

Nora Bretón  
Electrodinámica no lineal en gravitación  
Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001  
Universidad Autónoma del Estado de México  
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10402212>



*Ciencia Ergo Sum*,  
ISSN (Versión impresa): 1405-0269  
[ciencia.ergosum@yahoo.com.mx](mailto:ciencia.ergosum@yahoo.com.mx)  
Universidad Autónoma del Estado de México  
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

[www.redalyc.org](http://www.redalyc.org)

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Electrodinámica no lineal en gravitación

NORA BRETÓN\*

**Resumen.** *Se revisan las motivaciones que dieron lugar a la formulación de la teoría de la electrodinámica no lineal de Born-Infeld; así como el acoplamiento de dicho campo con gravitación, descrito por las ecuaciones de Einstein-Born-Infeld, de las que presenta una solución la cual representa el choque de dos ondas electromagnéticas no lineales, cuya interacción, a diferencia del caso lineal, origina un campo gravitacional. Finalmente, se comenta que la geometría que siente un fotón de Born-Infeld y uno de Maxwell no es la misma.*

**Palabras Clave:** *modelo Born-Infeld, interacción no lineal, ondas gravitacionales.*

## Non Linear Electrodynamics in Gravitation

**Abstract.** *This paper reviews the motivations that gave rise to the formulation of Born-Infeld's theory of non linear electrodynamics, described by the equations of Einstein-Born-Infeld. The paper presents a solution to the equations of Einstein-Born-Infeld, that represents the collision of two non linear electromagnetic waves; whose interaction, in contrast to the linear case, gives rise to a gravitational field. Finally, the paper suggests that the geometry "felt" by a photon of Born-Infeld and a photon of Maxwell is not the same.*

**Keywords:** *Born-Infeld model, no linear interactions, gravitation waves.*

*Recepción: 8 de noviembre de 2000*

*Aceptación: 14 de mayo de 2001*

## Introducción

En los fenómenos electromagnéticos que ocurren en nuestra vida diaria, por ejemplo, recepción de ondas de radio, manejo de aparatos eléctricos, conducción de electricidad, conversaciones telefónicas, etcétera, no tenemos evidencia de violación de las leyes de Maxwell, o sea, que el campo electromagnético obedece la superposición lineal. Esto vale tanto para fenómenos a nivel macroscópico como a nivel atómico. Es quizá en el nivel subatómico en el cual podrían esperarse desviaciones del comportamiento lineal. A medida que partículas cargadas se aproximan unas a otras, sus campos eléctricos se hacen enormes. Es natural, a fin de evitar los infinitos de las autoenergías de las partículas puntuales,

pensar que ocurre una especie de saturación del campo, esto es, que la magnitud del campo electromagnético tiene un límite superior.

Electrones en órbitas atómicas se caracterizan por magnitudes del campo del orden de  $10^9 - 10^{15}$  volts/cm, mientras que el campo eléctrico en la orilla de un núcleo pesado es del orden de  $10^{19}$  volts/cm. Es para estas magnitudes de campos que pueden darse efectos no lineales. Para Born e Infeld (B-I) (1934) esta idea de saturación de campo, análoga a la idea de una velocidad máxima (de la luz) en mecánica, fue la motivación para proponer una teoría electromagnética no lineal. B-I proponen sustituir el lagrangiano de Maxwell,  $L_M$  por otro,  $L_{nte}$ , que contenga términos no lineales en los invariantes electromagnéticos:

\*Departamento de Física, Cinvestav del IPN. Apartado Postal 14-740, 07000. México, D. F. Agradezco el apoyo financiero del Conacyt (México). Proyecto 32086-E. Correo electrónico: nora\_bretón@fis.cinvestav.mx

$$L_M = \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \rightarrow L_{nle} = b^2 \left\{ \sqrt{1 + F - G^2} - 1 \right\}$$

