Rolando Alvarado Flores

Observaciones sobre la no linealidad

Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
México



*Ciencia Ergo Sum,*
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

# Observaciones sobre la no linealidad

ROLANDO ALVARADO FLORES*

*A Lourdes Lara,*
*por su paciencia*

**Resumen.** *Se estudia el papel que juega el análisis no lineal de los sistemas físicos como un nuevo instrumento cognitivo que puede ser usado en física así como en otras áreas de investigación. Para ello, se parte de reconstruir la noción de "paradigma" de modo tal que pueda ser utilizada como unidad de análisis, y de una teoría de la referencia que elimina los designadores rígidos como inútiles en la práctica científica.*
**Palabras clave:** *objetividad científica, paradigmas, estructuras coherentes.*

**Observations About Non Linearity**
**Abstract.** *The main purpose of this paper is to analyze the role of the non linear analysis of physical systems as a new cognitive tool that can be used as well in physics as in other areas of scientific research. It proposes a clear definition of "paradigm" that can be used as an analytic unit, and a theory of reference that avoids the use of "rigid designators", because they are useless, in the scientific practice. Of course, the possible philosophical consequences of such a proposition also are noted.*
**Keywords:** *scientific objetivity, paradigms, coherent structures.*

*Recepción: 8 de noviembre de 2000*
*Aceptación: 24 de abril de 2001*

## Introducción

Genéricamente se pueden aducir razones, como veremos, para considerar el concepto de no linealidad como extremadamente simple, a pesar de ser tratado, en ocasiones, como el punto de partida para la explicación de otro concepto, quizá más inaprehensible: la complejidad.

Estas razones genéricas se derivan de la matematización que predomina en el ámbito de la ciencia física, pues su condición histórica está avalada por la práctica exitosa de sus cultores: la mayoría de los problemas de la ciencia física se tratan de resolver estableciendo relaciones entre las diferentes variables que se utilizan para describir el espacio formal en el cual se modelan los procesos naturales, suplementadas con reglas que intentan ligar estas construcciones con aquello a lo cual refieren. Por tanto, la cuestión de la no linealidad se reduce a una cuestión sintáctica: a la manera en la cual son representados los fenómenos en un espacio matemático, y no necesariamente a la manera en la cual se construyan las reglas de referencia, porque, finalmente, a pesar de todas las transformaciones formales que intentan simplificar la forma de las ecuaciones, se esperaría que la referencia al fenómeno no cambie.

Las relaciones establecidas son relaciones funcionales entre variables especificadas a través de operaciones infinitesimales, por lo que los datos del problema físico son representados en un espacio matemático, donde la búsqueda de soluciones puede ser esquematizada de la manera siguiente: se trata de encontrar un subespacio-solución de las relaciones entre las variables dentro del espacio en el cual se ha convenido en modelar el fenómeno físico.

* *Universidad de Zacatecas, Centro de Estudios Multidisciplinarios. Insurgentes No.108 A, Col. Centro C.P. 98000. Zacatecas, Zacatecas. Teléfono: (01) 49 24 34 18.*
*Se reconoce el apoyo otorgado para la realización de este trabajo al Centro de Estudios Multidisciplinarios de la Universidad Autónoma de Zacatecas, a través de Rogelio Cárdenas Hernández quien siempre mostró interés en este tipo de cuestiones. A los doctores Máximo Agüero y Jorge Fujioka, de la Universidad Autónoma del Estado de México y de la Universidad Nacional Autónoma de México, respectivamente, por el apoyo moral y financiero. Finalmente, mi agradecimiento a los árbitros, por sus valiosas sugerencias. Por supuesto, todos los errores que persistan son enteramente de mi responsabilidad.*

Estos subespacios están, por lo general, determinados a través de soluciones de una ecuación diferencial con sus condiciones de contorno especificadas, si es que el planteamiento de base adopta el punto de vista de que el fenómeno es enteramente "local" (que en el sentido formal del análisis implica un entorno arbitrariamente pequeño de un punto, y en cuya interpretación física está implicada la interacción por contactos entre las diferentes piezas del medio), de una ecuación integral, igualmente con sus condiciones de contorno establecidas, si es que las interacciones consideradas se extienden a lo largo de una región bastante más "amplia" (desde el punto de vista del análisis como operadores extendidos a regiones finitas del espacio, en tanto que físicamente involucran la noción de "acción a distancia"), o bien una ecuación que combine ambos tipos de interacciones, y posiblemente diferencias finitas entre las variables dependientes.

Desde el punto de vista del modelador no se discriminan, ni es fácil hacerlo, a las relaciones establecidas entre las variables que conducirán a ecuaciones de fácil o difícil solución, ya que lo importante es inducir el espacio del problema y las relaciones funcionales entre las variables. Sin embargo, examinando las ecuaciones a las que se llega a través de la aplicación de consideraciones pertinentes (sean éstas principios físicos, biológicos, económicos, psicológicos, etc.), se establece una clasificación de las ecuaciones involucradas, clasificación que, en principio, no refiere a los fenómenos bajo estudio, sino sólo a la forma de las ecuaciones.

En tal contexto clasificatorio, la linealidad de una ecuación se entiende como sigue: sea dado el espacio funcional arbitrario $H$; sobre el que es posible definir un conjunto de operadores, $AL$, donde está contenido a su vez un operador arbitrario $O{:}H\rightarrow H$, $(O \in AL)$. Si tal operador satisface la condición-definición siguiente:

$$O(a\varphi + b\psi) = aO\varphi + bO\psi,\ a, b \in \Re,\ \varphi,\ \psi \in H \qquad (1)$$

entonces decimos que es un operador $\Re$-lineal en el espacio funcional $H$. Por supuesto, podemos considerar el conjunto de los números complejos sin alterar en nada la definición, pero ello es innecesario dentro de los límites de esta exposición inicial. Cuando restringimos más el problema, añadimos a la ecuación en cuestión una serie de relaciones funcionales ($n$) que especifican el "problema de contorno":

$$O\psi = 0,\ F_i(\psi) = 0,\ i=1,\dots,\ n \qquad (2)$$

Dentro de este marco podemos definir la no linealidad de un operador a través de la negación de la condición definitoria (1). Evidentemente si $O$ es lineal, las aducidas condiciones de contorno deben ser lineales, si es que se quiere que el problema continúe siendo lineal. Es decir: $F_i(\psi) = \sum_j a_{ij} P_j \psi$ donde cada $P_j$ es un operador lineal sobre el espacio $H$.

Pero aquí tenemos la posibilidad de una combinatoria: el operador es lineal, pero las condiciones son no lineales; o bien el operador es no lineal; con condiciones lineales o bien ambos elementos son no lineales.

Sin embargo, las observaciones anteriores bien pueden considerarse una pretensión de hacer trivial en exceso el concepto de no linealidad reduciéndolo a una explicación sobre propiedades de operadores más bien simples de comprobar. Es, pues, menester aclarar cómo algo en apariencia trivial puede llegar a constituirse en hacedor de carreras académicas, y en última instancia en modelador de una visión de la naturaleza, siendo esto último lo que en efecto más importa.

Por supuesto, el hábil lector ya habrá notado que no es la ecuación lo genuinamente importante al momento de construir tal visión, sino las reglas semánticas que le confieren significado al amontonamiento de símbolos, y dan la motivación para resolverla más allá del afán (legítimo) de resolverla *per se*.

Se expondrán algunos métodos de resolución de las ecuaciones no lineales para ir centrando la cuestión del surgimiento del paradigma alrededor de un punto preciso, que podremos identificar con el momento en el cual un nuevo método de análisis irrumpe en la escena y permite el tratamiento de problemas que habían tenido que ser dejados de lado. En la medida de lo posible, se entrará en detalles relacionados con las premisas involucradas en los métodos, para que posteriormente puedan servir como ilustración de las tesis que se expondrán. La noción de *paradigma* ha sido muy debatida desde su introducción por Kuhn (1986), y entre las debilidades que se le han encontrado está la de ser una noción imprecisa. Para evitar estas objeciones, se aclara en la sección siguiente la noción de paradigma, tratando de debatir la propuesta de Kuhn. Conceptos como los de: racionalidad de los científicos, inconmensurabilidad de los paradigmas, acumulación del conocimiento, realismos interno y externo, no necesariamente saldrán todos a relucir, sino sólo algunos, y predominantemente los conceptos de realismo externo e interno.

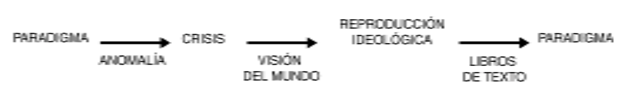
Podríamos formular el objetivo anterior en los términos de una serie de cuestionamientos: ¿es racional, y si lo es en qué sentido el que se dedique tanto espacio a la consideración de las ecuaciones no lineales?, ¿constituye un paradigma la emergencia de las teorías no lineales? Y si lo constituyen, ¿qué compromisos teóricos son adquiridos para sostener esto? cualquier respuesta a estas cuestiones tiene serias repercusiones. Consideremos, únicamente a manera de ilustración, lo siguiente: si la respuesta a la primera cuestión es afirmativa (como seguramente debe serlo), entonces la enseñanza de los métodos lineales sólo puede ser supuesta como un requisito subordinado a los métodos no lineales, que vendrían después. De otra manera nuestra enseñanza devendría en una ideologización (convengamos en fijar la extensión de este concepto en los términos de Althusser (1988: 97-141), por simplicidad) de los asistentes a tales cursos por estarles enseñando una doctrina inútil para su práctica científica futura. Por supuesto, las afirmaciones anteriores presuponen todo un contexto educativo, que he omitido, por lo que sólo pueden ser tomadas como indicativos de una situación posible.

