

Miguel Mayorga, Lorena Romero Salazar
Criterio de irreversibilidad en fluidos
Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10402204>



Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

www.redalyc.org

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Criterio de irreversibilidad en fluidos

MIGUEL MAYORGA Y LORENA ROMERO-SALAZAR*

Resumen. *Discutimos el criterio de irreversibilidad usual en teoría cinética de gases, el cual se basa en el teorema H de Boltzmann, así como simulaciones recientes de dinámica molecular que estudian dicho criterio. Por otra parte, argumentamos que el formalismo de máxima entropía (FME), el cual es un tipo de teoría cinética variacional, conduce a una descripción unificada de los procesos irreversibles tanto en el régimen cinético como hidrodinámico de los fluidos densos, de tal manera que el criterio de irreversibilidad está basado en la minimización de la llamada información de Fisher.*

Palabras Clave: *funcional de entropía, teoría cinética, producción de entropía, funcional H.*

Criterion of Irreversibility in Fluids

Abstract. *We discuss the criterion for irreversibility, which is usual in the Kinetic Theory of dense gases, based on Boltzmann's H Theorem and on recent molecular simulations. On the other hand, we assert that the Maximum Entropy Formalism (MEF) which is a Kinetic Variational Theory leads to a unifying description for irreversible processes, both in the kinetic as well as for the hydrodynamic regime, in such a way that the irreversibility criterion is based on the so-called Fisher's minimum information theory.*

Keywords: *entropy functional, kinetic theory, entropy production, H functional.*

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 4 de abril de 2001

Introducción

La teoría cinética de gases es la parte de la física que pretende describir el comportamiento macroscópico de los fluidos en términos de las propiedades microscópicas de las partículas, en especial de sus interacciones.

A diferencia de la física newtoniana, la cual es determinista, la descripción de las propiedades de transporte para gases diluidos requirió de la herramienta de distribuciones de probabilidad. Así, en 1859, Maxwell introdujo por primera vez una función de distribución para las velocidades de un gas en equilibrio térmico (Brush, 1976). De esta manera, la función de distribución de velocidades de Maxwell $f_{eq}(\mathbf{v})$

proporciona el número promedio de partículas con velocidad \mathbf{v} por unidad de volumen, a saber:

$$f_{eq}(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT} \right) \quad (1)$$

donde m es la masa de una partícula, \mathbf{v} su rapidez, k la constante de Boltzmann, y T es la temperatura absoluta.

El trabajo de Maxwell condujo a Boltzmann a formular una teoría cinética de gases diluidos en 1872, la cual está

*Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. Instituto Literario 100, C.P. 50000. Toluca, México. Tel. (729) 6 55 56.

Correo electrónico: mmr@coatepec.uaemex.mx y fors@coatepec.uaemex.mx
Los autores agradecen el apoyo del Conacyt mediante los proyectos J32094-E y J 33080-E, respectivamente.

basada en la llamada ecuación de Boltzmann, que en ausencia de fuerzas externas se escribe de la siguiente manera,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + J(f, f),$$

donde $f \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es la función de distribución de velocidades de una partícula, misma que proporciona el número de partículas alrededor de \mathbf{r} con velocidad \mathbf{v} al tiempo t . El término convectivo $-\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ toma en cuenta los cambios en f debido al movimiento libre de las partículas y $J(f, f)$ es el operador de colisión que cuantifica el cambio en f debido a las interacciones por pares entre las partículas (Chapman y Cowling, 1990).