donde  $F = \frac{1}{b^2}(B^2 - E^2)$  y  $G = \frac{1}{b^2}(B \cdot E)$ ,  $B$  y  $E$ , son respectivamente la inducción magnética y el campo eléctrico. Mientras que  $b$  es la magnitud de campo máxima. En el límite en que  $b \rightarrow \infty$  se recupera la electrodinámica lineal de Maxwell. Si partimos del principio general de que todas las leyes de la naturaleza pueden expresar por ecuaciones covariantes ante transformaciones espacio-temporales, o sea que no dependen del sistema de referencia en que se formulen, se encuentra para esta teoría una justificación más profunda: que existe un grupo de transformaciones para el cual el nuevo lagrangiano no lineal,  $L_{nle}$ , tiene una integral espacio-temporal invariante, esto es  $\int L_{nle} d\tau d^3x = \text{Invariante}$ . Además que este grupo sea más amplio que el grupo de Lorentz (correspondiente al lagrangiano de Maxwell). De hecho este nuevo lagrangiano  $L_{nle}$  se puede derivar a partir de suposiciones de invariancia. Otro enfoque de la electrodinámica no lineal es verla como una teoría fenomenológica de la polarización en el vacío (Jackson, 1975). Existe una no linealidad mecanocuántica de los campos electromagnéticos que surge porque el principio de incertidumbre permite la creación momentánea a partir de dos fotones de un par electrón-positrón que desaparece emitiendo dos fotones diferentes. Este proceso se conoce como *dispersión de luz por luz*. En este proceso, dos ondas planas electromagnéticas no se suman coherentemente, obedeciendo la superposición lineal, sino que al interactuar se transforman en dos ondas planas diferentes. Este efecto cuántico se puede modelar para campos que varían lentamente, como una permeabilidad eléctrica y magnética,  $D$ ,  $B$  que dependen de la magnitud de los campos, del radio clásico del electrón  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  y de la constante de Planck:

$$D_i = \sum_k \varepsilon_{ij} E_k, \quad B_i = \sum_k \mu_{ij} H_k$$

donde

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{e^4 \hbar}{45\pi m^4 c^7} \left[ 2(E^2 - B^2)\delta_{ij} + 7B_i B_j \right] + \dots$$

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} + \frac{e^4 \hbar}{45\pi m^4 c^7} \left[ 2(B^2 - E^2)\delta_{ij} + 7E_i E_j \right] + \dots$$

$e$  y  $m$  son la carga y la masa del electrón. En el límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) estos efectos no lineales desaparecen. Para

no linealidades pequeñas, la magnitud mecanocuántica  $b_q = 0.51 \frac{e}{r_0^2}$  juega un papel análogo al parámetro de Born-Infeld  $b = \frac{e}{r_0^2}$ , que es el campo eléctrico en la superficie del electrón clásico (el campo a una distancia  $r_0$  o radio clásico del electrón).

En analogía con el electromagnetismo en un medio material, a los términos dependientes del campo en las fórmulas anteriores se les llama efectos de polarización del vacío. Además de la dispersión de luz por luz, la polarización del vacío ocasiona corrimientos muy pequeños en los niveles de energía atómicos.

El origen de estos efectos está en el acoplamiento entre las partículas cargadas y el campo electromagnético. Éstos modifican las interacciones entre partículas cargadas y provocan interacciones entre los campos aun en ausencia de partículas.

Por lo anterior, la electrodinámica no lineal puede usarse como una teoría que incorpora algunos efectos cuánticos que tienen lugar cuando la magnitud de los campos eléctrico o magnético sobrepasa cierto umbral. Existen situaciones donde los campos electromagnéticos en espacios curvos son críticos. Podemos mencionar algunas épocas tempranas en la evolución del universo (García-Salcedo y Bretón, 2000) o en objetos colapsados gravitacionalmente, en regiones cercanas a una singularidad. En esos procesos sería ingenuo pensar que la electrodinámica clásica con fotones que no interactúan entre sí nos puede dar una imagen realista. Ahí es particularmente útil la electrodinámica no lineal cuando se acopla con gravitación, ya que hasta ahora no se ha establecido una teoría satisfactoria que cuantice la gravedad.