Por lo tanto no se debe limitar la explicación a una trivial definición, como la propiedad definitoria expresada por la ecuación (1), que no clarifica la importancia asignada a una serie muy extendida de investigaciones que deben ser encuadradas dentro de un esquema explicativo, que a su vez arroje luz sobre las prácticas cognitivas de los científicos, con el fin de que nuestra visión de las cuestiones involucradas no presenten considerables zonas de ceguera.

## I. Consideraciones metodológicas

Expondremos someramente el tratamiento de Thomas Kuhn, basado en su tan encomiado y a la vez vilipendiado libro de la década de los sesenta. A continuación marcaremos las diferencias pertinentes del tratamiento que se le dará a esta temática en el presente ensayo.

Kuhn llama "paradigma" a un consenso que se establece entre los miembros de una comunidad científica respecto a un asunto relativo a su interés (Kuhn, 1986: 33). Consenso que permite trabajar alrededor del interés consensado tratando de resolver los problemas dentro de tal marco. Esta es la unidad mínima de su análisis en tal libro, y la definición modificada del mismo que damos más adelante será la unidad de análisis que utilizaremos. Continuando con el camino trazado por Kuhn, una vez establecido el paradigma, la ruptura de este se da a través de "anomalías" no previstas por las teorías vigentes. En términos más precisos, una teoría, tal como se entiende en la física, sólo prevé lo que se incluye en las propiedades que la misma dictamina para el comportamiento de los entes que postula (y esta es en efecto la tesis que defenderemos: a la ciencia), en tanto que sólo le interesan las propiedades de los entes, le es irrelevante una doctrina de designadores rígidos, como la de Kripke (1985). En este sentido, la aparición de propiedades no previstas necesariamente indica que hay algo en el mundo que nuestra teoría no ha considerado, hay algo que no se ha indicado, por lo que se tiene de entre lo indicado un señalamiento erróneo. Y ésta, según Kuhn, es la función primordial, y positiva, de un paradigma: servir de telón de fondo para un descubrimiento novedoso que finalmente rompa con el paradigma (Kuhn, 1986: capítulos VI, VII), pero, siguiendo a Kuhn, sólo se aceptará esta ruptura si ya hay otro paradigma en construcción, que permita comparar a ambos (Kuhn, 1986: 129). La emergencia del paradigma novedoso inicia una transición hacia la "denominada revolución". Según Kuhn, se trata de un desarrollo no acumulativo, en el que no sólo intervienen criterios lógicos o experimentales (esta es la cuestión de la racionalidad de los científicos y el ataque directo a la separación del "contexto de descubrimiento" y el "contexto de justificación" de Hans Reichenbach), y generalmente se tiene una coexistencia de paradigmas. La conclusión de la "revolución" es su "invisibilidad" y alcance limitado (Kuhn, 1986: cap. XI), lo que constituye el planteamiento de la cuestión de la ideología científica y su reproducción, que se da, según explica Kuhn, a través de los libros de texto emanados de la autoridad. Entonces, el esquema analítico de Kuhn (de manera muy simplificada) es el siguiente:




A continuación expondremos la manera en la cual se enfocarán las cuestiones precedentes en este ensayo.

Claramente la unidad de análisis de Kuhn es problemática, porque no sólo deja de lado los medios a través de los cuales los aludidos consensos se conforman, y la manera en la cual delimitan una comunidad de científicos, sino también cuál puede ser la naturaleza del interés que comparten. Cuestionamientos que de manera clara señalan que tal concepto alude a nucleaciones de lo social que se integran, suponemos de un modo más o menos regular, alrededor de un interés intersubjetivo más o menos delimitado durante un periodo de tiempo más o menos prolongado.

Kuhn se vio involucrado en estas dificultades debido a la ambigüedad de los términos utilizados, y para aliviarlas introdujo el concepto de "matriz disciplinaria" (Kuhn, 1986: 279), que analizaba en cuatro componentes: (1) generalización simbólica; (2) representaciones de los datos (llamadas *modelos* o *partes metafísicas del paradigma*; (3) valores compartidos (emotivos y cognoscitivos), y (4)ejemplares de solución.

He modificado ligeramente las denominaciones de los puntos (2) y (4) para evitar confusiones terminológicas posteriores. Las consideraciones que hacemos respecto a este análisis son las siguientes.

Detrás de toda generalización simbólica subsiste un entramado de representaciones de los datos que permiten concebir a tales generalizaciones como la representación estructurada de tales datos que preserva la estructura que estos tienen. Esta explicación no está en Kuhn, la tomo de Ibarra y Normann (1999: capítulo 3) porque me parece la manera más adecuada de explicación de la nucleación alrededor de un interés.

En otras palabras, esta actividad de representación forma parte de la actividad cognitiva cotidiana de los científicos, y se considera que si algo puede contribuir a nuclear a tales personas es precisamente una representación común de los datos que poseen que preserve las características que ellos les atribuyen volviéndolos relevantes. Es decir, diríamos que comparten los mismos "modelos" del dominio del cual los datos son manifestaciones.

Por ello mismo, las generalizaciones simbólicas están abocadas a preservar la estructura de los datos, y en tanto no se dé cuenta de esta, las generalizaciones simbólicas por sí mismas no contribuyen al consenso, porque estas son únicamente la manifestación de una estructuración posible de los datos, que es en la que deben de coincidir los científicos. Coincidencia que permeará todas las cuestiones metateóricas relativas a la adecuación y la coherencia, porque se pensará en estas cuestiones ligadas a esa estructura en particular. Posteriormente volveré sobre este mismo punto en un ejemplo concreto.

Por supuesto que esta actividad involucra un componente metafísico relacionado con una suposición respecto a la estructura del mundo, la que queda apresada en un dominio de representación dentro del cual es posible obtener conclusiones para extrapolar al dominio representante (razonamiento subrogatorio) que la importancia fundamental de la representación: el "excedente" teórico que permite hacer deducciones y construcciones dentro del dominio representante que pueden ser transferidas al representado.

En esta circunstancia, la distinción entre generalización simbólica y modelos representantes queda, por la argumentación precedente, abolida, porque la generalización simbólica es parte integrante del "modelo" de representación y está guiada por éste en cuanto que debe de preservarse una cierta estructura (la del dominio representado), que es en la que estarán de acuerdo los individuos y la que será reproducida toscamente en los libros de texto. En cuanto a la cuestión de los valores, me restringiré a las valorizaciones que denominaré "cognoscitivas" y que son las que tienen que ver con cuestionamientos metateóricos como: ¿es consistente la teoría?, ¿es completa la teoría?, ¿tiene pocos supuestos *ad hoc* ?, ¿es coherente con otras teorías?, ¿se adecua a los datos relevantes para la misma?, ¿es comprehensiva?; y dejaré de lado las valoraciones de otro tipo que pueden responder cuestiones tales como: ¿es bella la teoría?, ¿es buena la teoría?, ¿favorece la teoría las posiciones que a mi grupo le interesa alcanzar? Y las dejaré de lado no porque no tengan que ver con el asunto, sino porque su consideración debe ser hecha en otro espacio. Sin embargo, haré, de todos modos, algunas breves alusiones al respecto (considérese la alusión al sistema escolarizado de enseñanza como una de ellas). Por otra parte, las cuestiones cognitivas fácilmente quedan plasmadas al darse el medio en el cual pueden surgir: la relación de representación.

Finalmente, la cuestión de los ejemplares es tomada en las explicaciones de Kuhn como una manera de ideologización (porque no es otra la situación al ignorarse la historia de las discusiones y malentendidos (Kuhn, 1986: 133, 255-259) para la aceptación acrítica de unos pocos éxitos que dan su supuesta solidez a la teoría y que en todo caso sólo parecen contribuir a la reproducción de algunos grupos aislados de practicantes de la ciencia en su doble vertiente: reproducción de la fuerza de trabajo (formación de recursos humanos para el trabajo científico) y reproducción de las condiciones que permiten sostener las relaciones de dominación. Me desentenderé de esta problemática en lo que sigue, porque considero que su adecuada teorización se hace en términos del curriculum y su interacción con diferentes instituciones cuyos intereses le atraviesan,[1] y consideraré que los ejemplares cumplen una función cognoscitiva: servir de datos para posibles construcciones ulteriores.[2] La justificación de esto es parecida a la anterior: no es el fin de esta discusión rastrear los efectos de poder, sino explicar una serie de ob-

1. Aun cuando no es el tema de este ensayo, las referencias bibliográficas contienen material interesante para comenzar una discusión importante al respecto.

2. Me resulta irresistible poner un ejemplo que, quizá por la tónica general de la discusión, no resulte pertinente en lo que sigue, pero que sin embargo ilustra de manera plena la función que se asigna a los ejemplares: en un artículo de 1926 sobre mecánica ondulatoria, E. Schrödinger extrapola una ecuación de onda para la mecánica a partir de un claro ejemplar: la óptica ondulatoria. Esto ilustra dos cosas: el razonamiento subrogatorio al extrapolar los "datos" proporcionados por la teoría de De Broglie: $p = \frac{h}{2\pi}k$ y $E = \frac{h}{2\pi}\nu$ a una ecuación ondulatoria a partir de un ejemplar característico: la óptica ondulatoria (Schrödinger, 1926).

servaciones que fundamenten la transición lineal-no lineal desde una perspectiva epistemológica. Naturalmente, cuestiones políticas aparecerán ahí donde sean necesarias, pero naturalmente no serán muchas.

Por lo tanto, de las delimitaciones anteriores es posible esbozar la noción del paradigma que estará en juego en lo que sigue: consiste en el consenso alrededor de la relevancia de cierto conjunto de datos que permiten inducir (no de manera única) un espacio de representación, en el cual también se coincidirá, y donde las cuestiones metateóricas resultarán pertinentes. Por tanto, un cambio teórico será considerado como un cambio o bien en el conjunto de datos relevantes (dominio representado), o bien en el espacio inducido (dominio representante) o bien en ambos.

