

Mauricio Paulin, Máximo Agüero Granados  
Analogía mecánica de la autointeracción no-lineal de campos  
Ciencia Ergo Sum, vol. 7, núm. 2, julio, 2000  
Universidad Autónoma del Estado de México  
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10401807>



*Ciencia Ergo Sum*,  
ISSN (Versión impresa): 1405-0269  
[ciencia.ergosum@yahoo.com.mx](mailto:ciencia.ergosum@yahoo.com.mx)  
Universidad Autónoma del Estado de México  
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

[www.redalyc.org](http://www.redalyc.org)

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Analogía mecánica de la autointeracción no-lineal de campos

MAURICIO PAULIN\* Y MÁXIMO AGÜERO\*

Recepción: 20 de enero de 1999

Aceptación: 13 de agosto de 1999

## Mechanical Analogy of the Selfinteraction's Nonlinear Fields

**Abstract.** *In this contribution we analyze particle like soliton solutions of the two important models of classical nonlinear field theory the so named:  $\varphi^4$ - and  $\varphi^6$ - model. These solutions are studied considering the trivial and condensate type of boundary conditions, that means the field is zero or is equal to a constant value at infinity. The phase trajectories of solitons are studied for both models. By using the virial theorem and considering the mechanical analogy of the nonlinear dynamics, upon the boundary condition of two types, we acquired some fundamental characteristics of these models.*

## Introducción

En los sistemas lineales, los modos de oscilación de un paquete de ondas pueden superponerse. Precisamente este principio de superposición es una de las principales características de los sistemas lineales; por ello, la falta de este principio complica el estudio de los sistemas no-lineales. En sistemas lineales, un paquete de ondas que inicia una interacción se deteriora con el transcurso del tiempo debido a que sus componentes viajan con diferentes velocidades, es decir, la onda se dispersa por el espacio. La no-linealidad plantea nuevos problemas: requiere métodos diferentes y los sistemas no-lineales exhiben comportamientos fuera del contexto común. Así, métodos perturbativos para analizar comportamientos no-lineales fallan en muchos casos, pues para varios fenómenos la aproximación lineal no es adecuada para la explicación de sus diversos comportamientos.

Las ondas solitarias (solitones) que aparecen en sistemas no-lineales juegan un papel importante en una gran cantidad de problemas de la física. A las ondas solitarias que emergen de una interacción sin cambio de forma ni velocidad, Zabusky

y Kruskal le dieron el nombre de *Solitons* (Makhankov, 1990). Si bien la definición de solitón en la literatura es muy variada, la que adoptaremos es la siguiente: “Solitón es una configuración de campo distinta del vacío, que es solución de una ecuación diferencial o integro-diferencial no-lineal la cual deberá tener energía finita con densidad de energía localizada”. Estas soluciones solitónicas son usadas para describir varios fenómenos: ferromagnetismo o barreras de campos ferroeléctricos, dislocación, óptica, física de plasmas, superconductividad, cambio de fase, dinámica de macromoléculas de ADN, enroscamientos de cadenas de polímeros, cosmología, etcétera.

En este contexto, el objetivo del trabajo es estudiar ciertos tipos de soluciones estáticas de las ecuaciones de movimiento correspondientes a las teorías  $\varphi^4$  y  $\varphi^6$ , con el fin de encontrar la interrelación existente entre estas soluciones y las propiedades de partículas puntuales que comúnmente se analizan en mecánica clásica. Las ecuaciones en la variedad espacio-temporal de 1+1 dimensiones que se analizarán son:

1. Ecuación no-lineal de Klein-Gordon con acoplamiento inarmónico.

$$\varphi_{tt} - [C_l + 3C_{nl}\varphi_x^2]\varphi_{xx} - 2V_0(\varphi - \varphi^3) = 0, \quad (1)$$

donde  $C_l$ ,  $C_{nl}$ ,  $V_0$  son los parámetros relevantes del sistema.

2. Ecuación no-lineal cúbica-quinta de Schrödinger

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - [3|\varphi|^2 - (2A + \rho_0)](|\varphi|^2 - \rho_0)\varphi = 0, \quad (2)$$

$A$  y  $\rho_0$  son los parámetros del modelo. Es fácil demostrar que la ecuación anterior depende sólo de la combinación  $\frac{A}{\rho_0}$ , por lo que sin pérdida de generalidad podemos hacer  $\rho_0 = 1$ .

\*Este artículo forma parte de la tesis de licenciatura de Mauricio Paulin “Estructuras solitónicas en ciertos modelos no-lineales”. Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. Instituto Literario No. 100, C. P. 50000. Toluca, México. Teléfonos: (729) 655 54 y 655 56. Correo electrónico: mag@coatepec.uaemex.mx

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la primera sección se presenta un método general para abordar el problema de la analogía mecánica de soluciones estáticas de teorías no-lineales de campos; después, en las dos siguientes secciones se analizarán por separado los modelos  $\varphi^4$  y  $\varphi^6$ , con el estudio de las trayectorias de fase de las partículas análogas puntuales; estos últimos, a su vez, constituyen mapeos de las soluciones estáticas solitónicas. En la última sección se presentan las conclusiones.

### I. Método general

La analogía mecánica es actualmente un método eficaz para estudiar el comportamiento no-lineal de soluciones estáticas de ecuaciones diferenciales no-lineales de campo. Veamos, en términos generales, en qué consiste el método.