Simulaciones recientes de dinámica molecular (Dellago y Posch, 1997) han mostrado que la función $H(t) = \int_0^\infty f(\mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$; converge monotónicamente hacia su valor de equilibrio $H_{eq}(t) = \int_0^\infty f_{eq}(\mathbf{v}) \ln f_{eq}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ de hecho, la función $\Delta H \left(\frac{t}{\tau_c} \right) = H(t) - H_{eq}(t)$ -con τ_c el tiempo libre medio entre colisiones de una partícula individual- tiene un comportamiento universal respecto a la densidad. Lo importante para la presente discusión es que dichas simulaciones parten de una situación fuera de equilibrio en la que las velocidades de las partículas tienen la misma magnitud, pero diferente dirección, por ejemplo a $t = 0$ la función de distribución es una delta de Dirac $\delta(|\mathbf{v}|)$, que se transforma irreversiblemente en la distribución de velocidades de Maxwell en un tiempo $t \sim 10 \tau_c$. La evolución temporal de la funcional $H(t)$ hacia su valor de equilibrio $H_{eq}(t)$ se conoce como teorema \mathcal{H} de Boltzmann y es el criterio de irreversibilidad para gases diluidos.

I. Teoría cinética de gases densos

La teoría cinética de gases densos se inició con la ecuación de Enskog. A diferencia de la ecuación de Boltzmann, la de Enskog toma en cuenta el tamaño de las partículas y el aumento de la frecuencia de colisión entre las partículas. En esta aproximación, el gas está representado por esferas duras, esto es, el potencial de interacción es discontinuo y las colisiones son instantáneas. Se han hecho una gran cantidad de cálculos con dicha ecuación, y algunas de ellas han sido exitosas en el sentido de que han posibilitado obtener relaciones constitutivas para los flujos involucrados en el sistema, las cuales han permitido

calcular los coeficientes de transporte (Ernst *et al.*, 1969; Dorfman, 1981) correspondientes. Sin embargo, la existencia de un teorema \mathcal{H} para gases densos, como requisito del criterio de irreversibilidad, está lejos de ser completamente entendido (Van Beijeren, 1990; Resibois, 1978; Mareschal, 1984).

Por otra parte, en los años ochenta se desarrollaron las llamadas teorías cinéticas variacionales (TCV), las cuales se basan en el método de maximización de entropía. El principal reto en este método está en la selección de las restricciones, las cuales forman parte de las variables relevantes en el problema (Caticha, 2000).

Recientemente desarrollamos una TCV para gases densos (Romero-Salazar *et al.*, 1997), donde tomamos en cuenta que las interacciones están representadas por potenciales continuos y satisface el requisito de ser una descripción completa (Lewis, 1967). En las siguientes secciones describimos los resultados de la TCV en dos niveles de descripción, a saber, el cinético y el hidrodinámico.

II. Nivel de descripción cinético

Iniciamos con la entropía de Gibbs $S[\rho_N] = -k_B \int \rho_N \ln(N! \rho_N^N) d\Gamma_N$, la cual está escrita en términos de la densidad de la probabilidad de N partículas ρ_N en el espacio Γ , de posiciones e ímpetus de las partículas del sistema $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\} = \{\mathbf{r}_N; \mathbf{r}_N\} = \{\mathbf{x}_N\} = \Gamma_N$. Posteriormente maximizamos dicha entropía con las restricciones impuestas por el conocimiento de las funciones de distribución de una partícula (fdd-1) y de dos partículas (fdd-2), además de la condición de normalización para ρ_N , a saber:

$$\int \rho_N d\Gamma_N = 1, \tag{2}$$

$$f^{(1)}(x, t) = \int \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k) \rho_N d\Gamma_N, \tag{3}$$

$$f^{(2)}(x_1, x_2, t) = \int \sum_{\substack{j \neq k \\ k=1}}^N \delta(x_1 - x_k) \delta(x_2 - x_j) \rho_N d\Gamma_N, \tag{4}$$

donde los valores de dichas funciones estarán dados por la función de distribución ρ_N^{max} maximizada, la cual se obtiene aplicando el método de multiplicadores de Lagrange. Sustituyendo ρ_N^{max} en la ecuación de Gibbs $S[\rho_N]$, se obtiene la siguiente funcional de entropía (Romero-Salazar *et al.*, 1997a):

$$\begin{aligned}
 & S[f^{(1)}, f^{(2)}] - S_{ex}(t) \\
 &= -k_B \int f^{(1)}(x_1, t) \ln f^{(1)}(x_1, t) dx_1 \\
 & - \frac{k_B}{2} \int f^{(2)}(x_1, x_2, t) \ln g^{(2)}(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