Pasemos ahora a precisar, dentro del formato de Ibarra y Mormann (1999: capítulo 3), de manera más detallada los conceptos utilizados.

Según estos autores (concepción que retomamos plenamente), la principal actividad científica consiste en la construcción de representaciones de un dominio dado de datos D que posee cierta estructura, en un ámbito representante R que está dotado de cierta estructura. Representación que respeta la estructura relacional al menos parcialmente. Entonces una teoría científica sería un mapa de la forma: $f$: $D \rightarrow R$ que preserve, de alguna manera que más adelante precisaremos con sumo detalle, la estructura de los dominios representante y representado.

Sin embargo, como señalan Ibarra y Mormann, la actividad representatoria del sujeto requiere de un mapa adicional, tal que: $s$: $R \rightarrow D$. Con lo que se establece, por parte del sujeto, una relación entre el representante y el representado de modo tal que traslada las consecuencias obtenidas en el representante al representado. Este proceder es denominado "razonamiento subrogatorio", y, sostenemos, es la mejor representación de la actividad científica. De donde resulta muy importante el poder establecer representaciones en ámbitos que posean una serie de construcciones muy desarrolladas que permita el avance, desde $R$, en el análisis de $D$.

Por tanto, de acuerdo a lo ya dicho, un paradigma $p$ consiste de un consenso en una base de datos relevantes $D_p$, de un mapa adecuado $f_p$ a un dominio representante $R_p$, que preserve parcialmente la estructura de $D_p$ y un mapa $s_p$ del dominio representante al representado. Por lo que podemos representarlo, a la manera de Suppes, como un cuadruplo:

$$p=\langle D_p, R_p, f_p, s_p \rangle$$

Por tanto, dados los paradigmas $pi$, $i=1,...,n$ entenderemos como traducibilidad de los mismos un par de mapas de la forma: $p_{ij}$: $D_i \rightarrow D_j$, $q_{ij}$: $R_i \rightarrow R_j$ que sean sobre-eyectivos y preservadores de estructura. En caso de no sobre-eyectividad de los mapas, y no respeto de alguna subestructura, hablaremos de un *mapa parcial interparadigmático*.[3] La estructura de los dominios la consideraremos como una colección de relaciones que subsisten, suponemos, entre los objetos de los dominios. Los cuales estarán individualizados como particulares única y exclusivamente a través de las relaciones que supondremos satisfacen. Evidentemente esta estrategia está pensada para rodear en torno a la teoría de Kripke (1985) de los nombres como designadores rígidos, ya que si la actividad científica sólo individualiza a los particulares que postula a través de las relaciones que satisfacen, y estas relaciones son sólo condiciones contingentes de descripción de los particulares, es claro que la ontología de la ciencia será cambiante y no rígida. Como lo sería de estar interesados los científicos en nombrar a las entidades que delimitan, y sostenemos que no lo están. Es de importancia notar que Quine es el principal representante de la doctrina (de inspiración russelliana) de la equivalencia de nombres y descripciones, que es contra la que se alza Kripke y, en cierto sentido antes que él, Kuhn. Pero, de cara a lo que aquí se discute, la técnica que expone de eliminación de los nombres resulta muy interesante (por problemática), a pesar de los cuestionamientos modales de Kripke, los que se consideran plausibles y válidos.

Por tanto, la idea de Kuhn de un cambio de mundo (entendido ahora como cambio de las condiciones de descripción de los particulares); es plausible y en efecto un hecho contundente por la manera en la cual se da la referencia a las entidades del discurso científico.

Ahora bien, con base en los elementos anteriores, podemos representarnos el cambio teórico de un modo esquemático y simple. El conjunto de posibilidades de conflicto se puede delimitar a partir del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & D_i & \xrightarrow{p_{ij}} & D_j & \\ f_i, s_i & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & f_j, s_j \\ & R_i & \xrightarrow[q_{ij}]{} & R_j & \end{array} \qquad \text{(k)}$$

Si se ha consensado alrededor de una estructura de datos $D(p_{ij}=1)$, aun así se puede no consensar en el dominio representante, por lo que se tendrán cuatro mapas entre

3. Volviendo a hacer referencia a ese mítico lector habilidoso, es claro que el aparato formal que está en juego en esta reconstrucción de la noción de paradigma es el de la teoría de las categorías.

los dominios en juego y la cuestión de la conmensurabilidad se limita a encontrar las condiciones de existencia y las propiedades del mapa $q_{ij}$. Por otro lado, si se tienen dos estructuras de datos $D_i$ y $D_j$ y sólo un dominio representante $R$ ($q_{ij}$=1), la cuestión de la traducibilidad se centra alrededor de $p_{ij}$. El último caso es, por supuesto, cuando ninguno de los mapas interparadigmáticos es la identidad. El primer caso implica que respecto a la misma estructura consensada de datos se pueden obtener diferentes conclusiones a través del razonamiento subrogatorio. El segundo, que respecto de dominios diferentes de datos podremos obtener las mismas conclusiones. Finalmente, el tercero es el que más se parece ajustar a lo que Kuhn tenía en mente.

Esta presentación ha sido necesariamente esquemática, porque de la noción de estructura preservada, que es una noción sintáctica, no se puede establecer el cambio de significado de la teoría en cuestión porque el significado tiene que ver con la comprensión de las expresiones por parte de un hablante (Platts, 1992: 71), ya que sólo se cuenta con una serie de estructuras abstractas sobre las que se deberán integrar los presupuestos semánticos y pragmáticos. Un simple isomorfismo estructural sólo es el preludio de una formulación del significado, para la constitución del cual ya contamos con una prescripción semántica: sólo se hace referencia a los particulares a través de sus relaciones, lo que viene a ser lo mismo que decir que en el discurso científico se eliminan los nombres de las entidades, y en efecto las mismas entidades, cuando se está frente a una anomalía. Por tanto, lo que se tiene como teoría científica es una estructura que refiere a sus posibles entidades, y que con el cambio teórico cambia esas entidades. Y en el cambio teórico no se preservan las entidades, porque en efecto no se preservan las relaciones. Los mapas interparadigmáticos sólo podrán correlacionar propiedades comunes sintácticamente, si es que han de preservar la estructura (relación *n*-aria con relación *n*-aria) de sus respectivos ámbitos, sin tomar en cuenta el respectivo cambio de significado que pueda tener la relación, ya que este cambio de significado sólo es notado por el sujeto que intencionalmente propone el cambio para obtener una variación de la ontología especificada por la estructura. Por tanto, el sujeto, vía sus intereses cognitivos, tendrá un rol dentro de la delimitación del significado. Sobre este asunto, véase la discusión de Strawson (1983: capítulos 6, 9) e Ibarra y Normann (1999: capítulos 4, 5). Por tanto la cuestión de la determinación de la significatividad empírica de las estructuras por parte de los sujetos viene a ser el eje motriz del cambio teórico. Es decir, el significado de los mapas fija las condiciones que se impongan como necesarias y suficientes para la adecuación del dominio representante en el representado y, si hemos de seguir a Kuhn en su espíritu, son precisamente estas condiciones las que están siempre en disputa durante el cambio teórico. Y son las que se pueden considerar metafísicas, ya que suponen, sin más ni más, que determinados dominios (de datos físicos o matemáticos) pueden ser representados en un sistema relacional dado porque poseen la misma estructura. Esta creencia es la que los vuelve robustos ante el embate de los contraejemplos.

Finalmente, unas palabras respecto al realismo interno. Esta doctrina sostiene, a grandes rasgos, que los objetos de nuestra experiencia están determinados de alguna manera por nuestro sistema conceptual. Y este es el caso de la tesis sobre el referir que se ha sostenido anteriormente: sólo referimos a objetos (entendidos como los sujetos gramaticales de una proposición) a través de estructuras relacionales que los contengan. Por tanto, sólo a través de ese sistema de conceptos predeterminados es como llegamos a tener conocimiento de esas entidades. De donde éstas están infradeterminadas por la experiencia.

El realismo externo es más díficil de plantear; una referencia excelente es Moulines (1989), pero tomaremos la siguiente (*op. cit.*: 124): "La referencia de la mayoría de los términos científicos permanece fija a pesar de los cambios en las teorías en las que ellos aparecen". Desde la perspectiva aquí tomada, semejante propuesta es insostenible para la práctica científica.

## II. La emergencia de la no linealidad como paradigma

Una vez que se han indicado los aspectos preliminares de método, donde se han establecido los elementos del análisis acerca de los conceptos de paradigma y cambio teórico, vayamos a la parte sustancial.

El surgimiento histórico de la no linealidad como paradigma, según la tesis aquí sostenida, queda establecido cuando se inventa un método para resolver las ecuaciones no lineales. Y se argumenta que es el método el eje de cambio porque, como veremos en la sección siguiente, aun a pesar de haberse establecido que existen entidades no predichas por la teoría (las anomalías), la explicación y la aceptación (respuestas a las crisis) de ellas sólo es posible cuando se han deducido sus estructuras relacionales lo que permite sustituir (o al menos coexistir con) las estructuras relacionales que no refieren a aquello que los datos empíricos reportan.

Como ya hemos señalado, en el caso de la situación que nos ocupa, la teoría lineal se erige en contra de la teoría no lineal como visión del mundo imperante en la práctica científica, no necesariamente por gusto de sus cultores (crisis), sino porque se impone la condición objetiva del desconcierto ante la impotencia de encontrar una solución.

