Graciela Leticia Reynoso Morales, Víctor Florencio Ramírez Hernández

¿Qué es el número?

Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 1, marzo, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

ESPACIO DEL DIVULGADOR

¿QUÉ ES EL NÚMERO?

GRACIELA LETICIA REYNOSO MORALES* Y VÍCTOR FLORENCIO RAMÍREZ HERNÁNDEZ*

Recepción: 22 de septiembre de 2000
Aceptación: 10 de noviembre de 2000

La tía Lupe es especialista en preguntar. Si llegas tarde, te espera tras la puerta, con las manos sobre sus caderas y con una cara de ahorita-mismo-me-contestas te suelta a boca de jarro, más rápido que una Pentium III a 750 Mhz: "¿Dónde andabas?" En caso de que llegues a tiempo, se repite la escena pero con otra pregunta: "¿Qué horas son éstas de llegar?" Pero si acaso arribas antes de la hora fijada, da igual; la tía Lupe te lanza un tiro penal: "¿Te escapaste de la escuela?" Como quien dice, la tía Lupe es buena para eso de cuestionar, inquirir, interrogar o preguntar.

Pero la tía Lupe no impresiona hasta el alucine; no por eso hablo mucho de ella. Más bien, con ella se da lo que decían en la tele: "Tener una tía así o ser una tía así..." Bueno, sea cual sea el motivo, si caes bajo su mirada tutelar, ya no te deja en paz. Hasta que llegas a tenerla entre ceja y ceja y terminas cantando como Juanga: "Tú estás siempre en mi mente".

Vamos, que esas y otras peculiaridades hacen a la tía Lupe referencia obligada, un elemento del paisaje, un lugar común. Así que no ha de extrañarte que el otro día, en la clase de filosofía, el profe dijo algo que hizo venir a mi mente a la tía Lupe. "Esto le queda a la tía que ni mandado a hacer", pensé. Se trataba de una frase de Novalis: "El filósofo vive de problemas, como de alimentos el hombre". Esta vez las cabeceadas, que siempre rinden un efecto de tiene-usted-la-razón-profesor, expresaron una coincidencia real entre el profe y yo por dos motivos: la tía Lupe se alimenta, y lo hace tan bien que de la cintura de avispa que hace algún tiempo debió haber tenido arriba de las caderas, hoy brota una cintura de obispo. Además, ya sabes; se la pasa preguntando.

I

Claro, José Javier (1989)[1] advierte que en lo que te he platicado hay un error. Dice que, en parte, nuestros errores ocurren porque vamos a una escuela donde enseñan mitos, que estamos en un país que se alimenta de mitos, en fin, que vivimos en un mundo de mitos. "Por ejemplo", arguye, "te dicen que lo importante es comprender, entender lo que estudias, no repetirlo como cotorro, pero pobre de ti si crees eso, porque cuando llegan los exámenes, ¡casi todo lo que viene es para contestar de memoria!"

** Dirección General de Educación Tecnológica Industrial, DGETI. Universidad Autónoma de Guadalajara. CBTIS 10. Sierra de Teucan No. 2165. Residencial San Elías C.P. 44240. Guadalajara, Jalisco. Tel.: (3) 651 40 03, fax: (3) 609 30 65. Correo electrónico: victorfrh@yahoo.com*

1. Cuando hablamos de José Javier nos referimos al artículo de Sánchez Pozos, J. Javier (1989) a manera de interlocución.

También es un mito que los científicos observen sin prejuicios y que sean objetivos. "No es cierto", dice José Javier, "aun los científicos van al baño y tienen pesadillas, y ellos, igual que nosotros, también ven lo que quieren ver, o lo que pueden, o lo que sus prejuicios o sus teorías les permiten ver".

En esto de los ejemplos para ilustrar lo que dice, José Javier es un buenazo: "El caso de Newton y la manzana, otro mito. No es cierto que de ahí le haya surgido la idea de la gravedad a Newton. Le fue inspirada por la carta que le envió Hooke en 1679, donde, sin saberlo, le enseñó la forma correcta de analizar el movimiento curvilíneo, base de la teoría de la gravitación universal".

Hay otro mito, éste más caricaturesco. A veces te pintan al filósofo deambulando con los ojos en blanco, mirando las estrellas, caminando sin que sus pies toquen el suelo, o sentado con las piernas en flor de loto, o con anteojos que parecen fondo de botella. Y eso es un mito, una filósofa o un filósofo son como cualquiera. Imagina a cualquiera del lugar donde vives y así son. O mejor, imagina a cualquiera de un lugar cualquiera y así son. Por cierto, es parte del mito que rara vez hablen de las filósofas, que las ha habido: Santa Teresa de Jesús, Edith Stein, Rosa de Luxemburgo. Y conste, no hablo de las mexicanas vivas.

José Javier también dice que las preguntas no se salvan, que en ellas también hay peligro de errores y de mitos. Y te explica.