La expresión dada en la ecuación (5) es muy importante puesto que fue obtenida en términos de la información dada por las fdd-1 y fdd-2. Este hecho es consistente con el proceso de maximización, toda vez que escogimos a las funciones de distribución relevantes para describir el comportamiento H de Boltzmann, dado que $f^{(1)}$ satisface la ecuación de Boltzmann, que es válida para gases monoatómicos diluidos (Chapman y Cowling, *ibid.*). La funcional \mathcal{H} de Boltzmann determina la dirección de la evolución temporal para gases diluidos y por lo tanto constituye un criterio de irreversibilidad válido únicamente en la región de bajas densidades.

Por otra parte, el segundo término en la funcional de entropía (5) depende de la función de distribución de pares fuera de equilibrio $g^{(2)}$. Una expresión equivalente se ha usado en la literatura para describir un gas de esferas duras (Enskog) (Mareschal, 1984), y para un gas con interacciones continuas (Wallace, 1987). La cantidad $S_{ex}(t)$ está dada en términos de funciones de partición, depende únicamente del tiempo y es una consecuencia de la restricción asociada a la normalización (2). La expresión explícita de dicho término puede verse en la literatura (Romero-Salazar *et al.*, 1997a).

Adicionalmente, si consideramos la demostración de Lewis (Lewis, 1967) respecto a la relación que guardan las funcionales de entropía dentro del proceso de maximización, podemos decir que la funcional de entropía $S[f^{(1)}, f^{(2)}]$ es más grande que $S[\rho_N]$. La razón de fondo se basa en el hecho de que la nueva funcional de entropía contiene menos información que la definida en el espacio fase, entonces $S[f^{(1)}, f^{(2)}]$, $S[\rho_N]$. En cierta manera, la demostración de Lewis puede verse como un teorema \mathcal{H} débil. Para tener un criterio de irreversibilidad más preciso, lo que resta es calcular la razón a la cual se produce la entropía, y dado que podemos interpretar a la funcional $S[f^{(1)}, f^{(2)}]$ como una entropía informacional con $f^{(1)}$ y $f^{(2)}$ la información disponible, entonces la producción de entropía representará la razón de transferencia de dicha información.

De acuerdo con lo anterior, un paso importante en nuestro esquema es la construcción de las ecuaciones de movimiento correspondientes a las funciones de distribución que

consideramos relevantes. Con dichas ecuaciones calculamos la ecuación de balance para la entropía en forma consistente con la dinámica de $f^{(1)}$ y $f^{(2)}$. Usamos las dos primeras ecuaciones de la jerarquía BBGKY (Ferziger y Kaper, 1972), para las cuales obtuvimos una cerradura a nivel de la función de distribución de tres partículas (Romero-Salazar *et al.*, 1997a) con dichas ecuaciones obtuvimos el balance de entropía (Mayorga *et al.*, 1997a).

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_1} \cdot [J_s(r_1, t) + u \cdot S] = \sigma(r_1, t), \quad (6)$$

donde $J_s(r_1, t)$ es el flujo de entropía total y $\sigma(r_1, t)$ la producción de entropía. En este punto es importante enfatizar que la descripción de la última ecuación corresponde al espacio fase de dos partículas. Aun cuando tenemos una expresión explícita para la producción de entropía, un resultado importante consistió en encontrar una cota superior para la misma (Mayorga *et al.*, 1997b), a saber:

$$\sigma(r_1, t) \leq \sigma^{cin}(r_1, t), \quad (7)$$

donde

$$\sigma^{cin}(r_1, t) = kL^{(1)}\mathcal{I}_1(r_1, t) + \frac{k}{2}L_1^{(2)}\mathcal{I}_1^{(2)}(r_1, t) + \frac{k}{2}L_2^{(2)}\mathcal{I}_2^{(2)}(r_1, t), \quad (8)$$

