

Juan A. Reyes, Rosalío F. Rodríguez
Efectos no lineales fotoinducidos en cristales líquidos
Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10402206>



Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

www.redalyc.org

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Efectos no lineales fotoinducidos en cristales líquidos

JUAN A. REYES* Y ROSALÍO F. RODRÍGUEZ**

Resumen. *Se presentan dos ejemplos en los que se aplica un formalismo analítico que permite describir una amplia variedad de fenómenos no lineales que ocurren cuando un campo óptico se propaga en un cristal líquido. Primero se describe la propagación de ondas planas en celdas rectangulares formadas por cristales líquidos nemáticos, tomando en cuenta su acoplamiento con la orientación. Posteriormente se analiza la propagación de un paquete de ondas en la celda. Se muestra que existe un efecto de guía de ondas en la propagación de los campos ópticos y que los modos transversales magnéticos (TM) de la radiación electromagnética se pueden propagar como solitones ópticos. En ausencia de absorción, se calculan explícitamente diversas propiedades de los solitones.*

Palabras clave: guías de onda, cristales líquidos, ondas no lineales.

Photoinduced Non Linear Effects in Liquid Crystals

Abstract. *In this work we present two examples applying an analytical formalism, which allows us to describe various non linear optical phenomena in liquid crystals. First, we analyze the propagation of plane waves in rectangular cells with nematic liquid crystal cores, by taking into account its coupling with the nematic orientation. Next, we investigate the propagation of a wavepacket in the cell. It is shown that a waveguide effect exists in the propagation of the optical fields and that transverse magnetic modes of electromagnetic radiation can propagate like optical solutions. In the absence of absorption, we calculate various soliton properties.*

Keywords: wave guides, liquid crystals, non linear waves.

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 28 de marzo de 2001

Introducción

Es conocido que la propagación de un haz láser a través de un cristal líquido es un fenómeno que exhibe propiedades ópticas únicas y altamente no lineales (Zel'dovich *et al.*, 1980; Durbin *et al.*, 1981). Esta gran susceptibilidad puede afectar significativamente la propagación de la luz a través de estos sistemas y generar acoplamientos altamente no lineales entre los campos ópticos y la reorientación de estos líquidos

anisotrópicos. El objetivo central de este trabajo es presentar dos aplicaciones de un formalismo analítico general discutido en el artículo publicado en este mismo número (Rodríguez y Reyes, 2001), que de aquí en adelante denotaremos por I, el

* Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, 01000, México, D.F.

** Departamento IPH1, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa. Apdo. Postal 20-726, 09340 México, D.F. Dirección permanente: Laboratorio de Cristales Líquidos, Dpto. de Física Química, Instituto de Física, UNAM. Apartado Postal 20-364, 01000 México, D.F. Correo electrónico: zepeda@fenix.ifisicau.unam.mx.

Los autores agradecen el apoyo parcial de los proyectos DGAPA-UNAM IN101999 y FENOMECCONACYT400316-5-G25427E, México.

cual permite describir una gran variedad de fenómenos ópticos no lineales que ocurren en cristales líquidos. Las aplicaciones consisten en describir la propagación de campos ópticos (ondas planas) en celdas rectangulares formadas por cristales líquidos nemáticos, en términos de un sistema de ecuaciones macroscópicas, no lineales y acopladas. Posteriormente, este modelo se generaliza considerando la propagación de un paquete de ondas. En ambos casos se muestra que existe un efecto de guía de ondas y que los modos transversales magnéticos (TM) del campo óptico se pueden propagar como solitones ópticos. En ausencia de absorción, se calculan explícitamente diversas propiedades de los solitones, como son su velocidad y el factor de amortiguamiento.

Para este fin, el artículo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección, se utiliza el formalismo general desarrollado en I para calcular las trayectorias de rayo en el límite óptico; en la segunda sección se obtienen las amplitudes del campo en el límite WKB y posteriormente, en la tercera sección, a partir de las ecuaciones dinámicas previas se muestra que las amplitudes de los campos obedecen a la ecuación no lineal de Schrödinger. A partir de esta ecuación se predice la existencia de solitones ópticos en el sistema. Finalmente, concluimos y comentamos otros fenómenos ópticos no lineales que ocurren en cristales líquidos en los que este método se ha empleado.

I. Trayectorias de rayo

En esta sección se calcularán las trayectorias de rayo de un haz incidente de intensidad baja, esto es, de un haz cuya intensidad sea menor que la densidad de energía elástica del nemático, $q \ll 1$. Con esta suposición, la discusión se restringe al caso en el cual la dinámica del campo está completamente desacoplada de la dinámica orientacional, como se puede ver de la ecuación (2) de I. Asimismo, se considerará que la frecuencia del haz incidente es tan grande que satisface el límite óptico $kl \gg 1$.

Siguiendo el procedimiento usual de la óptica geométrica (Born y Wolf, 1975; Reyes, 1999) supondremos que los modos TM, ecuaciones (45-47) de I, se pueden escribir como ondas cuasiplanas

$$E_j(\vec{r}, t) = E_j(\vec{r}) \exp[i(k_0 W(\vec{r}) - \omega t)], \quad j = x, z, \tag{1}$$

$$H_y(\vec{r}, t) = H_y(\vec{r}) \exp[i(k_0 W(\vec{r}) - \omega t)] \tag{2}$$

Aquí $W(\vec{r})$ es la función característica de Hamilton y, co-

mo es bien conocido, representa la diferencia entre caminos ópticos de un rayo que se propaga entre dos puntos de la celda. Las amplitudes $E_j(\vec{r})$ y $H_y(\vec{r})$ en general son funciones complejas de la posición. Sustituyendo las ecuaciones (1-2) en las ecuaciones (45-47) de I y tomando el límite óptico en esta ecuación, se obtienen las condiciones que deben de satisfacer $W(\vec{r})$ que es conocida como la ecuación de la eikonal (Hamilton-Jacobi), la cual está dada por

$$\epsilon_{xx} \left(\frac{dW}{d\chi} \right)^2 + \epsilon_{zz} \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 + 2\epsilon_{xz} \frac{dW}{d\chi} \frac{dW}{d\zeta} = \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \tag{3}$$

en donde $\chi = x/l$. Nótese que $W(\chi, \zeta)$ depende de ángulo de reorientación θ a través de las componentes de ϵ_{ij} dadas explícitamente en la ecuación (43) de I. La ecuación de la eikonal se puede resolver empleando la siguiente transformación canónica $W(\chi, \zeta) = p\chi + S(\zeta)$, en donde el parámetro $p = \beta/k_0$ es la componente de rayo a lo largo del eje x , y conduce a la siguiente expresión para $W(\chi, \zeta)$:

$$W(\chi, \zeta) = p\chi - \int_0^{\zeta} d\eta \frac{p\epsilon_{xz} \pm \sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (\epsilon_{zz} - p^2)}}{\epsilon_{zz}} + W_{\pm} \tag{4}$$

Ahora bien, de la teoría general de la ecuación de Hamilton-Jacobi (Reyes y Rodríguez, 1995), se sabe que la trayectoria de rayo se obtiene a partir de la expresión $\gamma = dW(\zeta, \chi)/dp$, siendo γ la coordenada conjugada invariante generalizada a p ; esto conduce a

$$\gamma = \chi \pm \int_0^{\zeta} d\eta \left[\frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} + \frac{p}{\epsilon_{xx}} \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{zz} - p^2}} \right] \tag{5}$$