Primer mito: preguntar es hacer filosofía. No es cierto, no toda pregunta es filosófica. Aunque debo decirte que de esto no ha dicho por qué, y yo sigo en Babia, sin saberlo. Pero sea como sea una pregunta filosófica, la tía Lupe no es lo que podríamos decir una filósofa nomás porque se la pasa preguntando, digo. Tampoco los niños pequeños son filósofos aunque a cierta edad desesperen con su "¿y por qué?"; y a cada respuesta que das, surge el mismo "¿y por qué?". Respecto a que algunas personas consideren que todos somos filósofos, ya que reflexionamos, José Javier asevera: eso también es un error.

"Segundo", dice José Javier, "hay preguntas que no es posible que hayan sido hechas, que simplemente no pudieron haber existido. Incluso, quienes supuestamente las dijeron son personas que no existieron. ¿Te acuerdas del rollo que te tiran acerca del origen de la filosofía? Te salen con eso de que cuando el hombre se puso a pensar en el sentido de la vida en los confines del universo, en qué es el ser... Esas preguntas, además de ser mitos, también son caricaturas. Imaginar que una quinceañera griega de tiempos de Platón o una *mexika* de tiempos de *Kuitla'uak* llegaron a preguntarse cuál era el sentido de su vida, es pensar en algo que no pudo haber ocurrido. ¿Por qué? Porque las mujeres de ambas culturas tenían formas de vida en las que no había necesidad de tomar decisiones para orientar la vida en una o en otras direcciones. Para nosotros es normal escoger profesión o pareja, y ahora hasta la preferencia sexual. Eso es lo que podemos decir *forma de vida moderna*. Pero en esos tiempos no era así. Incluso en algunos grupos humanos que conservan formas tradicionales de vida, principalmente en la provincia de la provincia de la provincia, o sea, en aquellos grupos humanos que menos influencia han recibido de la vida moderna". Y sí, pues como diría el profe de teatro: su escenario era uno sólo y no podía pensar en otro libreto.

"Hasta aquí llevamos dos errores: no toda pregunta es filosófica y algunas preguntas simplemente no se formularon. Va el tercero. Hay otro error que puede darse, si tomamos una pregunta de algún filósofo sin saber por qué la dijo, cuándo, en qué condiciones o dónde. Quizá, vista desde nuestro tiempo, no entendamos qué es lo que estaba preguntando. Entonces convertimos a ese filósofo y a su pensamiento, como diría Russell, en víctima de la falta de juicio de la posteridad. Esto es descontextualizar una pregunta". Ya te imaginarás que ante mi cara de *what?!* José Javier ha de intentar explicarlo de otras maneras.

"Vamos a explicar lo del contexto. Si alguien te dice *'a'* o *'i'*, ¿ya con esas letras sueltas se puede considerar que te dijeron 'amigo'? No, ¿verdad? Y si digo 'amigo', ¿ya con eso entendiste que te dije 'eres mi amigo'? Tampoco, ¿verdad? En cualquiera de los dos casos el elemento aislado no da lo mismo que la palabra o que la frase. Es la frase funcionando como contexto, lo que permite entender algo o comunicarlo. Ya lo dijo Popper: "Las palabras son a las frases lo que las letras a las palabras".

"Aquí tienes otro ejemplo. San Anselmo preguntó cuántos ángeles caben en la punta de una aguja. Sí, eso preguntó, no te rías. Ya sé que ahora nos parece tonto preguntar algo así, creamos o no en los ángeles. Pero lo que él quería saber era si los seres ideales, los seres que son productos del pensamiento –en este caso, del pensamiento divino–, ocupan un lugar en el espacio. Vamos a decirlo de otra forma: ¿un número, por ejemplo el dos, ocupa un lugar en el espacio?".

Creo que José Javier capta bien mi silencio apabullado, porque después retomará eso del número. Así que para completar el asunto de la descontextualización, saca de su mochila una carta del Capitán Xerox (así le dice a las copias fotostáticas) y comienza a leer.

"La utilización de los sistemas filosóficos en dominios alejados de su origen espiritual es siempre una operación delicada, y a menudo una operación abusiva. Así transplantados, los sistemas filosóficos se vuelven estériles o falaces; pierden su eficacia como coherencia espiritual, eficacia tan palpable cuando son revividos en su originalidad real, con la fidelidad escrupulosa del historiador, orgullosos de pensar lo que jamás se pensará dos veces. Habría que concluir, pues, que un sistema filosófico no debe ser utilizado para otros fines que aquéllos que él mismo se asigna. Por consiguiente, la falta más grave contra el espíritu filosófico sería precisamente desconocer esta finalidad íntima, esta finalidad espiritual que da vida, fuerza y claridad a un sistema filosófico. En particular, cuando intentamos esclarecer los problemas de la ciencia a través de la reflexión metafísica, cuando se pretende mezclar los teoremas y los filosofemas, nos vemos ante la necesidad de aplicar una filosofía necesariamente finalista y cerrada a un pensamiento científico abierto. Se corre el riesgo de dejar a todo el mundo descontento: los hombres de ciencia, los filósofos y los historiadores" (Bachelard, 1984: 7).

Después de este tremendo zambombazo de la descontextualización, digan si no es cierto que José Javier es un tipazo. Aunque claro, según él, lo que ha explicado no basta y, como está por verse, la neta que no.