Usualmente no se supone que el desarrollo de un método sea elemento clave en el origen del cambio teórico, y se enmarca tal desarrollo dentro de los lindes de las actividades desarrolladas en la ciencia normal (Moulines, 1989: 61). Como debe de poner de manifiesto la sección I, el origen de esta confusión es explicable en los siguientes términos: la noción de teoría que usualmente se maneja en la física teórica (y pensemos, para el caso, en cualquier teoría de campos cuánticos) depende de un lagrangiano definido en un haz tangente, o en un hamiltoniano definido en un haz cotangente. Funciones (o relaciones) a partir de las cuales se pueden construir las simetrías (y por tanto las leyes de conservación vía teoremas tipo Noether) del sistema relacional, las ecuaciones del movimiento, o variadas formas de las funciones de partición y correlación. Todas estas maneras de construir las cantidades relevantes del sistema son relaciones, en específico: funciones, las más importantes de las cuales son las ecuaciones de Euler-Lagrange, a partir de las cuales se deducen los elementos que la teoría usa para construir la referencia: las soluciones de las ecuaciones. Por tanto, para notar la importancia del cambio teórico, basta decir que si las soluciones son el medio a través del cual la teoría refiere para poder decir que una teoría lineal es contenida por una teoría no lineal se debe demostrar que, en efecto, el espacio de soluciones de la ecuación diferencial lineal está contenido en el espacio de soluciones de la ecuación diferencial no lineal. Y por lo general este no es el caso, ya que la manera en la cual se quiere obtener la relación entre lo lineal y lo no lineal es restringiéndose al espacio tangente del espacio de soluciones, el cual no está contenido en el espacio de soluciones de la ecuación no lineal. Por lo tanto, contando con las tesis semánticas aducidas en la sección I, y con lo dicho anteriormente, podemos concluir que, en general, las teorías lineales y no lineales no son conmensurables, en el sentido de que entre sus respectivos espacios de representación no existe un mapa biyectivo que los conecte. Y en caso de que lo hubiera, sería parcial.

Nótese que estas consideraciones se basan en el hecho de que no existe un mapa biyectivo a través del cual se puedan linealizar todas las ecuaciones diferenciales no lineales. Recordemos, a manera de ejemplo no trivial, que los sistemas integrables son ejemplos de sistemas esencialmente lineales, entre los que no existe la posibilidad de ampliar la referencialidad de sus respectivos paradigmas debido a la proposición conocida como teorema de Liouville-Arnold.[4] Por tanto, los sistemas no integrables muestran, *de facto*, la existencia de sistemas que no son lineales, y que en efecto aumentan las posibilidades ontológicas, y por tanto las cognitivas. Podemos llevar más lejos el análisis: incluso entre teorías no lineales se tendría una diversidad de paradigmas posiblemente inconmensurables entre sí. Un ejemplo repetido *ad infinitum* bastará: entre otras consideraciones, la teoría de la gravedad de Einstein es más comprehensiva que la de Newton, pero no incluye a esta última a menos que satisfaga el requisito (necesario), de contener en el espacio de soluciones de las ecuaciones de Einstein el espacio de soluciones de las ecuaciones de Newton, sin consideraciones triviales de aproximación, porque precisamente las restricciones a espacios tangentes muestran que esta condición no se cumple.

Y este rompimiento manifiesto muestra el realismo interno al que está abocada la práctica científica, porque será sólo a través de nuestro sistema relacional que podremos referir a las entidades en disputa; fuera de eso: nada.

Consideremos ahora la situación que enfrenta el sujeto. Recordemos que si el operador que se establece para el caso es lineal existe toda una variedad de técnicas para resolverlo.

Técnicas en las que es adoctrinado todo aquel que se dedique a modelar algún fenómeno. Sin embargo, cuando se formula un problema y el operador no es lineal, las técnicas de solución podrían no existir, lo que representa un obstáculo para el interés cognitivo del sujeto. Se bifurca, entonces, el camino de la actividad cognitiva:

a) Se puede proceder a tratar de determinar la consistencia interna de las ecuaciones al probar teoremas de existencia de soluciones; que es lo mismo que probar la posibilidad de una variedad de situaciones posibles. Para, a partir de ahí, probar tanto la unicidad de la solución, o sea, la determinación de la situación a partir de las condiciones impuestas al problema, como la estabilidad de la misma (problema bien planteado en el sentido de Hadamard).

b) O bien se pueden desarrollar las técnicas de series asintóticas, o convergentes, o sumables, o un largo baúl de propiedades posibles de las series, para obtener una solución al problema que permita conclusiones relevantes a un problema que no es el de inicio, sino uno más simple.

El caso a) se presenta usualmente cuando el conjunto de ecuaciones es tan complicado que resulta dudoso que exista una solución que lo satisfaga, y puede llegar a ser difícil probar un teorema de los aludidos. El caso b) corresponde a la necesidad apremiante de obtener soluciones a través del medio que sea. Ambos casos ilustran reflexiones alrededor de la no linealidad: el caso a) no pregunta por la solución más que de manera oblicua, a contraluz, porque el interés está centrado en la posibilidad de la consistencia

4. Me abstendré de dar citas respecto a esto, ya que considero que es conocimiento usual en las teorías no lineales.

de las ecuaciones. Para el caso b), esta problemática resulta insulsa y se recurre de inmediato a tratar de desarrollar una solución. Generalmente, estos procederes no entran en conflicto, y es un hecho que muchos teoremas de existencia se prueban mediante ciertos tipos de series.

Primeramente se han utilizado series convergentes (los teoremas usuales de Cauchy-Lipschitz y Kovalevski para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales son de este tipo), lo que restringe el espacio de soluciones a soluciones analíticas en un disco abierto. Dejando fuera las soluciones tipo choque, por ejemplo, lo que limita la ontología y muestra la visión del mundo que se puede tener. Dado la solución analítica, ahora se intentará establecer la generalidad de la solución, intentando probar teoremas de densidad de las funciones analíticas en espacios de funciones, porque de esta manera resulta que sólo es necesario realizar la prueba de existencia para las aludidas funciones.

Sin embargo, no todos los métodos recurren a series, el criterio de integrabilidad de Liouville no recurre a series, aun cuando no especifique medio alguno de construcción de las integrales. De hecho, el teorema de Liouville-Arnold sólo afirma que de existir las *n* integrales primeras en involución, obtenidas por el método que sea, entonces existe un mapa simpléctico de las variables en las cuales está escrita la relación funcional, a nuevas variables en las cuales la relación es trivialmente soluble.

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto la centralidad de la cuestión relativa a la solución de los sistemas de ecuaciones, aun cuando no parezca obvio que es el método de solución el que, finalmente, establece el paradigma.

Existe, sin embargo, un método para resolver ecuaciones diferenciales no lineales que presume de ser exacto. El denominado método de la *transformada espectral inversa,* desarrollado por Gardner, Kruskal, Greene y Miura. Método que, por las discusiones anteriores, viene a inaugurar un paradigma. Este será nuestro principal espécimen de trabajo.

Como es sabido, lo que sigue a continuación del establecimiento de un paradigma es una densa actividad tendiente a trazar los límites y posibilidades del mismo, lo que en este caso se condensa en los puntos siguientes:

c) Construir, primeramente, todas las ecuaciones que el método puede resolver.

d) En segundo lugar, emplear las soluciones construidas para explicar los fenómenos que, hasta el momento, se resistían a un embate cuantitativo-cualitativo.

Distinguiremos dos momentos en el desarrollo del paradigma de la no linealidad:

e) El primero concierne a las ecuaciones no lineales que resultan relevantes en los puntos singulares del sistema físico bajo estudio.

f) En tanto que el segundo concierne al pleno régimen no lineal alejado de consideraciones pertinentes a las vecindades de los puntos críticos del sistema.

Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, ambas perspectivas son irrisorias: las ecuaciones in-volucradas continúan siendo no lineales y por tanto posibles objetos de un método de solución. Sin embargo, las enfocaremos desde dos perspectivas diferentes. Primero, desde el punto de vista físico emergen de situaciones muy diversas: en un caso, el posible origen físico estriba en consideraciones de sistemas termodinámicos alejados del equilibrio, que es donde este tipo de argumentos son más fructíferos. En tanto que en el otro se refiere a sistemas físicos de cualquier tipo definidos directamente (vía leyes de Newton o principios variacionales) a partir de la representación de interacciones no lineales entre los elementos del sistema sin considerar el aderezo de los equilibrios locales y nolocales. El segundo punto de vista aludido concierne a la cuestión de la traducibilidad entre los resultados obtenidos por las diversas metodologías empleadas. Esto es importante porque precisamente esta cuestión está al centro de la inconmensurabilidad.[5]

## III. Datos

El paradigma que se ubica alrededor de un método de solución no está completo sin especificar la representación del mundo y del proceder en la física teórica que se aglomera alrededor de semejante método. Un simple revisión alrededor de la literatura pertinente mostrará (si se quiere, se puede llevar la cuestión a una hipótesis estadística abierta a las usuales argumentaciones de verosimilitud de tales hipótesis) que la mayor concentración del trabajo es alrededor de la descripción de la forma y evolución de patrones espacio-temporales, a través de soluciones de las ecuaciones diferenciales no lineales. Situación que sustenta nuestra tesis sobre el referir. Y esta descripción no puede quedar acotada por los lindes de un magro; aunque no por ello despreciable, dominio trazado por las ecuaciones diferenciales lineales.

5. Por dar un ejemplo diverso al de la no linealidad y de características más limitadas: Alfred Tarski, mediante la introducción del método de matrices, construyó morfismos entre el cálculo proposicional bivaluado, el cálculo proposicional intuicionista y los espacios topológicos para mostrar cómo es que todos son modelos de una misma estructura relacional abstracta interpretada de diversas maneras a través del morfismo. Y en este caso, los dátos son los cálculos lógicos bivaluados e intuicionistas que pueden representarse en los espacios topológicos para obtener resultados de unos respecto a otros (Tarski, 1956).

La experiencia muestra a nuestros sentidos una variedad interminable de formas, mutaciones y recombinaciones que exigen una explicación que las ecuaciones lineales no llegan a poder establecer. Porque la física consiste, primero que todo, en el análisis del surgimiento, evolución y extinción de las formas en el espacio y en el tiempo en términos de los espacios inducidos en los dominios representantes facilitados por la matemática, en los términos de una referencia a través de propiedades.