El parámetro p se puede expresar en términos del ángulo de propagación α que se muestra en la figura 5 de I, evaluando $d\chi/d\zeta$ en $\zeta = 0$ mediante la ecuación (5). Resulta

$$p = \sqrt{\epsilon_{\parallel}} \frac{\cot \alpha}{\sqrt{\cot^2 \alpha + \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}}}} \tag{6}$$

Es importante señalar que el cálculo explícito de las trayectorias, ecuación (5), requiere conocer explícitamente los coeficientes $\epsilon_{ij}(\theta)$. En esta sección sólo se considerará el caso para el cual la dinámica del campo está completamente des-

acoplada de la dinámica orientacional, lo cual equivale a tomar $q = 0$ en la ecuación (39) de I. En este límite la solución de la ecuación (39) de I se reduce a $\theta = \pi\zeta$, con lo que $\varepsilon_{ij}(\theta)$ queda determinado. Es fácil mostrar que cuando el parámetro p está en el intervalo $\varepsilon_c < p^2 < \varepsilon_{\perp}$, el cual define el régimen débil (RD), la trayectoria existe para todos los puntos de la celda. En contraste, en el régimen fuerte (RF), definido por $\varepsilon_{\perp} < p^2 < \varepsilon_{\parallel}$ existen valores de ζ para los cuales $\sqrt{\varepsilon_{xx} - p^2}$ se anula por lo que la ecuación (5) se indetermina. Mas aún, se puede mostrar que las trayectorias solo están definidas en el intervalo (Reyes y Rodríguez, 1995)

$$|\zeta_c| \leq \frac{1}{\Pi} \arccos \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel} - p^2}{\varepsilon_a}} \quad (7)$$

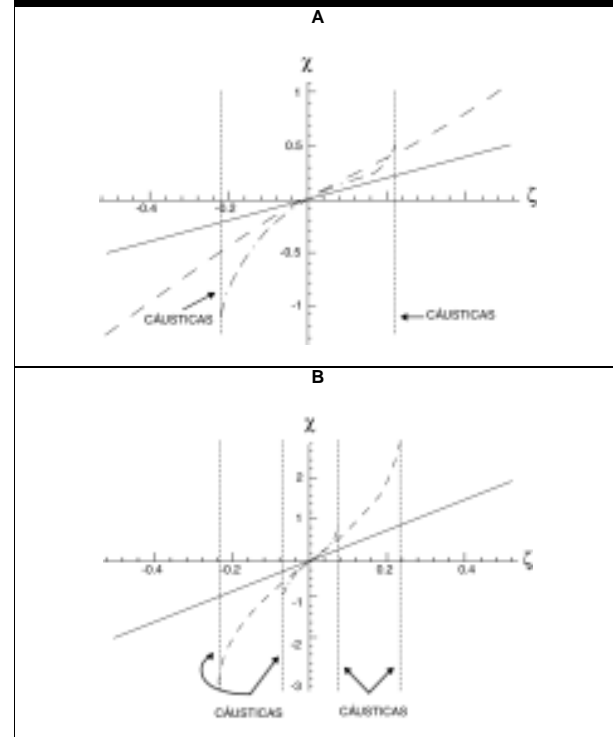
Es decir, el rayo se confina a una región más estrecha en torno a la parte central de la celda. Esta condición define las asíntotas de la trayectoria o cáusticas (puntos de retorno). El ancho de esta región varía con p y tiende a cero cuando $p \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$. En consecuencia, el tamaño de esta región depende del nemático específico. Estos comportamientos se ilustran en la figura 1 para MBBA y 5CB, en donde se presentan diferentes trayectorias para el ángulo de propagación $\alpha = 45^\circ$ y para $\gamma = 0$. Las trayectorias se obtuvieron escogiendo el signo negativo del segundo término del miembro derecho de la ecuación (5). Se muestran como referencia las trayectorias de rayo para un nemático homogéneo e isotrópico, así como las cáusticas correspondientes. La curva dibujada con el trazo (- -) es para MBBA y por el trazo (—) es para 5CB; como se puede apreciar, dichas curvas en efecto se doblan hacia la parte central de la celda si se comparan con la curva de trazo (—), la cual representa el caso isotrópico.

II. Los modos TM en la aproximación WKB

Es importante enfatizar que el límite óptico, $k_0 l \gg 1$, estudiado en la sección anterior, sólo es válido para frecuencias del campo muy grandes. Por esta razón sería interesante discernir si este efecto de guía de onda persiste para frecuencias más bajas, tales como las correspondientes a láseres He-Ne que emiten en el visible y tienen potencias bajas (1mW). Esta motivación se refuerza con base a que los fenómenos no lineales que se han observado en cristales líquidos nemáticos son de hecho producidos con esta clase de haces láser.

Para considerar frecuencias más bajas, se deben calcular los modos TM primer orden en el parámetro $1/k_0 l$, en contraste con el límite óptico en donde todos los términos

FIGURA 1. A) TAYECTORIAS DE RAYO PARA $\alpha = 45^\circ$ PARA NEMÁTICO ISOTRÓPICO (—); MBBA (- -) y 5CB (- . -). EN AMBOS CASOS $T = 25^\circ\text{C}$. B). LO MISMO QUE EN LA FIGURA 2A PARA $\alpha = 60^\circ$.



de este orden se despreciaron. Como se mostrará más adelante, este orden sucesivo que va más allá del límite óptico, permite calcular todos los modos el campo electromagnético en la celda, a diferencia de lo que ocurre con el límite WKB en mecánica cuántica. En aquel contexto, este límite es una aproximación que sólo permite calcular la función de onda para los estados de energía grande. El límite WKB que se ha definido aquí sólo impone una restricción a la frecuencia del haz incidente y deja libres a las componentes del número de onda. Por lo tanto, este límite no es una limitación sobre la envolvente espacial del haz, sino sobre su comportamiento temporal.

A continuación se calcularán los modos TM dados en general por las ecuaciones (45-47) de I, a primer orden en el parámetro $1/k_0 l$. Para este fin, se supondrá que las amplitudes de los modos TM, $E_x(\zeta, k_0)$, $E_z(\zeta, k_0)$ y $H_y(\zeta, k_0)$, son de la forma

$$E_i(\zeta, k_0) = E_i \exp[ik_0 l S(\zeta)], \quad i = z, x,$$

$$H_y(\zeta, k_0) = H_y \exp[ik_0 l S(\zeta)] \quad (8)$$

en donde $S(\zeta)$ está relacionada con $W(r)$ mediante la ecuación (4), y satisface la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \epsilon_{zz} \left(\frac{dS(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 + 2p\epsilon_{xz} \frac{dS(\zeta)}{d\zeta} + p\epsilon_{xx} - \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \\ &= \frac{i}{k_0 l} \left(\epsilon_{zz} \frac{d^2 S(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{d\epsilon_{zz}}{d\zeta} \frac{dS(\zeta)}{d\zeta} + p \frac{d\epsilon_{xz}}{d\zeta} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

que se obtiene sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (3). Para resolver esta ecuación a primer orden en $1/k_0 l$, se supone que $S = S_{\pm}^{(0)} + S^{(1)}$, en donde $S_{\pm}^{(0)}$ denota a las soluciones de la ecuación (9) a orden cero en $1/k_0 l$, las cuales fueron obtenidas explícitamente en la sección anterior. Si se sustituye $S = S_{\pm}^{(0)} + S^{(1)}$ en la ecuación (9) se obtiene una ecuación para $S^{(1)}$ en términos de $S_{\pm}^{(0)}$, esto es,

$$\begin{aligned} & \frac{dS^{(1)}(\zeta)}{d\zeta} = \pm \\ & \frac{i}{2k_0 l \sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (\epsilon_{zz} - p^2)}} \left(\epsilon_{zz} \frac{d^2 S_{\pm}^{(0)}(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{d\epsilon_{zz}}{d\zeta} \frac{dS_{\pm}^{(0)}(\zeta)}{d\zeta} + p \frac{d\epsilon_{xz}}{d\zeta} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