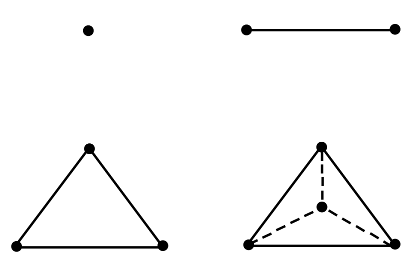
II

Fue a propósito de San Anselmo y eso de contar ángeles la primera vez que José Javier habló de Frege, y ante la misma cara que están poniendo ustedes de no-me-friegues tuvo que dar vueltas entre explicación y explicación, para que pudiéramos entenderlo. Al comienzo, en la mitad y al final, repitió lo del tercer peligro: "La filosofía es histórica. Si descontextualizamos una cuestión, podemos no entender lo que un filósofo preguntó". Y para seguir explicando, a José Javier se le ocurrió tomar la pregunta más fácil, la más sencilla que pueda ocurrírsele a alguien, principalmente si ese alguien es el mismísimo Frege: ¿qué es el número?

Una cosa nada más antes de seguir con lo que quiso decir Frege con su pregunta. Como es difícil decir las cosas como José Javier, mejor las digo de donde me salgan, como me salgan, y como me vayan saliendo. ¿Vale?

Si va uno andando por ahí y de pronto se le ocurre preguntarse ¿qué es el número? Puede que mire las paredes, buscando el *número* de la puerta. Así que en este caso el número es la dirección. Claro, no es el mismo *número* que cuando alguien dice "¿cuál es tu *número* de lista?", tampoco cuando le dicen a Rafa Márquez que es "el defensa *número* uno". Ahora, no es lo mismo cuando dices "tengo cinco de calificación" que cuando dices "el refresco cuesta cinco pesos". Dice José Javier que Frege no preguntaba ni podía responder como lo haría Pitágoras (por cierto, ¿ya viste *Donald en el país de las matemáticas?* José Javier la recomienda para entender a Pitágoras). Imagínatelo: vestido con túnica, tocando el arpa y señalando como en la banda, con clave y seña, y diciendo que el número es el origen de todo lo que existe, o sea, que las cosas son números. Y ahí va el por qué, según Pitágoras, claro.

1 es un punto. 2 es una línea, que es lo que hay entre dos puntos. 3 es una superficie, formada por líneas, que a su vez fueron formadas por puntos. Y 4 es un sólido, formado por líneas:



Así que los sólidos, de los que está formado el mundo material, las curvas de las chavas y los músculos de los galanes, todos ellos provienen de los números. A eso se debe que Pitágoras afirme que el número existe en la naturaleza, en el cosmos. Por cierto, eso de decirle al universo 'cosmos' viene porque, según los griegos que se dedicaban a esas ondas del pensar, el universo está en armonía, es decir, porque nada cambia. Por lo menos eso parece si un abuelo, un papá y un nieto de esa época (sin teles, cine ni telescopios) se la pasara viendo el cielo, cada uno durante toda su vida, durante noches y noches: las estrellas son las mismas, cada astro en su sitio, no aparece alguna lucecita nueva. Debido a esa armonía, por no cambiar y corromperse, consideraban bello al universo. Del cosmos y su belleza viene que las mujeres usen cosméticos para ponerse bellas... bueno, aunque en muchos casos solamente es un decir.

Y regresando a lo del número, "aquí está una diferencia", explica José Javier, "para Pitágoras el número es algo dado, como que ahí está, independiente del pensamiento; mientras que Frege se ubica en otra parte de la pregunta que hizo Penrose: cuando los matemáticos llegan a resultados en sus cálculos, ¿producen sólo construcciones mentales o encuentran realidades que estaban ahí, listas para ser descubiertas?".

Entonces, aparece la pregunta: ¿qué quiere decir Frege cuando pregunta qué es el número? Como ya te diste cuenta, no es lo mismo que podría preguntarse Pitágoras. Es más, la respuesta de José Javier no es breve, ni pareja; es chipotuda y tardada. Además de larga, dice la prima Lola, es medio enredada. Pero José Javier piensa que pasito a pasito se gana una maratón o, de a perdis, se llega a la meta. A lo mejor Lola dice que es enredada porque José Javier habla de muchos tipos que uno ni en cuenta.

III

Para entender qué quiso preguntar Frege, José Javier proporcionó algunos datos sobre la época en que hizo su cuestionamiento. Para ello comenzó hablando de Leibniz.

Decir ‘Leibniz’ a Leibinz es de cuates, porque su nombre completo era Gottfried Wilhelm Leibniz. Como muchos otros, dedicó gran parte de su vida a un proyecto. En su caso se comprometió a la construcción de una *scientia universalis*, un método que permitiera producir un conocimiento a partir de otro, y que lo hiciera de una manera más segura y eficaz que los métodos conocidos hasta su época (el silogismo de Aristóteles, por ejemplo). Gracias a ese método serían asequibles, hasta cierto punto, las verdades de la razón mediante un cálculo, como se hace en aritmética y álgebra. Imagínate, ¡casi casi un método para pensar y, por tanto, producir conocimientos!