Sea desde un punto de vista puramente fenomenológico, o bien recurriendo a aventuradas hipótesis sobre mecanismos atomísticos inobservables que, en su acción colectiva, llevan a la configuración macroscópica (ejemplo: la mecánica estadística del equilibrio o las teorías estocásticas de la mecánica cuántica). Y este tipo de caracterización nos lleva a un punto que ya hemos precisado, quizá en demasía: la ontología de una teoría lineal no es la misma que la de una teoría no lineal, lo que muestra, de nuevo, que en efecto ambos paradigmas son inconmensurables.

Lo interesante, por poner un ejemplo, no es nunca un supuesto punto en movimiento en el espacio-tiempo, sino la curva que describe durante el movimiento. Que es la forma final del proceso de interacción del punto en perpetuo movimiento rectilineo con las fuerzas que configuran la forma del movimiento final. Entonces, conviene describir el dominio representante sobre el que se estructuran, según sostenemos, la serie de datos considerados en los los párrafos anteriores. Esto es el caso (e) de la sección precedente. Recurriremos para su planteamiento a la representación hecha por René Thom (1987). Para este autor, la cuestión se plantea de la siguiente manera: sea dada una variedad diferenciable $O$, subconjunto de un espacio topológico de propiedades especificadas, cuyos puntos describen el estado inicial del sistema, sea dado; también, el conjunto $K \subset O$ cerrado y, finalmente, el campo de vectores $X \in TO$ que describirá la dinámica del sistema.

Entonces, el triplo:

$$R = < O, K, X >$$

es un "modelo continuo" del sistema en consideración. Y sobre la base de este modelo matemático es como se extraen conclusiones alrededor del dominio de la naturaleza del que quiere ser representante.

El primer elemento caracteriza la cinemática, el segundo la transfiguración de los elementos del sistema al ser definido como el conjunto de puntos singulares del campo vectorial:

$$K \ \{x \in O \mid X(x) = 0\}$$

y el tercero caracteriza la dinámica. Si $x \in O\text{-}K$ la dinámica es determinada por la ecuación diferencial y la solución dada a la ecuación no sufre transformaciones. En tanto que si $x \in K$ se produce un cambio cualitativo en la naturaleza de las soluciones, lo que implica, al nivel de la interpretación física, un cambio en la forma del sistema, que por lo general indica la existencia de multiplicidad de soluciones (reproducción de la ontología).

Las formas que se nos aparecen en la experiencia científica deben de satisfacer un requisito específico que las distingue de las variadas experiencias posibles y que le otorga a estas experiencias el calificativo de "científicas", sin discutir aquí la cuestión de los efectos de poder de tales calificativos, sino limitándonos sólo a su vertiente cognitiva.

Este requisito es que deben de ser repetibles para que se garantice, operativamente, la ínter subjetividad. Que es la "objetividad" de la práctica científica. Pero es el caso que resulta difícil, sino es que imposible, establecer dos estados iniciales exactamente iguales. Por tanto, ese requisito de cientificidad nos lleva a la cuestión de la "estabilidad estructural" del sistema. La cual definimos a continuación.

La situación la plantearemos así: dados dos conjuntos $U_1$, $U_2$ y un mapa definido de la siguiente manera:

$$E{:}U_1 \rightarrow P(U_2)$$

donde $P\ (U)$ denota el conjunto potencia de $U$. Podemos establecer la estabilidad estructural como sigue:
Definición. Dado el modelo:

$$R_1 = < E(x)\ K_1,\ X_1 >$$

decimos que éste es estructuralmente estable si, y sólo si, cualquier modelo construido en un entorno $W(x)$ de $x$ es homeomorfo a $R_1$. Esto significa, operativamente, lo siguiente: construimos el modelo: $R_2 = < E(y),\ K_2,\ X_2 >$, con $y \in W(x)$ entonces existe un mapa $F$ tal que:

$$F : E(y) \rightarrow E(x)$$
$$F_* : TE(y) \rightarrow TE(x)$$

Donde $F_*$ es la elevación tangente de $F$. Generalmente la diferencia primordial entre los modelos viene dada por la aplicación de un grupo particular que caracteriza el sistema de referencia utilizado (Galilei o Poincaré), por lo que el homeomorfismo incluye esta acción. Dentro de la terminología de la sección precedente se diría que la estabilidad estructural garantiza que la ontología dada por las soluciones de la ecuación en consideración no varía con las pequeñas perturbaciones que a las mismas se les hagan.

Una forma vaga de decir lo anterior es indicar que dado $y \in W(x)$, los conjuntos $E(x)$ y $E(y)$ son similares. El complemento de $W(x)$ forma el conjunto de puntos de bifurcación del sistema, es decir, el conjunto de puntos sin estabilidad estructural. Por lo general, los puntos inestables no son físicamente observables, debido al corto tiempo que, conjeturamos, existen.

Un ejemplo conspicuo de lo anterior se presenta cuando la variedad $O$ es de la forma $O = M \times N$, por lo que el campo vectorial depende tanto de las variables que describen $M$ como de las variables que describen $N$. Y este ejemplo es ubicuo en la física, porque todas las ecuaciones que describen procesos físicos deben poseer soluciones invariantes ante homotecias (cambio de unidades), requisito que al ser exigido provoca la aparición de los números adimensionales (en hidrodinámica: Froude, Mach, Reynolds, Euler, Nusselt, etcétera) que describen $N$, y al hacerlo también describen el conjunto de bifurcación. Es decir, la estabilidad del sistema viene a ser caracterizada por $N$, y se puede perder al ajustarse los parámetros de la misma. Sin embargo, el concepto de "criticalidad auto-autorganizada" de Bak-Tang-Wiesenfield, introduce la idea de que la misma dinámica del sistema puede llevar a ganar o perder estabilidad en puntos lejos de la región de los puntos de equilibrio del sistema, es decir, sin necesidad de un ajuste de pará-metros (Per *et al.*, 1987).

El marco anterior es, en líneas muy generales, una representación de todo el vasto campo del análisis no lineal, que fundamentalmente, desde el punto de vista de la matemática utilizada, es simplemente el análisis de los puntos críticos y las posibles soluciones de sendas ecuaciones diferenciales no lineales.

A partir de aquí, la metodología se vuelve una feria de aproximaciones basada, sobre todo, en las propiedades espectrales del sistema linealizado alrededor de alguna solución preestablecida (generalmente la solución de equilibrio) y en la búsqueda de respuestas a las cuestiones: ¿cómo se relaciona el sistema linealizado con el sistema no lineal?, ¿cómo se establece el conjunto de puntos de bifurcación del sistema?

Por tanto, se parte de querer encontrar una relación entre lo local con lo global, querer establecer la relación entre la dinámica en un entorno y la dinámica a largo plazo, en el régimen no lineal, y en caracterizar la posibilidad de las variaciones en la naturaleza de las soluciones. O, por decirlo en términos de formas: transformar la forma adquirida en lo local, a la forma adquirida en lo global.

A continuación describiremos la metodología que se sigue para el tratamiento del conjunto de singularidades; tomaremos dos que son sistemáticas y claramente fundadas: la teoría de la variedad central (Ioos y Adelmeyer, 1992) y el método de reducción de Lyapunov-Schmidt (Golubitsky y Schaeffer, 1985). Ambos caminos convergen en lo mismo: caracterizar la multiplicidad de soluciones alrededor de una solución preestablecida, con lo que se responde la pregunta de cómo caracterizar el conjunto de bifurcación. La cuestión de la traducción aparece al tratar de relacionar ambos resultados. Partimos de:

$$\frac{dr}{dt} = F(r,\theta), \quad r \in \Re^N, \theta \in \Re^M, \quad F \in C^\infty(\Re^N \times \Re^M, \ \Re^N)$$

que es un conspicuo representante de los modelos continuos.

Entonces, el método de análisis "local" comienza linealizando el campo vectorial $F$ en el entorno de alguna solución, usualmente la solución nula, y clasificando las trayectorias del sistema en términos del espectro de $DF$, la derivada de Frechet de $F$.

La clasificación se centra en tres autoespacios de la descomposición espectral de $\Re^N$ debida al operador $DF$. Estos autoespacios tienen por base los autovectores correspondientes a tres tipos de autovalores: $Re\lambda = 0$, $Re\lambda > 0$, $Re\lambda < 0$, de donde la descomposición espectral de interés es:

$$\Re^N = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$$

Si el conjunto $E_0$ de autovalores de la forma $Re\lambda = 0$ es vacío, Hartman (1961) demostró, desde los años cincuenta y siguiendo una línea que se remonta a Poincaré, que las soluciones del sistema linealizado y del sistema no lineal están relacionadas a través de un homeomorfismo, con lo que contesta a la cuestión de cómo se relaciona lo local con lo global, y que para tal tipo de sistemas existe una traducibilidad de paradigmas.

Cuando $E_0 \neq \phi$, la respuesta no se conoce, con lo que la cuestión de la traducibilidad de los paradigmas está abierta, pero se cambia de cuestión: ¿existirá una variedad para el sistema no lineal con las mismas características que $E_0$ (contener las soluciones acotadas y periódicas) respecto al sistema lineal? y he aquí la utilización de la subrogación sobre un ejemplar ya conocido: la cuestión apunta a encontrar alguna variedad que imite las propiedades, en el caso no lineal, que tiene una variedad en el caso lineal. Y en efecto, es posible construir una variedad de tales propiedades para el sistema no lineal, la denominada variedad central, construida mediante un mapa $\psi \in C^k(E_0, E_+ \oplus E_-), \psi(0)=D\psi(0)=0$ en el entorno de cero.