La solución general de esta ecuación se puede obtener fácilmente efectuando la sustitución

$$\Omega \equiv \epsilon_{zz} \frac{dS_{\pm}^{(0)}(\zeta)}{d\zeta} + p\epsilon_{xz} = \sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \epsilon_{zz} - p^2 (\epsilon_{zz} - p^2)}, \quad (11)$$

la cual conduce a la expresión

$$S(\zeta) = S_{\pm}^{(0)}(\zeta) + \frac{i}{2k_0 l} \ln(\Omega) + C_{\pm} \quad (12)$$

C_{\pm} son constantes de integración que se determinarán más adelante, a partir de las condiciones de frontera. Sustituyendo la ecuación (12) en la expresión general (8) se obtienen las siguientes expresiones para $H_y(\zeta, k_0)$

$$H_y(\zeta, k_0) = 4 \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}{(\epsilon_{zz} - p^2)}} \exp \left(-ipk_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left[H_0 + \exp \left(-k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(n, k) \right) \right. \\ & \left. + H_0 - \exp \left(k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(n, k) \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

en donde

$$f(\zeta, k_0) \equiv \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (\epsilon_{zz} - p^2)}}{\epsilon_{zz}}. \quad (15)$$

En secciones anteriores se mostró que las características de las trayectorias de rayo se pueden describir convenientemente en términos de dos regiones en el intervalo permitido de p , a saber, régimen débil para $0 < p^2 < \epsilon_{\perp}$ y régimen fuerte para $\epsilon_{\perp} < p^2 < \epsilon$. Aquí el término débil indica que el efecto no siempre existe, mientras que sí existe y es más fuerte en el segundo. De hecho, se mostró que en el régimen débil no hay asíntotas o cústicas para las trayectorias de rayo, mientras que en el fuerte se encontraron dos cústicas que confinan al rayo a propagarse por la parte central de la celda. A continuación se considerarán ambos regímenes separadamente.

1. Régimen débil $0 < p^2 < \epsilon_{\perp}$

Determinaremos tanto las amplitudes $H_{0\pm} = \exp(-ik_0 l (C_{\pm} + S_0^{\pm}))$ como la fase $ik_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0)$ del campo, las cuales se encuentran mediante las condiciones de frontera para los modos *TM*. Si dichas condiciones se imponen a la expresión (13) se encuentra, por un lado, que $H_{0+} = H_{0-} = E_0/2$, en donde E_0 es la intensidad del campo incidente, y por otro, que los valores de p que determinan la fase están dados por la siguiente ecuación trascendental

$$\int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (\epsilon_{zz} - p^2)}}{\epsilon_{zz}} = \frac{n\pi}{k_0 l}, \quad (16)$$

en donde n es un entero positivo. Nótese que en la expresión anterior, la cantidad entre paréntesis rectangulares es la componente de rayo a lo largo de la dirección ζ . Cuando dicha componente se integra sobre la coordenada $\zeta (\zeta = z/l)$, se obtiene una expresión que tiene la estructura de una integral de acción en el espacio fase correspondiente y, por tanto, es análoga a la condición de cuantización. La ecuación (16) se puede reescribir en términos de los ángulos de propagación permitidos α_n sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (3.8). La ecuación resultante se puede expresar en términos de integrales elípticas completas de primera y tercera clase, de esta manera la ecuación (16) toma la forma

$$2\sqrt{\epsilon_{\parallel} \tan^2 \alpha_n + \epsilon_{\perp}}$$

$$\left[K \left(\epsilon_a \left(\frac{\tan^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}} + \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \right) \right) - \Pi \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_{\parallel}}, \frac{\epsilon_a \left(\frac{\tan^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}} + \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \right)}{1 + \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} \cot^2 \alpha_n} \right) \right] = \frac{n\pi}{k_0 l}$$

Empleando los parámetros materiales para MBBA, se puede resolver gráficamente la ecuación (17). En la figura 2a se muestra n como función de α ; en estas gráficas los valores permitidos de α son aquellos para los cuales el valor de n es entero, a su vez, los valores permitidos de p se obtienen de la ecuación (6). Una expresión explícita para $H_y(\zeta, k_0)$ se puede obtener insertando $H_{0+} = H_{0-} = E_0/2$, en donde $E_0^2/8\pi$ es la densidad de energía del haz incidente, y los valores permitidos de p están dados por (13). De esta forma se encuentra que

$$H_y(\zeta, k_0) = \frac{E_0}{\sqrt[4]{\epsilon_{zz} - p^2}} \exp \left(-ipk_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \right) \cos \left(k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\eta, k) \right). \quad (18)$$

Un resultado importante que se infiere de la ecuación (17) es la frecuencia de corte, ω_c de la guía de onda en consideración. ω_c está definida por la condición de que β , que es la componente x del vector de onda, sea nula. Puesto que $\beta = pk_0$ basta tomar $p = 0$ en la ecuación (16) para obtener dicha frecuencia, esto es

$$\omega_c = \frac{n\Pi}{lc\sqrt{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}} K \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_{\parallel}} \right)} \quad (19)$$

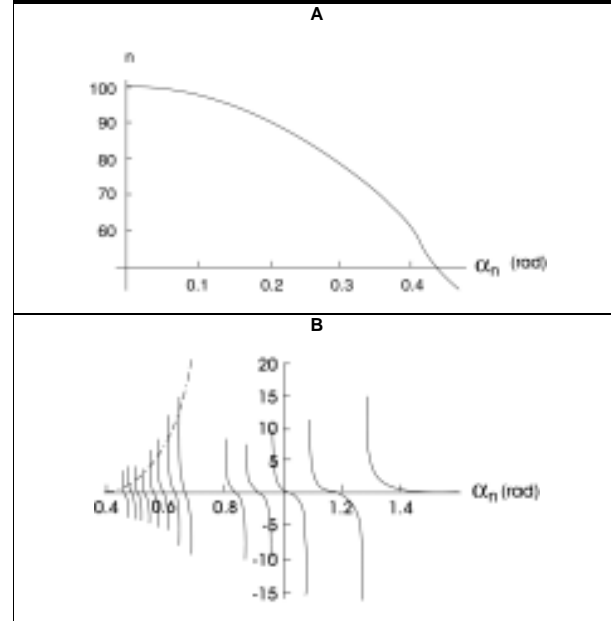
2. Régimen fuerte $\epsilon_{\perp} < p < \epsilon_{\parallel}$

Como se mostró en la sección anterior, para este régimen las trayectorias de rayo se confinan entre el par de cústicas localizadas en

$$\zeta = \pm a = \pm \frac{1}{\pi} \arccos \left(\sqrt{\frac{p^2 - \epsilon_{\perp}}{\epsilon_a}} \right). \quad (20)$$

Está bien establecido que en la vecindad de una cústica, la expresión (18) ya no es válida (El-Sawi, 1987), y que en su lugar se deben emplear las reglas de conexión en la aproximación semiclásica, válidas en la vecindad de un punto de

FIGURA 2. A). MODO n COMO FUNCIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA α_n PARA MBBA (RÉGIMEN DÉBIL). B). SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA ECUACIÓN (27) PARA MBBA. LAS INTERSECCIONES DE LAS CURVAS (---) Y (- - -) REPRESENTAN LOS VALORES PERMITIDOS DE α_n .