Llamó *inventio* a la construcción de conceptos complejos y de juicios a partir de conceptos muy simples. Para ello, decía que en primer lugar debían descubrirse los conceptos más simples y asignarles de una manera adecuada, según su materia o esencia, signos o caracteres, mediante los cuales fueran unívocamente simbolizados, o sea, que significaran una sola cosa. Así que de seguro él no aceptaría la definición de filosofía como “amor a la sabiduría”, puesto que la primera bronca sería el amor: qué es. ¿Sentirse bien con la persona amada, procurar el bienestar de la persona amada, conocer y servir, conocer y cuidar, o un simple *becho-abacho-y-apapacho-y-mejor-entre-más-oscuracho?* Pero regresando al *inventio*, esta característica creadora habría de constituir una *Mathesis universalis* que abarcara en particular a la lógica y a la matemática, aunque de manera limitada. Inclusive intentó representar al razonamiento mediante diagramas y, toma nota, también mediante números. Comenzó a dedicarse a este proyecto desde 1679, pero lo concretó allá por 1686.

Leibniz consideró haber descubierto, entre otras cosas, cómo todas las verdades pueden ser expresadas mediante números, y cómo nacen las verdades contingentes, y cómo tienen de alguna manera naturaleza de números inconmensurables. Todo esto parece fácil, pero si lo piensas más detenidamente, estaba proponiendo algo así como a la tatarabuelita de Casiopea (Casiopea es la computadora de un profe, que de tan vieja y usada “casi opea”). Con todo ello, la pregunta obligada era si eso sería posible. Es decir, ¿sería posible que a partir de un sistema de signos y de un cálculo se obtuvieran nuevos conocimientos? Lo interesante del asunto es que se ocuparían las mismas operaciones que con los números y a los mismos números, pero para producir algo diferente a los números.

Tenemos aquí, pues, elementos para entender en una cierta forma a la pregunta ¿qué es el número? Pero la cosa no quedaba ahí, el panorama debía ser más amplio, para ello aparece Cantor en escena.

1

Georg Ludwig Ferdinand Philipp Cantor (no te apantalles, suena como decir “María Antonieta de la Virgen de los Ángeles Negros” pero en alemán), fue un matemático que nació en San Petersburgo (cuando San Petersburgo era San Petersburgo y no el vulgar Leningrado, diría la tía Lupe, tan aficionada a ir en contra de lo que suene a rojo) en 1845 (cuando ni los sanpetersburgueses imaginaban que cambiarían su gentilicio por leningradenses) y murió en 1918. Como muchos otros, aunque nació en la tierra de los zares y el vodka, vivió la mayor parte de su vida en otra tierra, la *chevesland:* Alemania. Ahí le hizo a eso de dar clases, no a la cerveza, en la Universidad de Halle, donde los que tronaban sí le hacían a la cerveza y no entraban a clases.

En ese tiempo, otros especialistas en quebraderos-de-cabeza (o sea, matemáticos) habían hecho caso omiso de la protesta de Gauss (matemático que nació el Día del Niño de 1777) con respecto a la utilización de las cantidades infinitas como si fueran entidades matemáticas reales. Gauss alegaba que hablar del infinito no era más que eso: una simple forma de hablar. Esos matemáticos que se divertían con el infinito eran: Riemann, Lupschitz, Hankel y Weierstrass. Pero no te vayas con la finta, ellos le entraron al infinito pero no mirando cómo se pierde el cielo en lo oscuro, sino en la escala mini; le hicieron al cálculo infinitesimal.

Cantor (que se dice como si fuera ‘cántor’ y no ‘cantór’) tiró para otro rumbo, de esos que apantallan: en lugar de meterse con lo pequeñititito, se puso de igual a igual con lo grandototote. Y la cosa no es simple; uno puede burlarse de algo pequeño. Ve un ratón y se ríe (bueno, Lola mi prima corre, gritando a todo pulmón), pero qué tal si fuera un elefante caminando hacia ti. Alguien llega y te dice “hay un virus en el ambiente”; te enteras de su nombre, su tamaño, y te encoges de hombros. Pero si anuncian “va a caer un meteorito sobre la escuela”, uno no sabe si saltar de alegría porque se acaba el sitio de tormento, o llorar porque no va a tener dónde reunirse con sus amigas y amigos. Sea como sea, a lo pequeño lo desdeñamos, pero como que lo grande sí que nos impresiona.

Bueno, si alguien se pregunta “¿Qué es lo finito?”, la respuesta más fácil que puede ocurrir es: lo que tiene límites. Ajá, ¿pero qué es lo infinito? Y con esta pregunta la puerca tuerce el rabo.

Parece que Cantor se hizo la pregunta, pues se echó un rollo de esos complicados, tanto que suenan a paradoja.

Aunque Cantor no fue el primero al que se le ocurrió eso que puede sonar extraño (lo de la paradoja). Antes de él, Bolzano dijo que existen conjuntos infinitos. Tomando en cuenta que dos conjuntos pueden ser equivalentes (que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca, es decir, que sus elementos pueden ser relacionados uno a uno), la equivalencia, en el caso de los conjuntos infinitos, es que una parte del conjunto es equivalente al todo. Sí, ya sé que como yo, tampoco tú le entendiste, así que veamos de qué otra manera lo explicó José Javier.