La variedad central $M$ se define a través de:

$$M=\{x+\psi(x)|x \in E_0\}$$

Claramente $x$ viene dado en la base de vectores que generan $E_0$, por lo que es de la forma: $x=\Sigma_{i=1}^{\dim E_0} x_i E_i^0$, en tanto que $\psi$ sólo está definido en la base de vectores que generan $E_+ \oplus E_-$, es de forma:

$$\psi(x)=\Sigma_{i=1}^{\dim E_+}\psi_i(x)E_i^+ + \Sigma_{i=1}^{\dim E_-}\phi_i(x)E_i^-$$

de donde la definición explícita de $M$ está dada, en coordenadas, por:

$$< x_1,...,x_{\dim E_0}, \psi_1,...,\psi_{\dim E_+}, \phi_1,...,\phi_{\dim E_-} >\}$$

Las propiedades de las que goza $M$ son:

a) invariancia ante el flujo generado por el sistema no lineal.

b) si $E_+$ y $E_-$ son no vacíos, entonces todas las soluciones del sistema no lineal están contenidas en $M$.

c) si $E_+=\phi$, entonces $M$ es atractivo.

Definiendo proyectores: $\pi_+ : \Re^N \rightarrow E_+$, $\pi_0 : \Re^N \rightarrow E_0$, $\pi_- : \Re^N \rightarrow E_-$ podemos encontrar las ecuaciones satisfechas por $x$ y $\Psi$. Para eso escribimos:

$$r = (\pi_+ + \pi_0 + \pi_-)r = x+\psi(x)$$

de donde:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{d\psi}{dt}=\pi_0 F(x+\psi(x))+\pi_h F(x+\psi(x)), \pi_h=\pi_+ + \pi_-$$

por lo que podemos separar para obtener las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{dx}{dt}=\pi_0 F(x+\psi(x)),$$
$$D\psi\,\pi_0 F(x+\psi(x))=\pi_h F(x+\psi(x)).$$

Por supuesto que la primera determina la dinámica reducida en la variedad central, en tanto que la segunda determina el mapa hacia esta variedad. El interés se centra ahora en la ecuación reducida, la cual se pretenderá reducir aún más. Hasta aquí no se ha hecho ninguna aproximación; éstas intervienen al momento de tratar de resolver la ecuación para $x$. Para resolver esta ecuación se procederá de la siguiente manera: se tratará de encontrar una transformación: $x=y+\Phi(y)$ tal que la ecuación diferencial tome la forma:

$$\frac{dy}{dt}=L_0 y+P(y)+0(|y|^k)$$

que se denomina "forma normal" (hay mejores maneras de caracterizar una forma normal, pero por lo pronto eso no interesa). Los mapas satisfacen $\Phi(0)=D\Phi(0)=P(0)=DP(0)=0$.

El siguiente paso consiste en hacer una expansión de Taylor de cada una de las funciones involucradas: $\pi_0 F$, $\Phi$ y $P$ De la manera siguiente: denotemos $\pi_0 F$ mediante $f(x)$, entonces la ecuación sobre la variedad central afectada por la transformación es:

$$(1+D)(L_0 y+P(y)+0(|y|^k))=f(y+\Phi(y))$$

sobre esta ecuación se realiza la expansión de cada función. Se identifican términos y se llega a una ecuación para $\Phi$ y $P$. La ecuación resultante se denomina "ecuación homológica".

Resolverla implica introducir un espacio vectorial de polinomios con producto interior, lo cual se hace (con el producto interior dado por: $(P, Q)= P(\partial_y)\, Q(y)|_{y=0}$) y se procede a la resolución a través de la teoría usual en espacios con producto escalar introduciendo operadores adjuntos. Se demuestra fácilmente (pero engorrosamente) que el polinomio $P$ se encuentra en el núcleo del operador homológico adjunto. Lo que en términos operativos se traduce en la siguiente ecuación diferencial:

$$DP(y)L_0^* y=L_0^* P(y)$$

Aquí $L_0^*$ es el operador adjunto, relativo al producto interior del espacio vectorial de polinomios, de la derivada de Frechet de $f(x)$. En términos finitos la ecuación anterior deviene:

$$\exp tL_0^*(y)=P(\exp tL_0^* y)$$

que es la propiedad de invariancia del polinomio $P$ ante la acción del grupo generado por el adjunto del operador $L$. Como se ve, todo termina en ser una aproximación para determinar un polinomio. Lo importante de todo este recorrido es que al determinar el polinomio se determinan, de hecho, los puntos singulares que vienen a completar la construcción del modelo continuo en el sentido de Thom.

Conviene hacer aquí algunas precisiones: la metodología anterior produce aproximaciones de manera rigurosa, describiendo perfectamente cada paso del proceso. Y esto es importante, porque fuera de ese rigor lógico, todo lo demás ha de ser casualidad.

Otro punto que es menester resaltar es que la metodología anterior se puede aplicar con éxito a ecuaciones diferenciales parciales, mostrando, de nuevo, la manera en la cual se puede establecer el razonamiento subrogatorio: en este caso, los datos son los resultados obtenidos en el dominio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (dominio representado), por lo tanto se extrapola que para el caso de las ecuaciones diferenciales parciales (dominio representante), este tipo de procedimiento puede ser llevado a cabo.

Como se ha visto, la parte lineal del operador viene a determinar, bajo condiciones prefijadas, la dinámica no lineal del proceso a través de las ecuaciones reducidas a la variedad central; por tanto, la dinámica de muchos sistemas queda prefijada por la parte lineal de sus ecuaciones diferenciales. Así, por ejemplo, quedan justificadas las afirmaciones de Cross *et al.* (1993) respecto a que las ecuaciones siguientes:

$$\partial_t U = eU - (\nabla^2+1)^2 U - U^3$$
$$\partial_t U = eU - (\nabla^2+1)^2 U + 3(\nabla U)^2 \nabla^2 U$$

(de Swift-Hohenberg y de Pismen) tienen las mismas propiedades no lineales, ya que, como se puede ver, tienen la misma parte lineal alrededor de la solución $U = 0$.

Al aplicarles el método de los modos normales en la forma: $U = U_0 \exp\, i(kx)+wt$ se llega a la conclusión de que las autofunciones del operador linealizado son: $\exp \pm\, i(kx)$ correspondientes a los autovalores dobles $w(k) = e\text{-}(1\text{-}|k|^2)^2$ (que muestran que el proceso se desarrolla en un medio dispersivo). Entonces, el análisis de estabilidad es simple: si $e>(1\text{-}|k|^2)^2$ las soluciones son estables, si $e<(1\text{-}|k|^2)^2$ entonces son todas inestables. Finalmente la curva crítica viene dada por $e=(1\text{-}|k|^2)^2$. Con los datos anteriores a la mano se procede a encontrar los modos más inestables, los cuales son, es claro, aquellos alrededor de $e\approx 0$, ya que alrededor de este punto se cambia de signo. Entonces la base de la variedad central son los modos: $\exp\, i(kx)$, $\exp\text{-}i(kx)$ correspondientes al autovalor degenerado, de donde se deduce que es bidimensional.

Veamos ahora el caso de la reducción de Lyapunov-Schmidt (Golubitsky y Schaeffer, 1985).

La formalización requerida es como sigue: se establecen un par de espacios funcionales: $H$, $H_0$ subconjuntos, por simplicidad expositiva, del espacio de Hilbert $L_2(\Sigma)$ donde $\Sigma\subset\Re^N$. Nótese la diferencia inmediata en la representación: tomaremos de entrada un par de espacios de dimensión infinita, no finito dimensionales.

Entonces, en este caso se presentará un problema de traducción. El problema a tratar es reducir la ecuación: $\Phi\ (u, \lambda) = 0$ con:

$$\Phi : H \text{ X } \Re^N \rightarrow H_0$$

a una ecuación finito dimensional manejable que contenga las singularidades.

Para realizar esta reducción se requieren las siguientes condiciones expresadas sobre el operador linealizado $D\Phi$ alrededor del punto $u$=0, $\lambda$;

i. Es un operador de Fredholm de índice nulo.

ii. Es un operador elíptico

De inmediato el conjunto de propiedades que se exigen son todas diferentes, el aparato conceptual varía. Estos requisitos, indispensables hasta ahora, permiten realizar las siguientes descomposiciones:

$$H = \ker D\Phi \oplus (\ker D\Phi)^\perp$$

$$H_0 = \operatorname{Im} D\Phi \oplus (\operatorname{Im} D\Phi)^\perp$$

donde el superíndice indica que los espacios son espacios ortogonales relativos al producto interior definido en el espacio de Hilbert $L_2(\Sigma)$. Las notaciones ker e Im indican los núcleos e imágenes de los operadores afectados. Por supuesto, donde $D\Phi$ es un operador de Fredholm de índice nulo, su invertibilidad está establecida cuando: ker $D\Phi = \{0\}$. Con las descomposiciones anteriores la ecuación $\Phi\ (u, \lambda)= 0$ se descompone de la siguiente manera: dado el proyector $\pi : H_0 \rightarrow \operatorname{Im} D\Phi$ escribimos:

$$\pi\, \Phi(u, \lambda) = 0$$
$$(1-\pi) + (u, \lambda) = 0$$

O sea, se escribe la ecuación en cada uno de los subespacios de $H_0$. A continuación se escribe la descomposición de $u$ en cada subespacio de $H$ en la forma $u = v + w$ lo que se sustituye en la ecuación $\pi\ \Phi = 0$ para obtener: $\pi\Phi(v + w, \lambda)$ lo que nos permite definir el siguiente operador:

$$d\colon \ker D\Phi \Re^N \rightarrow (\operatorname{Im} D\Phi)^\perp$$

$$d(v, \lambda) = (1+\pi)\Phi(v + w(v, \lambda), \lambda)$$

Como la parte lineal del operador es un operador de Fredholm, se tiene que la base que genera ker $D\Phi$ es finita, lo que permite escribir: $v = \Sigma x_i v_i$. De la misma manera

$(\mathrm{Im}D\Phi)^{\perp}$ tiene también una base finita, respecto de la cual se calculan las proyecciones de $d(v, \lambda)$, es decir, las proyecciones de esta ecuación reducida vienen a ser las ecuaciones que se requieren para caracterizar la dinámica alrededor de una solución (usualmente la solución nula). Por tanto vienen dadas como:

$$d\left(\sum_i x_i v_i, \lambda\right) = \sum_i g_i(x, \lambda) k_i$$

donde los $ki$, son los vectores base del espacio aducido. Explícitamente se tienen las ecuaciones reducidas:

$$g_i = < k_i, d\left(\sum_i x_i v_i, \lambda\right) >$$

que son la parte final, culmen, del análisis. Usualmente no son fáciles de obtener en la práctica; sin embargo, las características específicas de la ecuación ocasionalmente permiten realizar consideraciones que suplen esta carencia.