con

$$\mathcal{I}_1^{(1)}(r_1, t) = \int \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p_1} f^{(1)}\right)^2}{f^{(1)}} dp_1, \quad (9)$$

$$\mathcal{I}_1^{(2)}(r_1, t) = \int \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p_1} g^{(2)}\right)^2}{g^{(2)}} dr_2 dp_2 dp_1,$$

$$\mathcal{I}_2^{(2)}(r_1, t) = \int \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p_1} g^{(2)}\right)^2}{g^{(2)}} dr_2 dp_2 dp_1, \quad (10)$$

donde las integrales $\mathcal{I}_j^{(i)}(r_1, t)$ son una medida del gradiente en ímpetus de las funciones de distribución, entonces un valor grande en el gradiente implica un valor grande en la integral. Con respecto a la forma de la función de distribución, un valor grande en el gradiente de ímpetus implica una anchura pequeña en la función de distribución correspondiente; por

lo tanto, sería fácil localizar las partículas con una velocidad determinada. Es importante enfatizar que el valor de las integrales $\mathcal{I}_j^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ depende de las correlaciones de las velocidades. Por otra parte, la integral $\mathcal{I}_j^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ contiene la dependencia en ímpetus de la fdd-1, que es diferente de cero aun en el caso más simple cuando $f^{(1)}$ es una función de distribución de Maxwell y en este caso particular dicha integral está relacionada con la energía cinética promedio por partícula o la temperatura cinética (Mayorga, 1998).

Las integrales $\mathcal{I}_i^{(j)}$ se pueden identificar con los elementos diagonales de la llamada matriz de información de Fisher (Frieden, 1998). Adicionalmente, la teoría de inferencia estadística (Van Trees, 1968) nos permite aplicar la desigualdad de Cramer-Rao, misma que establece una relación entre las integrales de Fisher y la desviación cuadrática promedio de la variables de interés, que en este caso corresponden a los ímpetus de las partículas. Como consecuencia obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\mathcal{I}_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) \left[(\rho_1 - \mu)^2 g^{(1)}(1, t) d\rho_1 \right]^{-1} \quad (11)$$

y

$$\mathcal{I}_1^{(2)}(\mathbf{r}, t) \left[(\rho_1 - \mu)^2 g^{(2)}(1, 2, t) d\rho_1 d\rho_2 d\mathbf{r}_2 \right]^{-1} \quad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) cuantifican las características de las funciones de distribución mencionadas anteriormente. Adicionalmente, la cota superior para la producción de entropía (8) nos señala el aumento de la entropía —en concordancia con la segunda ley de la termodinámica—, pero no a cualquier velocidad, sino a una velocidad máxima dada por la cota superior.

III. Nivel de descripción hidrodinámico

En la sección anterior consideramos la descripción de un gas denso dentro del esquema del FME, donde las restricciones impuestas están dadas por las ecuaciones (2-5). De esta manera hemos construido un esquema completo en el sentido descrito por Lewis (1967). Ahora nos preguntamos qué ocurre si queremos una descripción hidrodinámica en lugar de una cinética.

En este caso las funciones relevantes para describir el sistema serán las variables hidrodinámicas.

A fin de proceder con el principio variacional, maximizamos a la entropía $S[f^{(1)}, f^{(2)}] - S_{\text{ex}}(t)$, ecuación (5) con las siguientes restricciones:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int m f^{(1)}(x, t) d\rho_1, \quad (13)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) u(\mathbf{r}, t) = \int \rho_1 f^{(1)}(x, t) d\rho_1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{r}, t) = & \int \frac{[\rho_1 - \mu u(\mathbf{r}, t)]^2}{2m} f^{(1)}(x, t) d\rho_1 \\ & + \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f^{(2)}(x_1, x_2, t) dx_2 d\rho_1, \end{aligned} \quad (15)$$

donde $\rho(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de masa, $\rho(\mathbf{r}, t) u(\mathbf{r}, t)$ la densidad de ímpetu y $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ la densidad de energía interna. Aquí se debe observar que la densidad de energía interna se ha escogido de manera consistente con la aproximación cinética, la cual implica que la energía potencial de las partículas es una función aditiva por pares del potencial intermolecular $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