En 1887 Dedekind definió lo que es una clase infinita. Pero ¡aguas!, ¿eh? No vayas a pensar que una clase infinita es una de esas clase aburridas aburridas, tediosas tediosas, en las que los profes se la pasan hablando y hablando o dictando y dictando, o contando chistes sin chiste, y en las que no encuentras la hora en que se acabe. Dedekind dijo que una clase es infinita cuando es similar a una parte propia de sí misma. Cantor lo expuso de otra manera: una clase infinita tiene la característica (muy suya, por cierto) de que el todo no es mayor que alguna de sus partes.

¡Órale! ¿Qué onda, eh? Decir que "el todo es mayor que cualquiera de sus partes" pasa, se acepta; pero que "el todo no es mayor que alguna de sus partes..." Cómo va a ser que el cuerpo de alguien no sea mayor que uno de sus dedos, o que sus ojos, o que la espalda. En respuesta José Javier salió con una de esas frases que dejan en silencio a cualquiera... porque se oyen magistrales, aunque no se les entiende ni pizca: "Lo que para lo finito es evidente, para lo infinito es falso".

Y sí, ya pensándolo con calma, como que con un golpe de uña del dedo meñique de la mano derecha (si eres zurdo) matas a una hormiga, pero dando el mismo golpe a un elefante, ni siquiera le hace la trompa de lado, como queriendo reírse; vamos, ni siquiera se le eriza un pelo de la barba (¿tienen los elefantes barba?). Y para hacer muecas de elefante, he aquí la versión (más o menos igual, conste) de José Javier de cómo lo ilustró Cantor. Lo hizo diciendo que el conjunto de los números naturales es equivalente al conjunto de los naturales pares.

Para entenderlo bien, recuerda: el todo no es mayor que alguna de sus partes. Si pensamos en los números naturales como el todo, sus partes serán los números pares y los impares. Así, ¿qué hay más: números pares e impares, o pares solamente? Para contestar esta interrogante uno puede ensayar dos respuestas.

La primera que viene a la mente aquí está: si por una parte tengo la serie 1, 2, 3, 4, 5, 6..., y por otra parte la serie 2, 4, 6..., el número de pares e impares, el primer conjunto, es mayor que el de los pares solos, segundo conjunto.

Para ensayar otra respuesta, vamos a contar, pues sólo así sabremos con certeza qué hay más. Pero ahora tenemos otra pregunta: ¿qué es contar? Esquivemos las dificultades poniendo un ejemplo. Organizas una fiesta. Haces tamales o los mandas hacer, o los compras. A cada invitado le das un tamal. ¿Cuántos vinieron a la fiesta? Lo sabrás poniendo en hilera la envoltura de cada tamal; por cada envoltura hubo un invitado que pasó al rango de asistente. Claro, este proceso fallará, si es que alguno de los invitados se agandayó dos tamales o más. Pero suponiendo que tus cuates no se mandan con la tamaliza, se cumple que por cada tamal comido, un invitado. ¿Qué hemos hecho al contar? Poner en correspondencia.

Entonces, si hacemos corresponder a cada número natural con su duplo, como aparece en la tablita de abajo, vemos que no es correcto considerar que la cantidad de pares más la de los impares es mayor que la de los pares solitos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20...

Para hacer más efectiva esta idea, imagina que tienes frente a ti la tabla completa. Por lo tanto, supón que antes ya se han escrito muchos, pero muchos muchos muchos números; arriba los naturales, del uno en adelante, y abajo los pares, empezando del dos y hasta donde el cuerpo aguante. Bueno, para no hacer más largo el cuento, imagina que estás frente a los últimos cuadros de la tabla. Ahora escribe con qué números terminaría esa tabla.

Claro, no se puede. Basta que al número que pensaste como último en la hilera de arriba le sumes uno (1) para que la tabla se continúe. Simplemente no se llega al término del número de los pares y de los impares, como tampoco del de los pares solos. Entonces, ¿cuál es mayor? Como no se puede contestar, lo preguntaremos de otra manera: ¿qué número nos permite saber cuántos números pares hay?

"Ahora viene lo bueno", anticipa José Javier. Si el conjunto de los números naturales es infinito, entonces no hay un número natural con el que terminemos de contarlos, o sea, no hay un número natural que pueda describir su cardinalidad. Pero ya que se puede poner sucesivamente un número natural sobre su duplo (establecer una correspondencia biyectiva, dice José Javier, entre la clase de los números pares y la clase de los números naturales), lo que se ha hecho, ni más ni menos, ha sido contar a los pares igual que se cuenta una colección finita o el número de invitados a la fiesta. Y, como hemos visto, tienen la misma cardinalidad... así que está demostrado: el todo no es mayor que alguna de sus partes (si Robin, el Joven Maravilla, hubiese estado presente durante esta demostración, exclamaría "!Santos números infinitos, Batman!").