Con lo expuesto debe quedar claro que las caracterizaciones de los modelos no son nunca cuestiones fáciles, o decididas de antemano. Se toma la postura ecléctica de no confrontar las orientaciones, sino de tratar de utilizarlas en aquello para lo que se revelen más convenientes, con lo que la actitud es evidentemente pragmática al tomar en cuenta los intereses cognitivos del sujeto. Pero no se plantea la cuestión de la traducibilidad interparadigmática, posiblemente porque consideraciones de corte realista externo sugieren que los resultados de ambas reducciones deben de ser idénticos. Lo que por supuesto no es obvio en lo absoluto, dada la enorme diferencia entre los conceptos utilizados. Los paradigmas utilizados para construir los puntos singulares del sistema se pueden escribir como:

$$p_1 = < D, T^N \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^m, f_1, s_1 >$$

donde $D$ es el dominio de datos empíricos que se mapean, por $f$, a un subespacio del haz mostrado. En el otro caso, supóngase el mismo dominio de datos, sólo que ahora:

$$p_2 = < D, H \times \mathfrak{R}^m, f_2, s_2 >$$

Donde $f_2$ mapea los datos a un subespacio del espacio de Hilbert mostrado. Evidentemente, ahora el mapa interparadigmático no resulta tan obvio.

Consideremos ahora el caso II-f: el pleno régimen no lineal. Lo más común es recordar al supuesto precursor J. Scott Russell, quien nunca resolvió la ecuación que describe la onda no lineal observada por él, hoy en día denominada solitón; porque en su tiempo se carecía de la formulación de esta ecuación, y una ecuación es la manera más brutal de notar que, en efecto, la referencia a los particulares es en los términos de propiedades, no de nombres. Por lo tanto J. S. Russell sólo poseía una referencia rígida. La liberalización de la referencia rígida vino cuando la ecuación fue obtenida explícitamente por D. J. Korteweg y Gustav De Vries en 1895, pero no se conocía un método sistemático de solución. Como lo comentan Agüero y Martínez (1995), quien primero demostró la existencia de una solución solitónica fue al parecer M. A. Lavrentiev, y le siguió Kurt Friedrich al simplificar la demostración. Quizá así se pueda establecer un paradigma en cuanto a métodos de demostración en matemáticas, pero nuestro interés es la física, así que nos centraremos en el método de dispersión inversa.

Este método fue desarrollado durante la década de los años sesenta por C. S. Gardner *et al.* (1967) y expuesto en una carta breve a la revista *Phys. Rev. Letters*. Esto funda un paradigma (el del *método espectral inverso*) y resuelve las anomalías sacadas a luz por J. Scott Russell. Anomalías que consisten en la presencia de una entidad no prevista por la teoría.

Podemos leer en las reproducciónes facsimilares contenidas en el libro de Tsung Dao Lee sobre teoría de campo (Lee, 1988) una brizna de lo que fue en su momento una amplia discusión en contra de Scott Russell comandada por Lord Rayleigh, quien acude a los tratados de Sir George Airy y Lord Gabriel Stokes para refutar la posibilidad de semejante "onda solitaria".

El concepto de "solitón", o solución solitónica, aparece, hasta donde cabe, en 1965 en los trabajos numéricos de Zabusky y Kruskal con la ecuación de Korteweg y DeVries que ellos habían deducido en la física de los plasmas (Zabusky y Kruskal, 1965). En ese artículo establecen una característica importante del solitón: interactúa con otro solitón de manera elástica. Y esta es la propiedad que de manera precisa es utilizada en la definición que dan A. Gerold y K. Buchner de solitón (Gerold y Buchner, 1991), la que resulta muy larga para mostrarla aquí.

Pero leyendo el tratado de Tsung Dao, la definición que él da de solitón no incluye la interacción elástica: "Un solitón clásico es cualquier solución confinada y no dispersiva de una teoría de campo clásico".

*Confinada* quiere decir que ocupa una región finita del espacio, en tanto que *no dispersiva,* que no cambia de forma con el transcurrir del tiempo (más claramente: la frecuencia angular depende linealmente del número de onda). Esto da cuenta de las características observadas por Scott Russell:

una ola que se eleva y viaja conservando su forma, y muestra que en efecto un nombre sólo es una abreviatura de una descripción en términos de propiedades del particular referido. Y tampoco aparece en la definición de R. S. Ward (Fordy y Woods, 1994). "Pulso de energía localizado en el espacio; o bien solución de ecuación no lineal localizada en el espacio". ¿Por qué tal amplitud en las definiciones de estos dos autores? Porque a continuación tratarán de "solitones estables" que interactúan inelásticamente, lo cual está, como es notorio, contra el concepto inicial de Zabusky y Kruskal.

Restringiéndonos a una formulación lagrangiana de las teorías de campos, las soluciones solitónicas se clasifican de acuerdo al potencial y a las leyes de conservación involucradas en:
a) Topológicas.
b) No topológicas.

Si $U(\varphi)$ es el potencial del sistema lagrangiano, entonces la condición necesaria para la existencia de soluciones solitónicas, en el sentido de la definición dada por Tsung Dao, es que este potencial posea $n>1$ mínimos. En tanto que la condición necesaria para la existencia de soluciones no topológicas es que exista una ley de conservación aditiva.

La manera en la cual obtiene Tsung Dao la posibilidad de una solución no topológica consiste en aplicar el método usual de simetrización del lagrangiano para ligar las simetrías del lagrangiano a leyes de conservación vía el teorema de Noether. Así, introduce un potencial de la forma: $U(|\varphi|^2)$ donde el campo se cambia por un campo complejo. De esta manera se obtiene la ley de conservación del número de partículas, porque se ha construido un lagrangiano invariante ante la transformación global del grupo unitario en una dimensión: $\varphi_0 = \varphi$ exp $i\theta$ representado en el isoespacio.

Analicemos ahora, *grosso modo*, la manera en la cual se usa el método. Esto dará pie a notar la manera en la cual surgen algunas conjeturas relativas a su funcionalidad y a resaltar que el uso del razonamiento subrogatorio no está restringido a ámbitos de datos "físicos".

Se parte de la ecuación Korteweg-DeVries (KdV) en la forma:

$$u_t \quad u_{xxx} + 6u_x u \tag{3}$$

con la condición de contorno:

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

típica para solitones.

De acuerdo a Gardner *et al.* (1967) se introduce el mapa:

$$u = \frac{\psi x}{\psi} + \lambda \tag{5}$$

que es la linealización del mapa paramétrico (o deformado) de Miura dado por:

$$u = -\phi_x - \phi^2 + \lambda \tag{6}$$

a través de

$$\phi = \frac{\psi_x}{\psi} \tag{7}$$

El mapa (4) tiene una versión no deformada ($\lambda=0$) que relaciona la ecuación KdV con la ecuación modificada de KdV ($m$KdV) dada por:

$$\phi_t = \phi_{xxx} + 6\phi^2\phi_x \tag{8}$$

Entonces $u=\phi^2-\phi_x$ satisface la ecuación KdV. La relación precisa es:

$$u_t - u_{xxx} - 6u_x u = -(2\phi + \frac{\partial}{\partial x})(\phi_t - 6\phi^2\phi_x + \phi_{xxx})$$

De la que es inmediata una conclusión: la transformación es en un sólo sentido, de una solución de la ecuación $m$KdV a una solución de la ecuación KdV. El comportamiento es similar en el caso de las ecuaciones afectadas por la acción de una transformación paramétrica, como la ecuación de Gardner *et al.* (1967) y se utiliza para relacionar las jerarquías y deducir las cantidades conservadas.

La ecuación de Gardner es introducida tomando en cuenta la invariancia de la ecuación KdV ante transformaciones extendidas de Galilei, y su solución es una densidad conservada (Ablowitz y Segur, 1973: 6-7). La manera más simple de obtener las cantidades conservadas es la expansión de la onda en términos del parámetro $\lambda^{1/2}$ (Ford, 1994: 12). Los coeficientes de la expansión se conservan, debido a que el operador de integración es lineal y el parámetro nunca es cero y, por eso, se obtiene la prueba de un número infinito de leyes de conservación.

En posesión del mapa (3) se puede probar, por sustitución del mismo en la ecuación KdV (Gardner *et al.*, 1967) que el paramétro es independiente del tiempo. A esta característica se le denomina isoespectralidad de la ecuación de Schrödinger ante el flujo de la ecuación KdV.

El resto del método consiste en reconstruir $u$ con los datos aportados por $\psi$. Los datos aportados por $\psi$ son los coeficientes de reflexión y refracción; en resumen, los componentes de la matriz $S$, a partir de los cuales, mediante la ecuación de Gelfand-Levitan, se calcula explícitamente. Véanse los detalles precisos en la solución Ablowitz y Segur (1981).

Los datos que se tienen como resultado de este proceder son:
i) Número infinito de leyes de conservación.
ii) Varios mapas que relacionan varias ecuaciones entre sí.
iii) Un problema lineal inverso de dispersión.