retorno. Estas están dadas por

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \operatorname{sen} \left(\int_{\zeta}^a \Gamma(\zeta) d\zeta - \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \exp \left(\int_{\zeta}^a \Gamma(\zeta) d\zeta \right) \quad (21)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\Gamma}} \cos \left(\int_{\zeta}^a \Gamma(\zeta) d\zeta - \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \exp - \left(\int_{\zeta}^a \Gamma(\zeta) d\zeta \right) \quad (22)$$

en donde se ha definido

$$\Gamma(\zeta, k_0) = \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (p^2 - \epsilon_{zz})}}{\epsilon_{zz}}. \quad (23)$$

Si al igual que antes, se coloca al sistema de coordenadas en el centro de la celda, y se emplean las reglas de conexión junto con las condiciones de frontera para los modos TM , es posible determinar la forma de $H_y(\zeta, k_0)$ que para el intervalo $-1/2 < \zeta < -a$ resulta ser

$$H_y(\zeta, k_0) = \frac{E_0}{\sqrt[4]{p^2 - \epsilon_{zz}}} \exp \left(-ip_n k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \right) \cosh \left(k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \Gamma(\eta, k_0) \right) \quad (24)$$

Para el intervalo $-a < \zeta < a$, $H_y(\zeta, k_o)$ está dado por

$$H_y(\zeta, k_o) = -\frac{E_o}{\sqrt[4]{\epsilon_{zz} - p_n^2}} \exp\left(-ip_n k_o l \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}}\right) \left[\exp\left(-k_o l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_o)\right) \cos\left(k_o l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_o) - \frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(k_o l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_o)\right) \sin\left(k_o l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_o) - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (25)$$

y, finalmente, en el intervalo $a < \zeta < 1/2$ se tiene que

$$H_y(\zeta, k_o) = \frac{E_o}{\sqrt[4]{p_n^2 \epsilon_{zz}}} \exp\left(-ip_n k_o l \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}}\right) \cosh\left(k_o l \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_o)\right) \quad (26)$$

Para el régimen fuerte la expresión análoga a la ecuación (16) toma la forma

$$\tan\left(k_o l \int_a^{\zeta} d\eta \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (\epsilon_{zz} - p_n^2)}}{\epsilon_{zz}}\right) = \sinh\left(2k_o l \int_a^{\zeta} d\eta \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (p_n^2 - \epsilon_{zz})}}{\epsilon_{zz}}\right) \quad (27)$$

De manera similar a como se manejó la condición análoga a esta ecuación para el régimen débil, los valores de α_n o p se pueden calcular sustituyendo la ecuación (6) en esta ecuación. Esto nos lleva a una ecuación trascendental para α . El punto importante que debe enfatizarse es que la solución gráfica de dicha ecuación determina los valores permitidos de α en el régimen fuerte que se muestran en la figura 2b para el nemático MBBA. Una observación importante que se puede inferir de las expresiones (16) y (27) es que la última adquiere una forma similar a la primera cuando n es grande. Para mostrar esto, debe recordarse, por una parte, que $k_o l \gg 1$ en dicha ecuación, puesto que ésta es válida en el límite WKB. Por otra parte, debido a que el límite de integración “ a ” es una función de p^2 dada por la ecuación (20), y es tal que cuando $p^2 \rightarrow \epsilon_{\parallel}$, que equivale a considerar modos de orden bajo, el intervalo de integración del miembro izquierdo de la ecuación (27) tiende a cero. Por lo tanto, el miembro derecho de la misma ecuación tiende a un límite finito. Sin embargo, si el valor de p no es tan cercano a pero ϵ_{\parallel} todavía se encuentra dentro del régimen fuerte, el

miembro derecho de la ecuación (27) es muy grande debido a que $k_o l \gg 1$. Esto implica que $\tan(x)$ es igual a un número muy grande por lo que la ecuación (27) se puede aproximar por

$$k_o l \int_a^{\zeta} d\eta \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (\epsilon_{zz} - p_n^2)}}{\epsilon_{zz}} = n\pi, \quad (28)$$

en donde n es un entero positivo. Nótese que esta expresión tiene la misma estructura que la ecuación (16), la única diferencia es que la longitud del intervalo de integración se ha reducido a la región en la cual las trayectorias de rayo existen, es decir de $-a$ hasta a . Es importante señalar la manera en que los valores de n están relacionados con los regímenes débil y fuerte. Esto ya se podía observar desde la ecuación (16). En efecto, puesto que ϵ_{zz} es una cantidad positiva definida y los límites de integración no dependen de p^2 , el lado izquierdo de dicha ecuación es mayor conforme p es más cercano a cero; es decir, tienen modos altos. Complementariamente, si $p^2 \rightarrow \epsilon_{\parallel}$, el valor de la integral (16) decrece y por lo tanto también el valor de n . De esta manera podemos decir que el régimen débil contiene los números de modo más grandes de la guía. Por otra parte, nótese que la ecuación (27) para el régimen fuerte tiene el mismo integrando que la ecuación (16), sin embargo, en esta última los límites de integración dependen de p a través de a . Entonces, conforme $p^2 \rightarrow \epsilon_{\parallel}$ el intervalo de integración decrece y tiende a cero, de donde necesariamente n toma valores enteros pequeños. Puede concluirse, entonces, que los valores más grandes de n , esto es los modos altos, se encuentran en el régimen débil, mientras que los modos más bajos asociados con valores pequeños de n corresponden al régimen fuerte (Reyes y Rodríguez, 1997).

III. Solitones ópticos

En las secciones anteriores se mostró que en una celda plana nemática con fronteras perfectamente conductoras existe un efecto de guía de onda que concentra la densidad de energía electromagnética en la parte central de la celda. Sin embargo, en dichas secciones el análisis se efectuó en el régimen lineal de las ecuaciones dinámicas del campo electromagnético. El propósito fundamental de esta sección es considerar la primera corrección no lineal de la dinámica del campo electromagnético. Específicamente, se mostrará

que en una celda que contiene un nemático en reposo pueden propagarse solitones asociados al campo electromagnético gobernados por la ecuación de Schrödinger no lineal (ESNL), cuyos parámetros de propagación están determinados por la relación de dispersión y la densidad de energía elástica del nemático.

1. Régimen no lineal de los modos TM

En esta subsección se mostrará que la ecuación dinámica no lineal para la componente H_y de los modos TM se puede separar de forma explícita en dos partes, una lineal en H_y y la otra no lineal. A partir de la ecuaciones (45) de I se puede observar que H_y depende de θ a través de las componentes ϵ_{zz} , ϵ_{xx} y ϵ_{xz} , a su vez θ se acopla con el campo eléctrico a través de la ecuación (39) de I. Como se discutió en la sección III (1) de I, la magnitud de dicho acoplamiento se mide por medio del parámetro q que aparece en dicha ecuación. Es importante resaltar que en las secciones anteriores fueron calculados los campos electromagnéticos a orden cero en este parámetro, mientras que aquí se calcularán a primer orden en el mismo parámetro. Es decir, en este caso la intensidad del haz incidente será comparable con la densidad de energía elástica del nemático, a diferencia de lo supuesto en las secciones anteriores en donde la intensidad del haz se consideró despreciable comparada con esta última. Sustituyendo la expresión θ de primer orden en q , dada por $\theta = \pi\zeta$, consistente con las condiciones de frontera planares, en la ecuación (39) de I y despreciando términos de orden superior en q , se obtiene la ecuación dinámica para H_y que es de la forma:

$$LH_y = FH_y, \tag{29}$$

en donde

$$L\left(\frac{d}{d\zeta}, ik, ip\right) = \epsilon_{zz}^0 \frac{d^2}{d\zeta^2} + 2ipkl\epsilon_{xz}^0 \frac{d}{d\zeta} + (kl)^2 \left[\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} - p^2 \epsilon_{zz}^0 \right] \tag{30}$$

y

$$F = -\frac{q}{2} \theta_s^{(1)}(H_y) \left[2ipkl \left(\epsilon_{xz}^1 - \epsilon_{zz}^1 \frac{\epsilon_{xz}^0}{\epsilon_{zz}^0} \right) \frac{d}{d\zeta} - (kl)^2 p^2 \left(\epsilon_{xx}^1 - \epsilon_{zz}^1 \frac{\epsilon_{xz}^0}{\epsilon_{zz}^0} \right) \right] \tag{31}$$