Y José Javier siguió. "A Cantor se le ocurrió llamarles 'contables' o 'numerablemente infinitas' a las clases infinitas que pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los números naturales, por lo tanto, a las clases que pueden ser contadas. Además demostró que no sólo era numerable el conjunto de los naturales, sino también el de los cuadrados perfectos y el de los racionales. Pero una clase que no es numerable, dijo Cantor, es la de los números reales".

"Ahora ampliemos la idea", propuso José Javier. "Como todos los conjuntos finitos son contables y ya que podemos asignar un número a cada uno de ellos, se antoja (igual que le apeteció a Cantor) asignar a la clase de todos los números naturales un número que exprese su cardinalidad. Pero, ojo con lo que sigue, en acuerdo con nuestra descripción de conjunto finito, ningún número entero de esos con los que tratamos todos los días viene a ser adecuado para describir la cardinalidad de toda la clase de los números enteros. Pues asignar un número natural para contar a los naturales sería como el caso del jinete que cabalgando por la llanura cae en un pantano, y se saca con todo y montura jalándose de los cabellos". Así que, como diría *Brozo*, el payaso tenebroso: esta es la neta, la real y pura historia, la neta de las netas acerca de cómo fue creado el primero de los números transfinitos para describir la cardinalidad de las clases infinitas numerables.

Ya metido en estos lugares poco usuales, y para cerrar con broche de oro, Cantor empleó un símbolo diferente a los que se ocupan para los números naturales. Se trata de $\aleph$, que es la primera letra del alepheto hebreo (Aleph suena 'aléf', como la efe de Raphael –Rafael– o la de Phoenix –fínix–; claro, si mi tía Lupe me oyera diciendo que no es alfabeto sino alepheto o alefeto porque no podemos decir 'abecedario hebreo', pues no tiene a, b, c; tampoco podemos decir 'alfabeto', pues no tiene α, β, χ, de seguro que me da una reprimenda de aquéllas). Bueno, a fin de cuentas, Cantor se inclinó por usar un símbolo compuesto $\aleph_0$. "Entonces", dice José Javier, "si alguien nos pregunta cuántos números naturales hay, tenemos que contestarle que hay $\aleph_0$ números naturales".

Pero Cantor no se quedó ahí. Pensó que había otros números transfinitos, y todavía más, imaginó que había un número infinito de transfinitos. Entonces, la cardinalidad de los números naturales tendrá que ser la más pequeña de todas las cardinalidades. A eso se debe el $_0$ de $\aleph_0$, y por eso es que hay todo un desfile de alephs: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, alephcétera.

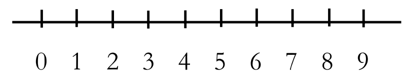
Hasta aquí tenemos, pues, otra forma de entender a la pregunta que nos ocupa "¿qué es el número?". Pero como ocurrió antes, el panorama es más amplio, así que tenemos que traer a Dedekind de su camerino.

2

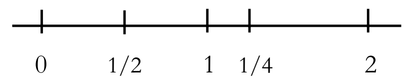
Julius Wilhelm Richard Dedekind nació en Burnswick, allá por el sexto día del décimo mes de MDCCCXXI y murió en MCMXII en su segundo mes en su decimosegundo día (perdona por no anotar la hora pero no la sé). A él no le fue como a Cantor; a Cantor le fue de a feria y a Dedekind como en feria.

La parte que nos interesa de su trabajo corresponde a unos ensayos sobre la teoría de números que publicó en 1872. Interesado sobre la noción de continuidad, estableció una comparación tomando como base a la recta numérica.

Llamémosle L a la recta numérica. En L hay un punto por cada número natural.



Hay también un punto por algunos racionales (fracciones racionales: ½, ¼, por ejemplo).



Pero no hay un punto por cada uno de los racionales. En otras palabras, en L hay agujeros. Vamos, entre dos racionales siempre hay otro racional, lo que forma un conjunto denso pero con huecos. Esto llevaba a la necesidad de crear nuevos números que llenaran esos huecos y dieran a L compleción o continuidad. ¿Y cómo llenar esos agujeros? ¿cómo saber que se llena la recta y que ya no hay huecos? Dedekind propone las cortaduras... y en honor a él, aquí le corto.

Como te das cuenta, tenemos ahora otra forma más de entender qué es el número. Y como el panorama es aún más amplio, convocamos a Peano para que entre a escena.

3

A diferencia de Leibniz, Dedekind, Cantor, Kronecker y Weierstrass, que nacieron en la tierra de BBB (Bach, Beethoven, Brahms), Peano vio la luz por vez primera en la tierra del *spagghetti*, del Papa y de Silvester Stallone. Entre otras cosas, Peano fue el primero en emplear los símbolos $\subset$, $\in$, así como el de unión e intersección. Pero lo que aquí más nos interesa de

Peano son sus postulados, que aparecieron publicados en su artículo de 1891, *Sul concetto di numero*. Aunque es necesario aclararte que su notación definitiva toma forma en 1901.