Los datos anteriores sugieren lo siguiente para tratar de representarnos este método e intentar averiguar por qué funciona (que es la pregunta que se hacen Ablowitz y Segur (1981)
i) Una estructura hamiltoniana debido a la aparición de un número infinito de leyes de conservación. Intentando subrogar a partir del teorema de Liouville-Arnold (intento exitoso a manos de Faddev).
ii) Transformaciones de Bäcklund entre las ecuaciones diferenciales.
iii) A partir de las transformaciones de Bäcklund construir los problemas espectrales inversos.

Sólo ejemplificaremos un caso de representación de los datos anteriores en un dominio determinado: la representación de Lax. Considérese la siguiente ecuación de evolución: $u_t=K(u)$ donde $K$ representa una función dependiente de $u$ y todas sus derivadas espaciales. El primer paso es obtener un conjunto de condiciones que permitan construir un número infinito de leyes de conservación (véase Bao, 1996) y para una presentación breve y general con ejemplos interesantes. Para ello se construye primero una simetría de Bäcklund de la ecuación $\eta$ porque se puede correlacionar tal simetría con una cantidad conservada. Como es sabido, $\eta$ satisface: $\eta_t=K_u\eta$ donde $K_u$ es el operador linealizado de $K$.

Entonces, el procedimiento clásico para construir el número deseado de leyes de conservación comienza por postular un operador de recursión $R$, tal que cada $v_n=R^n\eta$ sea una simetría de Bäcklund de la ecuación diferencial. Para ver qué condición debe satisfacer $R$ diferenciamos $v$ respecto al tiempo, de donde obtenemos: $v_t=R_t\eta + R_u\eta$, y como queremos que: $v_t=K_uR\eta$, ponemos que $R_t=K_uR\text{-}_uRK_u$ de donde se obtiene el resultado deseado, el operador de recursión satisface: $R_t=[K_uR]$. El mismo razonamiento muestra que las potencias del operador de recursión satisfacen la condición de ser simetrías de Bäcklund bajo la satisfacción de la misma ecuación operatoria para el operador de marras.

Entonces, ya tenemos el número infinito de leyes de conservación, sólo falta el problema espectral. Lax postula que:

$$\eta_t = K_u\eta$$
$$R\eta = \lambda\eta$$

es la representación abstracta de los datos proporcionados por la ecuación KdV. Los operadores $K$ y $R$ son el famoso "par de Lax".

La condición de consistencia del sistema se deduce como sigue:

$$R_t\eta+RK_u\eta=\lambda_t\eta+\lambda K_u\eta$$
$$R_t\eta+RK_u\eta=\lambda_t\eta+K_uR\eta$$
$$R_t\eta=[K_u, R]\eta+\lambda_t\eta$$

el último renglón es el resultado buscado. Si planteamos que $R_t = [K_u, R]$ y $\lambda_t = 0$, entonces el sistema completo de ecuaciones que viene a representar abstractamente los datos facilitados por la ecuación KdV son:

$$\eta_t=K_u\eta$$
$$R\eta = \lambda\eta$$
$$\eta_t = [K_u, R\,]$$
$$\lambda_t=0$$

Estas ecuaciones nos aseguran las características que resultaron deseables de la ecuación KdV. Nótese que en este caso lo que refieren las condiciones es a una ecuación diferencial que aparecerá, de hecho, en la condición establecida en el tercer renglón anterior.

Este ejemplo muestra la naturaleza del dominio de "datos", $D$ que aparece en la definición de paradigma. Por tanto, la actividad de representación no se restringe a considerar datos empíricos, sino también datos formales. En este último ejemplo se pretende reconstruir la ecuación KdV sólo a través de las características, las relaciones que satisface, que la hacen deseable.

**Conclusiones**

M. Bunge (1961) propone axiomatizar la física en los términos de una tesis sobre el significado de la proposición que establece que éste consiste de dos coordenadas $<I, E>$, donde $I$ es la intensión y $E$ es extensión. La tesis clave que hemos tratado de sostener en este ensayo es que la referencia en la física a las entidades de interés se hace en términos puramente relacionales, o limitándonos a un lenguaje con puras relaciones unarias (predicados), diríamos que en la física sólo se refiere en términos puramente intensionales.

Por tanto, hemos de rechazar la tesis de Bunge de que debemos utilizar dos coordenadas, ya que sólo se requerirá una. Y esta tesis la hemos venido sosteniendo porque a través de ella se pueden reunir algunos problemas arrojados por la explicación de Kuhn sobre la estructura de los cambios interteóricos:
• La racionalidad de los científicos;
• El crecimiento no acumulativo del conocimiento;
• La inconmensurabilidad de las teorías;
• La naturaleza del referir de los científicos.

La tesis es que el referir de los científicos es hecho única y exclusivamente en base a las estructuras relacionales con las que se representan los datos que tienen a la mano.

Esta tesis permite sostener que en efecto la ontología del "mundo" puede cambiar de teoría en teoría, en específico, nos muestra el criterio de que el espacio de soluciones que satisfacen una teoría física deben estar contenidas en el espacio de soluciones de la nueva teoría física, si se puede hablar de avance acumulativo del conocimiento. De no ser así, el cambio teórico es inconmensurable. El asunto de la racionalidad científica no cae dentro del ámbito de una tesis sobre el referir, que es una cuestión semántica, sino de cuestiones sociológicas que escapan al ámbito que se ha querido manejar en este ensayo.

La conclusión relevante es que, en efecto, el cambio de las teorías lineales a las no lineales acepta un criterio de aplicación simple para mostrar la inconmensurabilidad de una y otra. Que otro tipo de teorización acepte este tipo de criterio es dudoso, lo que muestra, una vez más, lo problemáticas que pueden llegar a ser estas cuestiones.

Finalmente, se ha sostenido que lo anterior es una corroboración del realismo interno de los científicos.

## Referencias


Ablowitz, M.; D. J. Kaup; A. C. Newell y H. Segur. "Nonlinear Evolution Equations of Physical Significance", *Phys. Rev. Letters.*

Ablowitz, M. y H. Segur (1981). "Solitons and the Inverse Scattering transform" Vol. 31, No. 2 SIAM, Philadelphia/*Phys. Rev. Letters.* 125-127.

Agüero, M. y J. Martínez (1995). "El misterio solitónico", *CIENCIA ergo sum*, Vol. 2 No. 2, julio. UAEM, Toluca.

Althusser, L. (1988). *La filosofía como arma de la revolución.* Cuadernos de pasado y presente, 17*a.* Siglo XXI, México.

Apple, M. (1997). *Educación y poder.* Temas de educación 6, 2*a* reimpresión. Paidos-M.E.C., Madrid.

Bao, Q. (1996). "A Formula for Obtaining New Hereditary Symmetries and New Integrable Equations", *J. Math. Phys.* Vol. 37, No. 3, Pag. 1382-1392.

Bunge, M. (1967). "Physical Axiomatics", *Rev. Mod. Phys.* Vol. 39, No. 2, april: 463-474.

Cross, M. C. y P. C. Hohenberg (1993). "Pattern Formation Outside of Equilibrium", *Rev. Mod. Phys.* Vol. 65 No. 3 : 851-1112.

Fordy, A. P. y J. C. Woods (1994). "Harmonic Maps and Integrable Systems", *Aspects of mathematics* Vol. E23, Vieweg.

Gardner, C. S.; J. M. Greene; M. D. Kruskal y R. M. Miura (1967). "Method for Solving the Korteweg-DeVries Equation", *Phys. Rev. Letters* Vol. 19. No. 19: 67. September.

Gerold, A. y K. Buchner (1991)."Solitons and Isometric Immersions", *J. Math. Phys.* Vol. 32. No. 8: 2056-2062.

Golubitsky, M. y D. G. Schaeffer (1985). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.1. Springer-Verlag, New York.

Hartman, P. (1961). "On Local Homeomophisms of Euclidean Spaces", *Symposium Internacional de Ecuaciones Diferenciales*. UNAM-SMM, México.

Ibarra, A y T. Mormann (1999). *Representaciones en la ciencia.* 1*a* ed. Ediciones del Bronce, Barcelona.

Ioos, G. y M. Adelmeyer (1992). "Topics in Bifurcation Theory", *World Scientific.* Singapore.

Kripke, S. (1985). *El nombrar y la necesidad.* 1*a* ed UNAM, México.

Kuhn, T. S. (1986). *La estructura de las revoluciones científicas.* 7*a* reimpresión de la 1*a* edición, FCE, México.

Kuperschmidt, B. A.(1982). "Korteweg-DeVries Surfaces and B Curves", *J. Math Phys.* Vol. 23 No. 8: 1427-1432.

Lee, T. D. (1988). *Particle Physics: and Introduction to Field Theory.* Harwood Academic Publishers.

Moulines, C. U. (1989). "Réplica a los límites del realismo científico", *III Simposio Internacional de Filosofía.* UNAM, México.

Pérez Ransanz, A. R. (1998). *Kuhn y el cambio científico.* 1*a* ed. FCE, México.

Per, B.; T. Chao y K. Wiesenfield (1987). "Self-Organized Criticality: an Explanation of Noise", *Phys. Rev. Letters.* Vol. 59. No. 4: 381-382.

Platts, M. (1992). *Sendas del significado.* 1*a* ed. FCE, México.

Quine, W. (1981). *Los métodos de la lógica.* Ariel, Barcelona.

Schrödinger, E. (1926). "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules", *Phys. Rev.* Vol. 28. No. 6.

Sneed, J. (1988). "La estructura lógica de la teoría bayesiana de las decisiones", *V Simposio Internacional de Filosofía.* UNAM, México.

Strawson, P. F. (1983). *Ensayos lógico-lingüísticos.* 1*a* ed. Tecnos, Madrid.

Thom, R. (1987). *Estabilidad estructural y morfogénesis.* Gedisa, Barcelona.

Zabusky, N. J. y M. D. Kruskal (1965). "Interaction of Solitons in a Colisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Letters.* Vol. 15. No. 6, september.