Aquí se ha empleado la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz}^0 &= \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \text{sen}^2 \Pi \zeta, \epsilon_{xz}^0 = \epsilon_a \text{sen} \Pi \zeta \cos \Pi \zeta, \epsilon_{xx}^0 \\ &= \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \cos^2 \Pi \zeta, \\ \epsilon_{xx}^1 &= -\epsilon_{zz}^1 = \text{sen} 2\Pi \zeta \\ \epsilon_{xz}^1 &= \cos 2\Pi \zeta \end{aligned}$$

y

$$\theta_s^{(1)}(H_y) = \int_0^{\zeta} \int_0^{\zeta} d\eta \left[\left(|E_x|^2 - |E_z|^2 \right) \cos 2\pi\eta + \left(E_x E_z^* + E_z E_x^* \right) \text{sen} 2\pi\eta \right]. \tag{32}$$

Como es claro en las ecuaciones (31) y (32), el operador F es no lineal en H_y ya que las componentes E_x y E_z en una guía de ondas dependen de H_y . En cambio, el operador L es lineal en H_y , puesto que sólo depende de ζ , según se observa de la ecuación (30).

2. Ecuación para la envolvente de un paquete de ondas

A continuación se mostrará que la envolvente de un paquete de ondas electromagnéticas que se propagan en una celda plana de cubiertas metálicas cuyo núcleo es un cristal líquido nemático satisface la ESNL.

Hasta este punto sólo se ha estudiado la propagación de modos TM monocromáticos con frecuencia ω bien definida. En esta sección se extenderá el análisis para tomar en cuenta paquetes de ondas. El estudio de la dinámica de paquetes de ondas es una extensión natural a considerar, ya que representan casos más realistas que las ondas planas. Una motivación adicional es la tendencia reciente de la tecnología de comunicaciones en transmitir la información de forma digitalizada, es decir, en paquetes o unidades (bits) de información (Agrawal, 1989). Considérese primero la transformada de Fourier, en el tiempo, de un modo puro TM, $H_y(x, \zeta, t)$, como el dado en la ecuación (44) de I; la cual se denotará por $H(x, \zeta, \omega)$ y está dada por

$$H'_y(x, \zeta, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{ik(\omega_0)x} H_y(\zeta, \omega_0) + c.c., \tag{33}$$

en donde $c.c.$ es el complejo conjugado y $\delta(\omega - \omega_0)$ es la delta de Dirac. La ecuación (33) exhibe claramente que la distribución espectral de este campo está concentrada en una sola frecuencia. De manera distinta, un paquete de modos, en el

mismo espacio espectral, se puede expresar como

$$H(x, \zeta, \omega) = \bar{A}(\omega - \omega_0, \zeta) e^{ik(\omega_0)x} H_y(\zeta, \omega_0) + c.c., \quad (34)$$

en donde $A^-(\omega - \omega_0, \zeta)$ es la distribución que caracteriza al espectro de frecuencias. Si se considera que esta distribución es muy angosta, es decir, que es distinta de cero sólo en un intervalo pequeño en torno a $\omega - \omega_0 = 0$ y de grueso $q = \sqrt{\omega - \omega_0} / \omega_0 \ll 1$ se puede aproximar la ecuación (34) desarrollando $H_y(\zeta, \omega)$ en serie de Taylor en torno a $\omega = \omega_0$. Si se toma la transformada inversa de Fourier de (34) así como la aproximación antes mencionada, se obtiene

$$H_y^{(0)}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n H_y}{d\omega^n} \int (\omega - \omega_0)^n \bar{A}(\omega - \omega_0, \zeta) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0) + c.c. \quad (35)$$

Finalmente, empleando la siguiente identidad

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \omega_0)^n \bar{A}(\omega - \omega_0, \zeta) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0), n = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

(35) se puede escribir en forma compacta como

$$H_y^{(0)}(x, y, t) = e^{ik(\omega_0)x - i\omega_0 t} H_y \left[\zeta, \omega_0 + iq \frac{\partial}{\partial T} \right] (X, T) + c.c. \quad (37)$$

Aquí $A(X, T)$ es la transformada de Fourier de la distribución espectral de frecuencia y es una función que depende suavemente de sus variables $X \equiv qx$ y $T \equiv qt$. Esto implica que en el espacio de configuración, la amplitud del campo varía lentamente tanto con x como con t .

Nótese que en la definición de este paquete de ondas se ha incluido a $H_y(\zeta, \omega_0)$ que es la amplitud del modo lineal TM que se calculó explícitamente en la sección anterior y que se mostró que presentaba el efecto de guía de onda. Esto implica que, por construcción, el paquete dado por la ecuación (37) presenta también el efecto de guía de onda. El paquete de modos representado por la ecuación (37) tendrá correcciones de órdenes superiores en q que provienen de los subsiguientes armónicos inducidos, los cuales representaremos por $H_y^{(1)}, H_y^{(2)}$, etc. De esta manera, la expresión más general para el campo H_y está dada por

$$H_y^{(1)} = qH_y^{(0)} + q^2H_y^{(1)} + q^3H_y^{(2)} + \dots, \quad (38)$$

Es importante recordar que cada una de estas componentes $H_y^{(0)}, H_y^{(1)}, H_y^{(2)}, \dots$, se expresan en términos de los modos lineales de la guía, por lo que H_y presentará también el efecto de guía de onda.

En consistencia con el desarrollo anterior, se debe desarrollar el operador $L(d/d\zeta, ik, ip)$ respecto de sus dos últimos argumentos y en torno a $\omega = \omega_0$ y $k = k_0$, de la misma forma en que se desarrolló $H_y(\zeta, \omega_0)$. De esta manera, la ecuación (29) se puede expresar en forma simbólica como

$$L \left(\frac{d}{d\zeta}, ik_0 + q \frac{\partial}{\partial X_1} + q^2 \frac{\partial}{\partial X_2}, i\omega_0 + q \frac{\partial}{\partial T} \right) q e^{ik(\omega_0)x - i\omega_0 t} H_y^{(0)} \left(\zeta, \omega_0 + iq \frac{\partial}{\partial T} \right) A(X, T) + q^2 H_y^{(1)} + q^3 H_y^{(2)} K + \dots = q^3 F H_y^{(0)}, \quad (39)$$

en donde $X = qX_1 = q^2X$ y $T = qt$. Aquí se ha empleado el desarrollo de H_y dado por la ecuación (38); asimismo, se ha indicado adicionalmente que las derivadas respecto a las variables x y t se calculan utilizando el método de múltiples escalas, el cual es válido cuando la función a desarrollar depende de forma lenta con sus variables. En esta técnica, cada una de las múltiples escalas de tiempo representan a los distintos periodos de tiempo asociados a cada uno de los múltiplos de ω_0 . Efectuando los desarrollos en serie indicados en la ecuación (39) y agrupando los términos del mismo orden en q , se obtiene n órdenes consecutivos en q las siguientes ecuaciones