### I. Una acción apropiada para electrodinámica no lineal

Para determinar las ecuaciones de la electrodinámica no lineal se usa el principio de mínima acción de la forma

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}_{nle} d\tau = 0, \quad d\tau = dt dx dy dz$$

es decir, la acción  $S$  debe ser invariante.

Para determinar el lagrangiano apropiado correspondiente a la electrodinámica no lineal, se propone una combinación lineal de los posibles invariantes que se pueden formar a partir del tensor de campo electromagnético no lineal,  $p_{\mu\nu}$ , considerando términos hasta de cuarto orden. El lagrangiano más sencillo que satisface el principio general de invariancia es, en coordenadas generales,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-|g_{\mu\nu} + p_{\mu\nu}|} - \sqrt{-|g_{\mu\nu}|},$$

o, en coordenadas cartesianas,  $L = \sqrt{1 - F - G^2} - 1$  donde  $F$  y  $G$  son los dos posibles invariantes asociados al tensor  $p_{\mu\nu}$ . Cuando se calcula el campo eléctrico para el electrón usando esta teoría se obtiene un campo finito, a diferencia de la teoría de Maxwell.

El principio de acción se puede generalizar para que contenga las leyes de gravitación de Einstein sumando a la integral de acción de la electrodinámica no lineal el término  $\int R\sqrt{-g}d\tau$ . Acoplado la gravitación con el campo electromagnético no lineal podemos incorporar algunos efectos cuánticos en situaciones donde el campo gravitacional es importante.

**II. Una solución de las ecuaciones de Einstein-Born-Infeld**

Se han encontrado varias soluciones para las ecuaciones de electrodinámica no lineal acopladas con gravitación. Podemos mencionar las encontradas por Salazar *et al.* (1987) y referencias allí dadas. A continuación se presenta una solución (Bretón, 1996) que puede ser interpretada como la colisión de dos ondas electromagnéticas no lineales cuya interacción da lugar a un campo gravitacional.

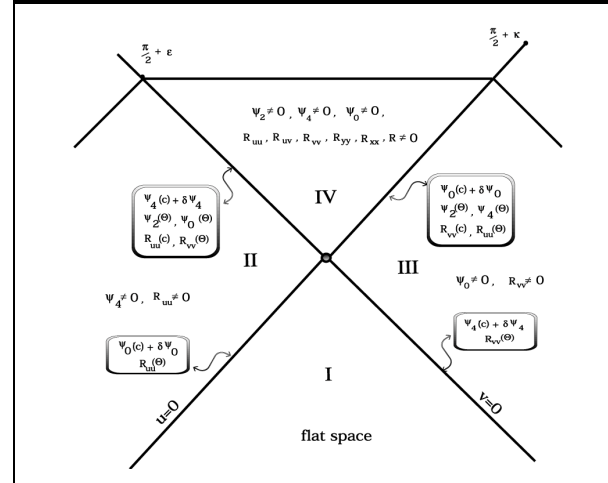
Los sistemas de ondas colisionantes en relatividad general se describen usando cuatro regiones que corresponden a cuatro etapas de la colisión. Se consideran sólo dos dimensiones  $(u, v)$  del espacio cuatridimensional de coordenadas  $(u, v, x, y)$ . La justificación para ignorar a las otras dos coordenadas es que en esas direcciones hay simetrías por las que el tensor métrico es invariante ante traslaciones (existen campos vectoriales de Killing  $\partial_x, \partial_y$ ). En la solución que nos ocupa (analizada en Bretón, 1996) esas regiones son las que se muestran en la figura 1. La región I representa el espacio-tiempo previo al paso de las dos ondas y está descrita por el elemento de línea

$$ds_I^2 = 2dudv + dx^2 + dy^2, \tag{1}$$

que corresponde a un espacio plano de Minkowski. La región II corresponde al espacio-tiempo donde viaja una de las ondas (descrita por la componente del tensor de Weyl  $\Psi_4$  por una componente del tensor de Riemann  $R_{uu}$ ) que posteriormente chocará con la que existe en la región III (descrita por la componente del tensor de Weyl  $\Psi_0$  y por la componente del tensor de Riemann  $R_{vv}$ ). Estas ondas están descritas por métricas parecidas, sólo que una depende de la coordenada  $u$  solamente y otra sólo de  $v$ :