Los postulados fueron redactados en italiano y he aquí la traducción de los cuatro primeros:

0) $0 \in Cls$;
1) $0 \in N_0$;
2) $a \in N_0 \cdot \supset \cdot a^+ \supset N_0$, donde a es idéntico a $a + 1$;
3) $S \in Cls \cdot 0 \cdot \in S : x \in S \cdot \supset_x S \cdot x^+ \in S : \supset \cdot N_0 \supset S$;

Ya sé, ya sé; sigue estando en italiano. Para que nos entendamos, aquí está la versión en español decente.

0) Los números naturales forman una clase;
1) Cero es un número;
2) Si *a* es un número, su sucesor también es un número;
3) Sea *S* una clase y 0 un elemento de esa clase tal que si *x* es un número que pertenece a *S*, entonces para cualquier *x* su sucesor pertenece también a la clase; entonces, todo número está en *S*. Por cierto, a este postulado se le conoce como "principio de inducción".

Sí, otra vez; ya sé. Sigue estando en italiano. Pero veamos en castellano algunas de las muchas cosas importantes que podríamos señalar de esto:

• Peano comienza a partir del cero y no del uno.

• Destaca la idea de construir los números a través del sucesor, es decir, la posibilidad de construir la serie de números ocupando la sencilla y simple idea de $a= a+1$ (si alguna vez has programado, recordarás qué útil resulta esta idea).

• El otro detalle importante es que, mediante el principio de inducción, algunas cosas que valen para un número natural pequeño como el 1, valen para un número grandote como el 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 o más.

Veamos una aplicación de esto último. Pongamos que el gobierno de Nopalandia es nuevo y decide acuñar su moneda. Hacer monedas cuesta mucha moneda, así que hay que idear una forma en que se acuñe la moneda necesaria y a la vez que sea suficiente para las necesidades del país. ¿Qué denominaciones hacer? A alguien se le ocurre que tres: un baro, dos baros y tres baros. La pregunta es si serán los necesarios y los suficientes para formar cualquier otra cantidad. He aquí la prueba.

Cantidad en baros	Combinación de las denominaciones
1	1
2	2
3	3
4	2 + 2
5	2 + 3
6	3 + 3
7	2 + 2 + 3
8	2 + 3 + 3
9	3 + 3 + 3
10	2 + 2 + 3 + 3
11	2 + 3 + 3 + 3
12	3 + 3 + 3 + 3
13	2 + 2 + 3 + 3 + 3
14	2 + 3 + 3 + 3 + 3
15	3 + 3 + 3 + 3 + 3
16	2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3

¿Será necesario seguir haciendo esta comprobación? ¿En qué número tendríamos que detenernos? He aquí, en vivo y a todo color, la importancia del principio de inducción.

Como te habrás dado cuenta, a estas alturas, eso de que tenemos forma de entender qué es el número, ya suena a vacilada. Pero tómalo con tranquilidad, porque nos falta la parte fuerte: Frege.

4

Al contrario de Cantor, que gozó de fama, Frege, igual que Dedekind, no fue aceptado ni reconocido en su época (fíjate en otro mito, habría dicho José Javier: que cada filósofo era importante en su época; a unos ni los pelaban).

Friederich Ludwig Gottlob Frege nació en 1848. El tipo no apantallaba: era bajo, bastante tímido, extremadamente introvertido, y apenas miraba a sus auditorios, que generalmente fueron poco numerosos. Para muestra, un botón: en una ocasión, allá por 1913, llegó a tener sólo tres alumnos, y para colmo, uno de ellos era un comandante jubilado del ejército, aficionado a estudiar las nuevas ideas en matemáticas. Esto en la Universidad de Jena, donde dedicó su vida adulta a dar clases de matemáticas.

Profesionalmente, no le fue bien. A lo máximo que llegó, y eso más o menos a los sesenta años (es decir, allá por 1913), fue a *Professor Extraordinarius* (algo así como profesor asociado o suplente). Su obra fue prácticamente desconocida en Alemania; ni los matemáticos ni los filósofos le prestaban atención. Frege padeció el silencio de sus contemporáneos en torno a su trabajo. Ni siquiera hubo editorial que estuviera dispuesta a publicar lo que constituiría su obra principal, los dos volúmenes de los *Grundgesetze der Arithmetik*.

En ese tiempo otro alemán andaba pisando fuerte en la filosofía: Edmund Husserl (1859-1938) y su fenomenología. Sí ya sé, no protestes; a mí también me pareció una palabra extraña esa fenomenología... Bueno, sigamos. En 1981, Husserl presentó sus ideas respecto a cómo se forman los números en su *Philosophie der Arithmetik*, mejor dicho, cómo se forma la idea del número. Según Husserl, el concepto de número se forma a partir del concepto de multiplicidad. Esta idea, la de multiplicidad, se desprende a su vez de la comparación de complexos concretos, es decir, totalidades cuyas partes están conectadas colectivamente. Para no hacernos bolas, consideremos que una totalidad es una silla, que una totalidad es un escritorio o lo es un pizarrón. Así, aunque la silla está formada por madera, clavos y pintura, como silla es una totalidad. Ahora, ¿cómo representamos la conexión entre esas totalidades? Pues diciendo: "En el salón hay una butaca, un escritorio y una pizarra", que es lo mismo a que dijéramos: "hay una butaca y un escritorio y una pizarra". En otras palabras, la forma en que se representa la conexión es mediante la 'y'. Pero hay que advertir que esta conexión consiste única y exclusivamente en el acto de unir. Así, a partir de cada conexión colectiva de contenidos, concretamente dada, llegamos al número que corresponde al complexo en cuestión al abstraer de "algo y algo y algo y...", y llegar a "uno y uno y uno y..."