Finalmente, la normalización de la función de correlación de pares dinámica $g^{(2)}(x, x_2, t)$ corresponde físicamente a las correlaciones de las fluctuaciones de la densidad (Hansen y McDonald, 1976; Romero-Salazar y Mayorga, 1998; Romero-Salazar *et al.*, 1999) a saber,

$$\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{m} \Delta(\mathbf{r}, t) = f^{(1)}(x_1, t) f^{(1)}(x_2, t) \times [g^{(2)}(x_1, x_2, t) - 1] dx_2 d\rho_1 \quad (16)$$

donde $\Delta(\mathbf{r}, t)$ es una medida de la desviación de $g^{(2)}$ de la independencia estadística de las partículas, donde $f^{(2)}(x_1, x_2, t) = f^{(1)}(x_1, t) f^{(1)}(x_2, t) \times g^{(2)}(x_1, x_2, t)$.

Continuando con el proceso de maximización, la funcional de entropía resultante queda escrita en términos de las variables relevantes escogidas, las cuales, en este caso, corresponden a las variables hidrodinámicas (Romero-Salazar *et al.*, 1999):

$$\begin{aligned} S[\rho(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}, t) u(\mathbf{r}, t), \epsilon(\mathbf{r}, t)] = & \frac{\epsilon(\mathbf{r}, t)}{T(\mathbf{r}, t)} \\ & - k_B \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{m} \ln \left[\frac{\rho_{\text{al}}}{m} \left(\frac{2\pi m k_B T(\mathbf{r}, t)}{h^2} \right)^{-3} \right] \\ & - \frac{k_B}{2} \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{m} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2, t)}{m} \ln [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, t) - 1] d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Ahora la funcional de entropía es una función local que depende en ese sentido de (\mathbf{r}, t) a través de las variables

hidrodinámicas. Esta expresión para la entropía es uno de los principales ingredientes de la descripción completa a nivel hidrodinámico, dado que está escrita en términos de las variables hidrodinámicas y las fluctuaciones de la densidad. Adicionalmente a una contribución ideal ρ_{id} , el último término involucra a las fluctuaciones de la densidad, lo cual garantiza la naturaleza aditiva de la entropía, que puede escribirse en su forma estándar, a saber:

$$S(\mathbf{r}_1, t) = \frac{\epsilon(\mathbf{r}_1, t)}{T(\mathbf{r}_1, t)} - \frac{\mathcal{A}(\mathbf{r}_1, t)}{T(\mathbf{r}_1, t)}, \quad (18)$$

i.e., el segundo término de la ecuación (18) corresponde a la energía libre de Helmholtz.

En función de esta descripción, aplicando la hipótesis de equilibrio local (Kreuzer, 1981), tendríamos la siguiente expresión para la producción de entropía:

$$\sigma^{hid}(\rho, t) = \frac{\kappa}{m} \left[D \rho \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 + \nu \rho \frac{m}{\kappa T} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{3}{2} \rho \lambda \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 \right] \geq 0 \quad (19)$$

donde D , ν y λ son los coeficientes de difusión, viscosidad cortante y conductividad térmica, respectivamente.

IV. Descripción cinética e hidrodinámica unificada

De acuerdo con las descripciones anteriormente señaladas, observamos dos etapas en la evolución irreversible de un gas denso hacia el estado de equilibrio. En este sentido podemos escribir a la máxima producción de entropía de la siguiente manera:

$$\sigma(\mathbf{r}_1, t) = \sigma^{cin}(\mathbf{r}_1, t) + \sigma^{hid}(\mathbf{r}_1, t) \quad (20)$$

donde $\sigma^{cin}(\mathbf{r}_1, t)$ y $\sigma^{hid}(\mathbf{r}_1, t)$ están dadas por las ecuación (8) y (19) respectivamente. En cuanto a interpretación física se refiere, en el régimen cinético tenemos que la máxima producción de entropía está en función de las integrales diferenciales de Fisher asociadas a las funciones de distribución relevantes, de manera que el sistema alcanza el equilibrio local cuando se redistribuyen las velocidades de las partículas y la función de distribución es la de Maxwell, ecuación (1). Esto ocurre a un tiempo muy corto y como lo muestran cálculos de dinámica molecular (Dellago *et al.*, 1997), dicho tiempo es del orden de 10 veces el tiempo entre colisiones.