$$ds_{II}^2 = 2dudv + \cos^2[\epsilon(au)]dx^2 + \cos^2[k(av)]dy^2 \tag{2}$$

FIGURA 1. EN ESTA FIGURA SE ILUSTRAN EL CONJUNTO DE ESPACIOS QUE REPRESENTAN LAS ETAPAS DE LA COLISIÓN DE DOS ONDAS, EN COORDENADAS  $(u, v)$ , EL ESPACIO PREVIO AL PASO DE LAS DOS ONDAS (REGIÓN I); EL ESPACIO QUE CONTIENE UNA ONDA QUE VIAJA HACIA LA DERECHA (REGIÓN II); EL ESPACIO QUE CONTIENE UNA ONDA QUE VIAJA HACIA LA IZQUIERDA (REGIÓN III), Y POR ÚLTIMO LA REGIÓN DESPUÉS DEL INSTANTE EN QUE HA OCURRIDO LA COLISIÓN (REGIÓN IV). LA REGIÓN IV ESTÁ LIMITADA POR LA SUPERFICIE  $u+v=\pi/2+\epsilon$  MÁS ALLÁ DE ÉSTA, EL ESPACIO-TIEMPO PUEDE CONTINUARSE USANDO OTRO SISTEMA DE COORDENADAS.



$$ds_{III}^2 = 2dudv + \cos^2[\epsilon(bv)]dx^2 + \cos^2[k(bv)]dy^2 \tag{3}$$

Las perturbaciones viajan en frentes de onda situados en las superficies  $(u = 0, v, x, y)$  y  $(u, v = 0, x, y)$ , que están representados por discontinuidades tipo  $\delta$  de Dirac o funciones escalón de Heaviside  $\Theta$  sobre dichas superficies. Cada una de estas regiones está “cosida” a la siguiente tomando en cuenta las condiciones a la frontera que exigen continuidad en el tensor métrico, mas no a sus primeras y segundas derivadas. Son estas discontinuidades en el tensor  $p_{\mu\nu}$  las que transportan la información de la onda plana. En los límites entre estas regiones también las componentes del tensor de Riemann, relacionadas con la curvatura del espacio-tiempo, presentan discontinuidades.

El punto donde se unen las cuatro regiones (el centro en la figura 1) representa el instante de la colisión de las ondas en la superficie  $(u=0, v=0, x, y)$ .

La región IV queda descrita por

$$ds_{IV}^2 = 2dudv + \cos^2(\xi(u, v))dx^2 + \cos^2(\eta(u, v))dy^2, \tag{4}$$

que es el espacio-tiempo que se desarrolla posterior a la colisión. En éste surge un campo gravitacional descrito por la componente coulombiana del tensor de Weyl  $\Psi_2$  y por la curvatura escalar  $R$  (ambas son cero antes del choque).

Este es el resultado de la interacción no lineal de las autoenergías de las ondas (como si los fotones tuvieran una pequeña masa). Antes de la colisión no hay campo gravitacional; éste es inducido por la colisión no lineal de las ondas electromagnéticas.

El proceso anteriormente descrito tiene un límite lineal que se obtiene cuando el parámetro de Born  $b \rightarrow \infty$ . Este límite corresponde a la solución llamada de Bell-Szekeres (1974) y representa la colisión de dos ondas electromagnéticas de choque con amplitudes constantes y polarización constante. La solución de Bell-Szekeres es conformalmente plana en el interior de cada región y después de la colisión no se genera ningún campo gravitacional. Las ondas en este caso son discontinuidades a través de las fronteras entre las diferentes regiones que describen el proceso.

Muchas de las soluciones que representan la colisión de dos ondas se caracterizan por la existencia de una singularidad, que ocurre en un tiempo posterior al choque, debido a un efecto de “enfoco” de las dos ondas. Esto se debe al tipo de simetrías que se deben asumir para determinar soluciones exactas en estos casos. En nuestro caso, la colisión no lineal no cambia la naturaleza de la superficie de “enfoco” de las ondas. Esta es semejante a la que tiene lugar en un choque lineal: es una superficie no singular que puede ser extendida a otro espacio-tiempo usando coordenadas diferentes (en lo que se llama horizonte de Cauchy).