$$q: L \left(\frac{d}{d\zeta}, ik_0, ip_0 \right) H_y^{(0)}(\zeta, \omega_0) = 0, \quad (40)$$

$$q^2: \left(L_2 \frac{\partial \bar{A}}{\partial X_1} + L_3 \frac{\partial A}{\partial T} \right) H_y^{(0)} + iL \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial T} = -LH_y^{(1)}, \quad (41)$$

$$q^3: \left(L_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} \bar{A} \bar{A} + \frac{1}{2} L_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} + \frac{1}{2} L_{33} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \bar{A} \bar{A} + L_{23} \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1 \partial T} \right) H_y^{(0)} +$$

$$\left(L_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} + L_3 \frac{\partial A}{\partial T} \right) \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial T} - \frac{1}{2} L \frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = LH_y^{(2)} + \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) O H_y^{(0)} A^3, \quad (42)$$

en donde el operador está dado por

$$O = ipkl \left[\varepsilon \cos 2\pi\zeta \varepsilon_a / + 2 \right] \frac{d}{d\zeta} - (kl)^2 p^2 \varepsilon \operatorname{sen} 2\pi\zeta \quad (43)$$

En las ecuaciones (40) y (41) los subíndices 2 y 3 indican las derivadas parciales del operador L respecto a su segundo y tercer argumento; dichas derivadas deben ser evaluadas en $\omega = \omega_0$ y $k = k_0$. La ecuación (40) muestra la consistencia del tratamiento a orden q con el tratamiento a orden cero. Por otro lado, la ecuación (41) se puede simplificar si se emplea la siguiente identidad

$$L \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} - i L_2 H_y^{(0)} + i \frac{dk}{d\omega} L_3 H_y^{(0)} = 0, \quad (44)$$

la cual se puede deducir derivando la expresión $LH_y^{(0)} = 0$ con respecto a ω . Sustituyendo la ecuación (44) en la ecuación (41) se obtiene

$$LH_y^{(1)} = -L_2 H_y^{(0)} \left[\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{dk}{d\omega} \frac{\partial A}{\partial T} \right] H_y^{(0)}. \quad (45)$$

Para asegurar que la ecuación (45), que es una ecuación inhomogénea, tenga una solución $H_y^{(1)}$, es necesario pedir que satisfaga la condición alternativa de Fredholm (Moloney y Newell, 1990). Las hipótesis que requiere dicha condición para aplicarse son, por una parte que el operador L sea un operador singular, es decir, que exista una función $H_y^{(0)}$ tal que $LH_y^{(0)} = 0$ y por otra, que la solución $|H_y^{(0)}| \rightarrow 0$ conforme $|x| \rightarrow \infty$. Esto es, la condición alternativa de Fredholm exige que el miembro inhomogéneo G de la ecuación (45) sea ortogonal a la solución $H_y^{(0)}$ de la ecuación homogénea asociada. Esto es

$$\langle G, H_y^{(0)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta G(\zeta) H_y^{(0)}(\zeta) = 0. \quad (46)$$

La condición (46) para el caso particular de la ecuación (45) toma la forma

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \left[\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{dk}{d\omega} \frac{\partial A}{\partial T} \right] = 0. \quad (47)$$

Ahora bien, calculando L_2 a partir de la ecuación (30) y haciendo uso de las ecuaciones (45)-(47) de I, se obtiene

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle = -2(kl)^2 \int_{1/2}^{1/2} E_z^{(0)*} H_y^{(0)} dz' = S_x, \quad (48)$$

en donde S_x es la componente del vector de Poynting a lo largo del eje de la celda. Es fácil mostrar que S_x es distinto de cero aun en el caso en el que $p = 0$, lo cual permite afirmar que la única forma para satisfacer la condición (47) es pidiendo que

$$\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{dx}{d\omega} \frac{\partial A}{\partial T} = 0. \quad (49)$$

Finalmente, la ecuación (42) se puede simplificar empleando la condición (52) junto con la siguiente identidad H_y

$$L \frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial \omega^2} = -2i \frac{dk}{d\omega} L_2 \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} + 2i L_3 \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} - i \frac{d^2 k}{d\omega^2} L_2 H_y^{(0)} + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^2 L_{22} H_y^{(0)} - 2 \frac{dk}{d\omega} L_{23} H_y^{(0)} + L_{33} H_y^{(0)}, \quad (50)$$

la cual resulta de derivar la ecuación (44) respecto ω . De esta manera la ecuación (45) se transforma en

$$LH_y^{(2)} = -L_2 H_y^{(0)} \left(\frac{\partial A}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{2d\omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right) - 3 \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) O H_y^{(0)} A^2 A^*. \quad (51)$$

Esta ecuación es inhomogénea para $H_y^{(2)}$, al igual que la ecuación (45). Para garantizar que tenga solución, se exige nuevamente que satisfaga la condición alternativa de Fredholm dada por la ecuación (46). Dicha condición para el caso de la ecuación (51) toma la forma

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{2} \langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2}, H_y^{(0)} \rangle \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{3}{2} i \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \langle \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) O H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle A^2 A^* = 0. \quad (52)$$

Puede sustituirse la variable X_2 por X y T a través de la expresión aproximada $q\partial A/\partial X_2 = \partial A/\partial X + dk/d\omega\partial A/\partial T$; asimismo, efectuando el cambio de variables definido por $\tau = q(t - dk/dwx)$, $\chi = qX$, la ecuación (52) se transforma en

$$\begin{aligned} \langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle &> \frac{\partial A}{\partial \chi} + \frac{1}{2} \ddot{A} \langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2}, H_y^{(0)} \rangle > \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} \\ -\frac{3}{2} i \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \langle \theta_s^{(l)}(H_y^{(0)}) \circ H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle &> A^2 A^* = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

que es la ecuación de Schrödinger no lineal para la envolvente de un tren de ondas de ancho y amplitud q que se propaga por una celda cuyo núcleo es un cristal líquido nemático (Rodríguez y Reyes, 1997). La relevancia de este resultado radica en que desde hace dos décadas se sugirió que las soluciones tipo solitón de la ESNL es la unidad “bit” ideal para transmitir información digitalmente en fibras ópticas (Agrawal, 1990). Su primera ventaja es que el autoenfocamiento no lineal puede equilibrarse con la dispersión, que muchas veces limita el uso de pulsos cortos en el régimen lineal. Una segunda ventaja es que la ESNL es una ecuación integrable exactamente. Por lo tanto, no solo describe pulsos robustos y solitarios, sino que además estos pulsos son solitones y tienen la característica de que para pulsos con distintas frecuencias portadoras se tienen distintas velocidades de propagación, por lo que se atraviesan uno a el otro sin distorsión. En consecuencia, se podrían enviar varios trenes de solitones que representarían bits de información a lo largo de una sola guía. Cada tren contendría solitones moviéndose a velocidades ligeramente distintas, por lo que la guía transmitiría en varios canales de información simultáneamente.

Es importante resaltar que para obtener la ecuación (53) tan sólo se ha supuesto que H_y satisface la ecuación (40), por lo que el formalismo es consistente para cualquier orden de modo TM tanto en los regímenes fuerte y débil. Mas aún, esta ecuación es válida, aunque a nivel formal, en presencia de flujo hidrodinámico externo, como el considerado en la sección anterior; solo se debe sustituir el valor de H_y en ausencia de flujo por su valor en presencia de éste.

En la siguiente sección se calcula la forma como dependen los parámetros de estos solitones con las propiedades materiales del nemático y con el parámetro de propagación de la guía, cuando el nemático está en reposo.