Claro, Frege considera que esta explicación de Husserl era simple. Es decir, un simple intento para justificar un tipo de interpretación del número que es ingenua, valiéndose para ello de un lenguaje que pretendía ser científico. Este Frege no se andaba con "ay, pobrecito de Husserl, mejor no lo critico". Bueno, tampoco Husserl, que criticó los *Grundlagen der Arithmetik* de Frege, diciendo que tenían sus asegunes. Pero Frege, que por cierto le intelegía más a eso de los números, hizo notar algunos de los errores que Husserl cometió en esas interpretaciones ingenuas. Por ejemplo, la bronca que se armaría con los números grandes. Para hacer notar el otro asegún, se sirvió del análisis del lenguaje.

El primer paso que dio Frege y que consideró fundamental, fue clarificar el carácter de los enunciados numéricos. Ajá, ¿pero qué es un enunciado numérico? "Tengo una muela picada" es un enunciado numérico, como lo son: "El Guadalajara y el América son dos equipos tradicionales", "he tenido veinte novias en dos semanas" o "van cinco novios que me espanta el mula de mi hermano".

Ahora bien, según Husserl, los enunciados numéricos corresponden a la pregunta 'cuántos'. "Y aquí está el detalle", diría Frege, si hubiera conocido a Cantinflas: si recordamos la idea de Husserl de "uno y uno y uno y...", la expresión "Guadalajara y América son dos", no pueden ser respuesta a 'cuántos', pues no preguntamos "¿cuántos son Guadalajara y América?", sino "¿cuántos son los equipos tradicionales en México?"

Y con esto llegamos a algo importante: para tener acceso a lo que son las matemáticas y específicamente a lo que es el número, lo que tenemos que saber es qué decimos cuando decimos "¿qué es el número?". A partir de esto muchos consideraron que Frege estudió lingüística o alemán porque se interesó en el lenguaje, pero trató de saber qué queremos saber cuando decimos "¿qué es el número?".

Bueno, ¿y cuál fue la respuesta de Frege? Pues ésta: se confunde al número con el numeral. 1, 2, 3, 4... son numerales, es decir, son nombres. Como 'José Javier' es el nombre de José Javier, o 'punto' es el nombre de ·, o 'ayer' es el nombre del día anterior. Es decir, a todo nombre hay asociados un significado (*Sinn*) y un denotado (*Bedeutung*). Entonces, 1, 2, 3, 4... son nombres, sí, ¿pero nombres de qué? Es decir, ¿cuál es su denotado? Porque habrás visto muchos 5 (numerales, ¿acaso en tus calificaciones?), pero nunca has visto un mugre 5. ¿O sí?

Pero como diría Michael Ende, uno de los autores predilectos de José Javier, eso forma parte de otra historia.

Bibliografía

Bachelard, G. (1984). *La filosofía del no. Ensayo de una filosofía del nuevo Espíritu Científico*. Amorrortu, Buenos Aires.

Carnap, R. (1992). *Autobiografía intelectual.* Paidós, Pensamiento Contemporáneo 23, Barcelona.

Collette, Jean-Paul (1998). *Historia de las matemáticas 2.* Siglo XXI, México.

Díaz, J. L. (1997). "Número y forma: la danza de Pitágoras", *El ábaco, la lira y la rosa.* FCE, La ciencia para todos 152, México.

Frege, G. (1892). "Sobre el sentido y la denotación", *Semántica filosófica* (Tomás Moro S). Siglo XXI, Argentina.

Guthrie, W. K.C. (1991). *Los filósofos griegos de Tales a Aristóteles.* Breviarios 88, FCE, México.

Kasner, E. y Newman, J. (1987). *Matemáticas e imaginación I.* Biblioteca científica 70, Salvat, Barcelona.

Leibniz, G. W. (1986). *Generales inquisitiones de analysi notionum et veritatum.* Investigaciones generales sobre el análisis de las nociones y las verdades. Versión castellana: Beuchot, M., y Herrera-Ibañez, A. , IIF-UNAM, Estudios clásicos, México.

Russell, B. (1905). *"On denoting"* Versión castellana de Moro, S. Tomás "Sobre el denotar", *Semántica filosófica.* Siglo XXI, Argentina.

Sánchez Pozos, J. Javier (1989). "Principios generales de una teoría fregeana del nombre para la lógica formal", *Signos*. Anuario de Humanidades. Historia y Filosofía. Tomo II, UAM-Iztapalapa, México.

Thiel, C. (1972). *Sentido y referencia en la Lógica de Gottlob Frege.* Técnos, Madrid.