### III. Propagación en el campo electromagnético no lineal

Un fotón de Born-Infeld no *siente* lo mismo que un fotón de Maxwell. Esta es la conclusión cuando se analizan las ecuaciones de las superficies características correspondientes a la teoría de gravitación (Einstein) acoplada al campo de Maxwell, por una parte, y la gravitación acoplada con un campo de Born-Infeld, por otra.

Las superficies características son aquellas que propagan las discontinuidades de un campo. Estas superficies son los frentes de onda que en espacio plano conocemos como *eikonal*. En un espacio curvo caracterizado por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  el campo electromagnético de Maxwell se propaga sobre las superficies  $S$  definidas por las ecuaciones

$$g^{\mu\nu} S_{\mu, S_{\nu}} = 0, \tag{5}$$

Si en vez del campo lineal consideramos el de Born-Infeld, las ecuaciones de las superficies características están dadas por

$$\left( g^{\mu\nu} + 4\pi E^{\mu\nu} / b^2 \right) S_{\mu, S_{\nu}} = \gamma^{\mu\nu} S_{\mu, S_{\nu}} = 0, \tag{6}$$

donde  $E_{\mu\nu}$  es la densidad de energía momento del campo electromagnético no lineal. Este campo da origen a que la geometría ( $\gamma_{\mu\nu}$ ) en que se mueve el fotón de Born-Infeld no sea la misma que la del fotón de Maxwell ( $g_{\mu\nu}$ ), esta última es en la que se mueve también el gravitón. Cuando se toma el límite  $b \rightarrow \infty$  en la ecuación (6), obtenemos la ecuación (5), como debe corresponder al límite lineal. Esta diferencia puede producir efectos como, por ejemplo, en un hoyo negro que posee un campo electromagnético muy fuerte, los fotones con cierta energía pueden evitar caer en la singularidad. Se puede profundizar en esta línea consultando (Novello *et al.*, 2000a y 2000b).

### Conclusiones

Finalmente mencionamos que existe otra línea de interés en la electrodinámica no lineal de Born-Infeld, y es en el contexto de la teoría de cuerdas. Resulta que la acción efectiva para los objetos solitónicos conocidos como D-branas (hiperplanos, donde los extremos de las cuerdas abiertas pueden terminar sin salirse de ellos), tiene la forma de la acción de Born-Infeld. Esto es, dichas D-branas obedecen una dinámica de Born-Infel (Gibbons y Herdeiro, 2001).

Es evidente, sobre todo en la última sección del artículo, que cuando la magnitud de los campos electromagnéticos es tal que la naturaleza no lineal de las interacciones deba ser considerada, entonces la aplicación de conceptos tradicionales basados en la electrodinámica de Maxwell no es apropiada.



### BIBLIOGRAFÍA



Bell, P. y P. Szekeres (1974). *Gen. Relativ. Gravit.* 5, 275.  
 Born, M. y L. Infeld (1934). *Proc. Roy. Soc. London* A144, 425.  
 Bretón, N. (1996). *Phys. Rev.* D54, 7386.  
 García-Salcedo, R. y N. Bretón (2000). *Int. J. Mod. Phys. A* 15, 4341.  
 Gibbons, G. y C. Herdeiro (2001). “Born-Infeld Theory and String Causality”, *Phys. Rev.*{\bfD63} 064006  
 Jackson, J. (1975). *Classical Electrodynamics*. Second Ed. John Wiley Sons.  
 Novello, M.; S. Pérez Bergliaffa y J. Salim (2001a). *Class. and Quantum Gravity*, 17 3821-3831;  
 Novello, M.; V. de Lorenci; J. Salim y R. Klippert (2001b). *Phys. Rev. D.* 61 045001.  
 Salazar, H.; A. García y J. Plebanski (1987). *J. Math. Phys.* 28, 2171.