3. ESNL para una guía de onda nemática

El cálculo de los primeros coeficientes de la ecuación (53) es inmediato. En efecto, sustituyendo las ecuaciones (24-26) en la ecuación (53) se obtiene

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \gg \int_0^{l/2} \frac{d\zeta}{\epsilon_{zz}^0} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}}} \quad (54)$$

y

$$\begin{aligned} \langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2}, H_y^{(0)} \rangle &\gg \frac{d^2 k \sqrt{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}}}{d\omega^2} \int_0^{l/2} \frac{d\zeta}{\epsilon_{xx}\sqrt{\epsilon_{zz}^0}} \\ &= \frac{d^2 k \sqrt{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}}}{d\omega^2} \Pi \left(-\frac{\epsilon_a}{\epsilon_{\perp}}, \frac{\epsilon_a}{\epsilon_{\parallel}} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Por otro lado, para calcular el tercer término se requiere conocer tanto $\theta_s^{(l)}(H_y^{(0)})$ como $\circ H_y^{(0)}$. Luego, para calcular $\circ H_y^{(0)}$, se aplica la ecuación (46) al campo $H_y^{(0)}$ dado por la ecuación (24) de donde se obtiene n_2 , el coeficiente del término no lineal de la ecuación (53),

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\epsilon_a l^2}{K} \langle \theta_s^{(l)}(H_y^{(0)}) \circ H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \\ &= ip\sqrt{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}} \sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} \text{sen} \left[2kl \int_{-l/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \\ &\quad + p^2 \frac{\epsilon_{xz}^0}{\epsilon_{zz}^0} \cos^2 \left[2kl \int_{-l/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \\ &\quad - c(pk)^2 \text{sen}(2\pi\zeta) \cos^2 \left[2kl \int_{-l/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Nótese que el parámetro kl sólo aparece en los argumentos de $\cos \left[kl \int_{-l/2}^{\zeta} d\zeta f(\zeta, k) \right]$ y $\text{sen} \left[2kl \int_{-l/2}^{\zeta} d\zeta f(\zeta, k) \right]$. Por lo tanto, empleando identidades trigonométricas elementales, se pueden escribir los dos últimos términos de la ecuación (56) como

$$\begin{aligned} &\int_{-l/2}^{l/2} d\zeta' g(\zeta') \cos \left[kl \int_{-l/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-l/2}^{l/2} d\zeta g(\zeta) + \int_{-l/2}^{l/2} d\zeta g(\zeta) \cos \left[2kl \int_{-l/2}^{\zeta} d\zeta' f(\sigma, k) \right] \right], \end{aligned} \quad (57)$$

en donde $g(\zeta)$ es una función independiente de kl . Puesto

que en el límite WKB $kl > 1$, entonces $\cos[2kl] d\sigma f(\sigma, k)$ es una función que oscila rápidamente con su argumento, de donde los dos últimos términos del miembro derecho de la ecuación (59) se puede aproximar como

$$I_{-1/2}^{1/2} d\zeta' g(\zeta') \cos[2kl] I_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k) \approx g(\zeta_0) \frac{\text{sen}[2kl] I_{-1/2}^{1/2} d\sigma f(\sigma, k)}{kl f(\zeta_0, k)} \quad (58)$$

en donde $g(\zeta_0)$ es el valor medio de $g(\zeta_0)$ entre $-1/2$ y $1/2$. Entonces, a orden dominante en $1/kl$ se puede aproximar la ecuación (57) por su primer término solamente. Aplicando el mismo análisis a todos los términos de la ecuación (56), dicha ecuación puede aproximarse como

$$\langle \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) O_{H_y^{(0)}, H_y^{(0)}} \rangle \approx \frac{1}{2} (pkl)^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} I_{-1/2}^{1/2} \frac{\text{sen } 2\pi \zeta \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) I \zeta}{(\epsilon_{zz}^0)^2 \sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2}} \quad (59)$$

Esta expresión se puede calcular también analíticamente en términos de integrales elípticas completas de primera, segunda y tercera clase. Por otro lado, como es bien conocido (Moloney Newell, 1990), la solución tipo solitón de la ESNL, ecuación (53), está dada por

$$A(\tau, \zeta) = 2\eta \text{sech} \left(\frac{\tau}{t_0} \right) e^{i(\zeta/x_0 - \tau - kx)} \quad (60)$$

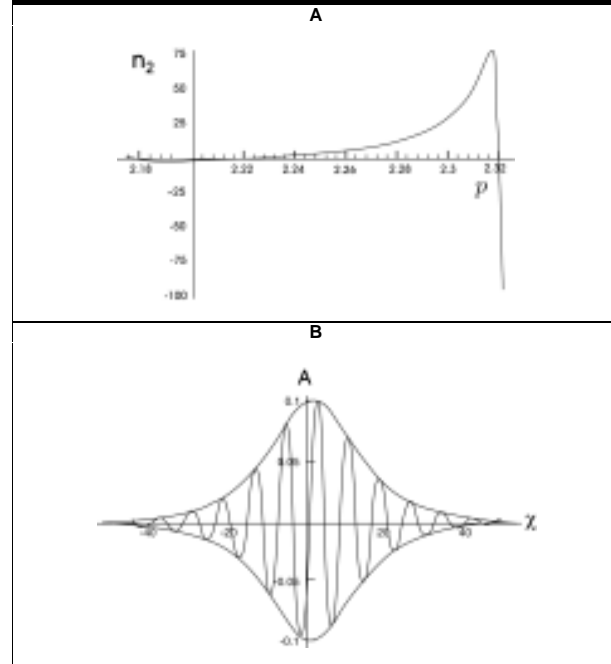
en donde

$$t_0 = \frac{1}{2\eta} \frac{\left\langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2}, H_y^{(0)} \right\rangle}{n \left\langle \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) O_{H_y^{(0)}, H_y^{(0)}} \right\rangle} \quad (61)$$

$$x_0 = \frac{1}{2\eta^2} \frac{1}{n \left\langle \theta_s^{(1)}(H_y^{(0)}) O_{H_y^{(0)}, H_y^{(0)}} \right\rangle} \quad (62)$$

Aquí η es la amplitud del paquete y n es el índice de refracción del medio. Note que t_0 proporciona el tiempo necesario para que la envolvente del paquete de ondas, que se desplaza a la velocidad de grupo $dk/d\omega$ del nemático y cuyo perfil es una secante hiperbólica, atraviese un punto

FIGURA 3. A) PERFIL DE SOLITÓN DESCRITO POR LA ECUACIÓN DE SCHRODINGER NO LINEAL. SE MUESTRA TANTO LA AMPLITUD DEL SOLITÓN COMO SU PARTE REAL. B) ÍNDICE DE REFRACCIÓN NO LINEAL n_2 COMO FUNCIÓN DE LA CONSTANTE DE PROPAGACIÓN p PARA EL RÉGIMEN FUERTE EN MBBA.



fijo en la celda. Asimismo, x_0 proporciona la diferencia entre la longitud de onda de la fase de $A(\tau, \chi)$ y el largo de la envolvente del paquete de ondas. En la figura 3a se muestra el perfil descrito por la ecuación (60) para algunos valores de t_0 y ζ_0 . En dicha gráfica se muestra tanto la parte real de la ecuación (60) como la envolvente de la misma.