Por otra parte, una vez conseguida la redistribución de las velocidades, y por lo tanto el equilibrio local, posteriormente ocurre la redistribución espacial de las partículas de tal forma

que los procesos disipativos están cuantificados por la producción de entropía que predice la termodinámica de procesos irreversibles (19).

Conclusiones

En el presente artículo señalamos que el formalismo de máxima entropía aplicado al caso de gases densos permite elaborar una descripción sistemática del fluido para diferentes escalas de tiempo. Aun cuando desde el punto de vista de Lewis (1967) hemos elaborado una descripción completa, todavía nos resta desarrollar el método para abordar aplicaciones específicas. En particular, necesitaríamos de un método para resolver nuestras ecuaciones cinéticas, de tal modo que junto con las condiciones (Lewis, 1967; Wallace, 1987) obtengamos las funciones de distribución importantes en nuestra descripción. Dos de los métodos que pueden ser prometedores para llevar a cabo dicha tarea, serían el método de simulación directa de Montecarlo (SDMC) (Alexander *et al.*, 1997), y un modelo de gas de Boltzmann en red aplicado a gases densos (Martys, 1999). 



REFERENCIAS

- Alexander, F. y A. García (1997). Comp. in *Phys.*, 11, 588.
- Brush, S. (1976). *The Kind of Motion we Call Heat*. North Holland, Amsterdam.
- Caticha, A. (2000). "Maximum Entropy, Fluctuations and Priors", MaxEnt2000, 20th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods, France (math-ph/0008017).
- Chapman, S. y T. G. Cowlin (1990). *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*. Cambridge U.P.
- Dellago, C. y H. Posch (1997). *Phys. Rev.* R9.
- Dorfman, J. (1981). *Physica A*, 106, 77.
- Ernst, M.; L. Haines y J. Dorfman (1969). *Rev. Mod. Phys.* 41, 296.
- Ferziger, J. y H. Kaper (1972). *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North- Holland Amsterdam.
- Frieden, B. (1998). *Physics from Fisher Information*. Cambridge University Press.
- Hansen, J. e I. McDonald (1976). *The Theory of Simple Liquids*, Academic Press, New York.

- Kreuzer, H. (1981). *Non-Equilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations*. Claredon Press, New York.
- Lewis, R. (1967). *J. Math. Phys.*, 8, 1448.
- Mareschal, M. (1984). *Phys. Rev. A.*, 29, 926.
- Martys, N. (1999). *Intl. J. Mod. Phys. C*, 10, 1367.
- Mayorga, M. (1998). *Intl. J. Mod. Phys. C*, 9, 1299.
- Mayorga, M., L. Romero-Salazar y R. Velasco (1997a). *Physica A*, 237, 169.
- Mayorga, M., L. Romero-Salazar y R. Velasco (1997b). *Physica A*, 246, 145.
- Resibois, P. (1978). *J. Stat. Phys.*, 19, 593.
- Romero-Salazar, L.; M. Mayorga y R. Velasco (1997a) *Physica A*, 237, 150.
- Romero-Salazar, L.; M. Mayorga y R. Velasco (1997b) *Physica A*, 234, 830.
- Romero-Salazar, L.; M. Mayorga y R. Velasco (1999). *Physica A*, 269, 211.
- Van Beijeren, H. (1990). *Fundamental Problems in Statistical Mechanics VII*. Elsevier Science Publishers.
- Van Trees, H. (1968). *Detection, Estimation and Modulation Theory*. Wiley, New York.
- Wallace, D. (1987). *Phys. Rev. A.*, 35, 4334.