda ecuación se obtiene la Ley de Conservación de Energía de los Iones $\frac{1}{2}(v_i - u)^2 + e_i\phi/m_i = \text{const} = C_1$. Si $v_i = 0$, $\phi = 0$ entonces, $C_1 = u^2/2$ y

$$N_i = \frac{N_{i0}}{\sqrt{1 - \frac{2e_i}{m_i u^2} \phi}}.$$

Ahora, expresando la concentración de los iones a través del potencial se puede obtener una ecuación para el potencial. Además, si consideramos que en el punto donde $\phi = 0$ el plasma es neutro, es decir $e_i N_{i0} + e N_{e0} = 0$, entonces esta ecuación tiene la forma

$$\frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = -4\pi e N_{e0} \left(e^{-\frac{e\phi}{T_e}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_i\phi/m_i u^2}} \right). \quad (63)$$

Esta ecuación es una ecuación fuertemente no lineal que determina la variación espacial del potencial de una onda sónico-iónica.

La ecuación no tiene soluciones analíticas, pero existe una forma para el análisis de este tipo de ecuaciones. Para esto, hay que multiplicar la ecuación (63) por $d\phi/d\chi$ y escribirla en la forma

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\chi} \right)^2 + \mathcal{U}(\phi) = E, \quad (64)$$

donde el «potencial» \mathcal{U} tiene la forma

$$\mathcal{U} = 4\pi N_{e0} \left(-\frac{T_e}{e} e^{-\frac{e\phi}{T_e}} + \frac{m_i u^2}{e_i} \sqrt{1 - 2\frac{e_i\phi}{m_i u^2}} \right) \quad (65)$$

Esta última relación tiene la forma de una Ley de Conservación de Energía en el movimiento de un punto material de masa unitaria en un campo potencial, donde c

tiene el sentido del tiempo, ϕ el sentido de coordenada, u el sentido de potencial y E el sentido de la energía total.

Si la energía de la partícula E es pequeña, entonces ésta oscila y el potencial varía con respecto a las coordenadas y el tiempo de forma periódica. La estructura de estas oscilaciones se diferencia fuertemente de las oscilaciones armónicas. Cuando la energía de las partículas E aumenta, el periodo de las oscilaciones aumenta, entonces la partícula infinitamente se acerca al punto donde $\phi = 0$. Aquí es donde se forma lo que se llama un solitón.

Conclusiones

Este trabajo es una introducción a la electrodinámica no lineal. Con base en esta teoría, se describen algunos procesos que ocurren en el plasma en el que es importante la interacción no lineal de ondas. Con estos ejemplos se pretende mostrar que la naturaleza del plasma donde se desarrollan una gran variedad de formas de ruido y oscilaciones que surgen de forma espontánea es muy compleja. Actualmente existen tres modelos generales para describir al plasma que son (Alexandrov *et al.*, 1984): el modelo de partículas cargadas independientes, el modelo hidrodinámico y el modelo cinético. Estos modelos han ayudado a tener una cierta claridad fenomenológica de la física de los plasmas; sin embargo, muchos detalles quedan aún por estudiar. En la fusión nuclear, tanto en el área de confinamiento inercial como en el del confinamiento magnético, se han seguido dos vertientes una consistente en el desarrollo posterior de los métodos mencionados, y otra consiste en la implementación de otros métodos como el que considera a los diferentes dispositivos de confinamiento del plasma como sistemas físicos complejos, donde se han adoptado teorías como las de auto-organización y de sistemas dinámicos y de bifurcación (Kadomtsev, 1992). Como aplicaciones de estos últimos métodos se pueden mencionar el control de inestabilidades en la interacción láser-plasma en la fusión nuclear por confinamiento inercial y el estudio de la turbulencia relacionada con el control del transporte de partículas y energía en los tokamaks y steleradores (Martinell, 1995) correspondientes al área de confinamiento magnético.

Finalmente, es importante señalar que en las otras áreas mencionadas en la introducción también existe una gran variedad de problemas no resueltos, y en los cuales los procesos lineales son la clave para poderlos resolver. Por límites de espacio, en este trabajo no se describen los problemas más importantes relacionados con estas otras áreas importantes de la física de plasmas. 



BIBLIOGRAFÍA

- Alexandrov, A.; L. Bogdankevich, y A. Rukhadze (1984). *Principles of Plasma Electrodynamics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Akhiezer, A.; I. Akhiezer y R. Polovin (1975). *Plasma Electrodynamics*, T. 2. Pergamon Press, New York.
- Camps, E.; O. Olea; C. Gutiérrez-Tapia y M. Villagrán (1995). *Ren. Sci. Instrum.*, 66, 3219.
- Duderstadt, J. y G. Moses (1982). *Inertial Confinement Fusion*. John Wiley & Sons, New York.
- Gorbunov, L.; V. Pustavalov y V. Silin (1964). *Sov. Phys. JETP*, 47, 1437.
- Gurnett, D. (1974). *J. Geophys. Res.* 79, 4227.
- Gutiérrez-Tapia, C.
 _____ (1999). *Ren. Mex. Fís.* 45, 322.
 _____ y N. Arzate-Plata (1997). *Ren. Sci. Instrum.* 68, 3400.
- Kadomtsev, B.
 _____ (1965). *Plasma Turbulence*. Academic Press, New York.
 _____ (1992). *Tokamak Plasma: A Complex Physical*, IOP Publishing Ltd, Bristol.
- Kovrizhnikh, L. (1965). *Lebedev Trudy.* 32, 173.
- Langmuir, I.
 _____ (1925). *Phys. Rev.* 26, 585.
 _____ (1927). *Z. Phys.* 46, 271.
- Lieberman, M. y A. Lichtenberg (1994). *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*. John Wiley and Sons, New York.
- Martinell, J. (1995). *Los Prometeos modernos o el esfuerzo para controlar la fusión nuclear*. Fondo de Cultura Económica, Colección La Ciencia Para Todos, 2a. Edición, México.
- Moore, J. y N. Fish (1994). *Phys. Plasmas*, 1, 1105.
- Oraevskii, V. y R. Sagdeev (1962). *Sov. Phys. JETP*, 32, 1291.
- Petviashvili, V. (1980). *Reviews of Plasma Physics*. T. 9, Consultants Bureau, New York, 59.
- Sagdeev, R. y A. Galeev (1969). *Nonlinear Plasma Theory*. Benjamin, New York.
- Sagdeev, R.; D. Usikov y G. Zaslavsky (1988). *Nonlinear Physics from the Pendulum to Turbulence and Chaos*. Harwood Academic Publishers, New York.
- Tsitovich, V. (1970). *Non-linear Effects in a Plasma*. Plenum Press, New York.
- Vedenov, A. (1967). *Reviews of Plasma Physics*. T. 3, Consultants Bureau, New York, 229.