Nótese que tanto t_0 como x_0 dependen de p como se puede ver de las ecuaciones (61) y (62), el cual a su vez depende de la dirección de incidencia media del paquete. En la figura 3b se muestra el coeficiente no lineal n_2 dado por la ecuación (59) como función del parámetro de propagación p de los modos TM en el régimen fuerte. En esta gráfica se observa que dicho coeficiente es negativo y pequeño para valores de p cercanos a $\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$, se anula en $p = 2.23$ y crece rápidamente para valores mayores de p hasta que toma su máximo en $p = 2.3175$, a partir de donde vuelve a decrecer. Es importante señalar que en la región en donde n_2 es positiva se pueden generar solitones “brillantes”, es decir para los cuales la intensidad de energía electromagnética se concentra; mientras que en las regiones con n_2 negativo se pueden generar solitones “oscuros”, para los

cuales el haz óptico se desenfoca y la energía densidad electromagnética disminuye (Rodríguez y Reyes, 1997). El punto importante a destacar es que n_2 toma sus valores positivos más grandes para valores de p cercanos a $\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$, es decir para aquellos trenes de ondas cuya dirección de incidencia esté cercana al eje de la celda; por lo que en dicha región los pulsos cortos, t pequeño, generarán solitones brillantes.

Una cantidad importante a estimar de estos solitones es la potencia que ellos transportan o bien la potencia que se debe suministrar a un pulso óptico para generar un solitón.

$$P = \frac{4c A \lambda}{2\pi n_2 t_0^2} \frac{d^2 k \sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}}{d\omega^2} \quad (63)$$

Sustituyendo valores específicos correspondientes a un haz láser con $\lambda = 1.27 \text{ m}$, con pulsado típico de $t = 10 \text{ s}$ que se propaga por una celda de área transversal $A = 20 \mu\text{m}$, cuyo núcleo es el nemático MBBA (Moloney y Newell, 1990), esto es el coeficiente

$$n_2 = \left(\epsilon_{\perp} / k \right) \langle \theta_s^{(t)} (H_y^{(o)}) \rangle H_y^{(o)}, H_y^{(o)} \rangle \\ = (04783)(20 \mu\text{m}) / 3.3 (10^{-12} \text{ N}) (75)$$

a 22° C y la segunda derivada de la relación de dispersión (Zhong -Can y Zang, 1995) para esta longitud de onda es

$$\lambda d^2 k \sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}} / d\omega^2 = 6.38926 \text{ s};$$

de donde se obtiene el valor $P = 10 \text{ Watts}$. Como es bien conocido, este valor es del orden de magnitud de los láseres menos intensos.

Conclusiones y perspectivas

Aquí se analizaron dos fenómenos de propagación óptica en una celda plana de cristal líquido nemático, a saber, el efecto de guía de onda y la propagación de solitones ópticos. En el primer fenómeno, los efectos fotorrefractivos inducidos por los cambios locales del índice de refracción de un nemático distorsionado concentran la energía de un haz óptico incidente por la parte

central de la celda. En el segundo se tomaron en cuenta débilmente las contribuciones no lineales para construir la ecuación que gobierna a la envolvente de un paquete de ondas, y se mostró que esta es la ecuación de Schrodinger no lineal.

Otras situaciones que involucran distintas configuraciones nemáticas como la híbrida (Reyes y Rodríguez, 1998) también se han considerado, así como geometrías distintas que incluyen tanto a la cilíndrica (Reyes y Rodríguez, 1997b; Rodríguez y Reyes, 1999) como la esférica (Reyes, 1998), las cuales son relevantes en otros contextos, tanto de aplicación como de ciencia básica. En varios de estos casos se han investigados tanto los efectos fotorrefractivos que sufren los rayos ópticos al propagarse linealmente por el nemático, como de autoenfocamiento (Reyes y Rodríguez, 2000) compensado por dispersión, que permite viajar a estructuras robustas como los solitones. En un modelo en donde despreciamos condiciones de frontera y describimos al cristal líquido por medio del parámetro de orden, tomamos en cuenta los efectos disipativos generados por la reorientación y calculamos la longitud de penetración de los solitones en el nemático (Reyes y Palfy-Muhoray, 1998). La interacción de las ondas electromagnéticas con otro tipo de solitones, como los orientacionales, también se ha investigado (García-Reimbert *et al.*, 2000) y se ha analizado su influencia sobre los parámetros de propagación de haces ópticos. Finalmente, hemos tomado en cuenta el efecto de un flujo impuesto externamente (Rodríguez y Reyes, 1996) sobre guía de ondas nemáticas, así como los efectos electroreológicos (Rodríguez *et al.*, 1999) que un campo estático eléctrico tiene sobre la viscosidad efectiva de un nemático en flujo estacionario. ☺



REFERENCIAS

- Agrawal, G. P. (1989). *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, London.
- Born, M. y E. Wolf (1975). *Principles of Optics*. Pergamon Press, New York.
- Durbin, S.; S. Arakelian y Y. She (1981). "Optical-Field-Induced Birefringence and Freedericksz Transition in a Nematic Liquid Crystal", *Phys. Rev. Lett.* 47 1411.
- El Sawi, M. (1987). "On the WKB approximation", *J. Math. Phys.*, 28 566.
- García-Reimbert, C; C. Garza-Hume, A. Minzoni; J. Reyes, R.F. Rodríguez y N. Smith (2000). "Active Propagation and Cut-off for Low TM Modes in a Nonlinear Nematic Waveguide", *Physica D.* 145(1-2) 145-158.
- Moloney, J. y A. Newell (1990). "Nonlinear Optics", *Physica D.* 44, 1.
- Reyes, J. (1998). "Ray propagation in nematic droplets", *Phys. Rev. E* 57, 6700-6705.

- Reyes, J. (1999). "Ray Propagation in Inhomogeneous Anisotropic Media" *J. Phys. A Math Gen.* 32(18), 3409-3418.
- Reyes, J. y R. Rodríguez (1995). "Wave Guide Effect in a Cell With a Liquid Crystalline Core", *J. Nonlin. Opt. Phys. Mat.* 4, 943.
- _____ (1997). "Single Mode Waveguide With a Liquid Cristal Core", *J. Nolin. Opt. Phys. Mat.* 6, 81-93.
- _____ (1997). "Guiding of Optical Fields in a Liquid Crystal Cylindrical fiber" *Opt. Comm.* 134, 349.
- _____ (1998). "Waveguiding in a Nematic Hybrid Slab", *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 317, 135-15.
- _____ (2000). "Pulsed Beam in a Nonlinear Nematic Fiber", *Physica D.* 141, (3-4) 333-343.
- Reyes, J. y P. Palfy-Muhoray (1998). "Nonlinear Schrodinger Equation in Nematic Liquid Crystals", *Phys. Rev. E*, 58(5) 5855-5859.
- Rodríguez, R. y J. Reyes (1996). "Propagation of Optical Fields in a Planar Liquid Crystal Wave Guide", *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 282, 287.
- _____ (1997). "Propagation of Optical Solitons in a Nematic Cored Waveguide", *J. Mol. Liq.* 71 115-128 .
- _____ (1999). "Propagation of Waves in a Cylindrical Liquid Crystal Optical Fiber", *Rev. Mex. Fís.* 45, 254-259 .
- _____ (2001) "Electrohidrodinámica de cristales líquidos nemáticos", *Ciencia ergo sum* (artículo previo en este volumen).
- Rodríguez, R. F; J. Reyes y O. Manero (1999). "Model for the Electrorheological Effect in Flowing Polymeric Liquid Crystals", *J. Chem. Phys.*, 110(16), 8197-8204.
- Tabiryan, N. A. Sukhov y B. Ya Zel'dovich (1986). *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 136, 1
- Zel'dovich, B. Ya; N. Pilipotski; A. Sulchov y N. Tabiryan(1980). *JEPT lett.*, 31, 363.
- Zhong-can, O. y X. Zhang (1995). *Phys. Rev. A* 32 1189.