Sea que tengamos un campo escalar  $\phi(\vec{x}, t)$  cuyo Lagrangiano tiene la forma

$$L = \int d\vec{x} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U(\phi) \right],$$

donde el potencial  $U(\phi)$  posee una cota inferior. En lugar de un número discreto finito de grados de libertad  $x_1, \dots, x_n$  ahora tenemos una variedad continua, por lo que el número de grados de libertad será infinito, es decir, el valor del campo  $\phi$  en cada punto  $x$ . La densidad del Lagrangiano se puede escribir como

$$L = T[\phi] - V[\phi] \tag{3}$$

donde la *energía cinética* tendrá la forma

$$T[\phi] = \frac{1}{2} \int d\vec{x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2$$

y la *energía potencial* se escribirá así

$$V[\phi] = \int d\vec{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right].$$

Por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange será

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = - \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(\vec{x}, t)} \tag{4}$$

donde la derivada funcional está situada a la derecha.

Las soluciones estáticas de la ecuación (4) son extremos del potencial con respecto al campo  $\phi$ , y como es obvio, satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(\vec{x}, t)} = 0 \tag{5}$$

1. Consideramos en un primer momento un espacio-tiempo bidimensional 1+1, es decir, estaremos trabajando con una coordenada espacial  $x$  y una temporal  $t$ . Cuando se analizan soluciones estáticas, la ecuación (5) obviamente se transforma en

$$\phi''(x) \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi}. \tag{6}$$

Esta relación es una ecuación diferencial de segundo orden. Ahora bien, si hacemos que la variable  $x$  juegue el mismo papel como si fuera el “tiempo”  $\tau$ , y el campo  $\phi$  como si fuera una “coordenada” espacial  $\xi$  de una partícula de masa unitaria, entonces la ecuación (6) representa la segunda ley de Newton para el movimiento de cierta “partícula análoga”  $\xi$  en un potencial dado por  $-U(\xi)$ . Dicho de otra manera, lo que hacemos es el siguiente mapeo  $\phi \rightarrow \xi, x \rightarrow \tau$ .

A diferencia de la ecuación de Newton de la mecánica clásica, la ecuación (6) tiene el signo positivo en su parte derecha. Como ya lo mencionamos, la solución  $\phi(x)$  en la ecuación (6) determina el movimiento de la “partícula análoga”  $\xi$ . La densidad de energía para este movimiento será

$$W \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - U(\phi).$$

Entonces, la energía total del campo para una solución estática tendrá la forma

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + U(\phi) \right] dx.$$

El caso interesante será el estudio del comportamiento de la solución estática o de la *partícula análoga* cuando el potencial  $U(\phi)$  tenga algún *minimum*, lo que correspondería a un *maximum* para la partícula análoga. Como es conocido por la mecánica clásica, cuando se tiene un mínimo en el potencial el movimiento de la partícula es trivial, es decir, que cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , “la partícula análoga” estará acercándose hacia el máximo de su potencial. Obviamente este caso representa una solución inestable, que requiere algún mecanismo adicional para estabilizarse, pero si el sistema posee otros mínimos degenerados locales o absolutos, entonces el comportamiento de las soluciones tendrá otro carácter. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos mínimos degenerados  $\phi_1$  y  $\phi_2$  del potencial  $U(\phi)$ ; cuando la solución evoluciona con el “tiempo”  $\tau$  es posible observar el siguiente comportamiento: cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ , entonces  $\phi \rightarrow \phi_1$ , y cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , tendremos  $\phi \rightarrow \phi_2$  (el comportamiento podría haberse realizado también en sentido con-

trario). Este tipo de solución enlaza dos mínimos degenerados y se le denomina *solitón topológico*. La “partícula análoga” correspondiente a este solitón se comportaría deslizándose en el “infinito pasado” desde la cima (denotado por  $\phi_1$ ) hasta llegar en el “infinito futuro” a la otra cima del potencial  $\phi_2$ . La diferencia de los valores de campo cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$  proporciona el valor de la carga topológica de la solución solitónica (Agüero, 1998).

2. La forma más general de la ecuación no-lineal de Schrödinger en  $D$  dimensiones espaciales cuando se tiene simetría cilíndrica o esférica, tiene la siguiente forma

$$r^{1-D} \frac{d}{dr} \left( r^{D-1} \frac{d}{dr} \phi \right) - k^2 \phi + b\phi^{p-1} - c\phi^{q-1} = 0 \quad (7)$$

al considerar  $\partial_t \phi = 0$ . Como caso particular se obtiene la ecuación cúbica-quinta al hacer  $p = 4$  y  $q = 6$ , por lo que tenemos:

$$\phi'' + \frac{D-1}{r} \phi' - k^2 \phi + \phi^3 - \phi^5 = 0. \quad (8)$$

Analicemos esta ecuación con más detalle. Multiplicando por  $\phi'$  e integrando, obtenemos

$$\left( (\phi')^2 - k^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^4 - \frac{1}{3} \phi^6 \right)' = \frac{D-1}{r} (\phi')^2; \quad (9)$$

con energía potencial  $U_p$  y energía total  $E$ , respectivamente

$$U_p = \frac{1}{2} \left[ -k^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^4 - \frac{1}{3} \phi^6 \right],$$

$$E = \frac{1}{2} (\phi')^2 + U_p.$$

De la ecuación (9) se deduce lo siguiente: al considerar el valor del campo  $\phi$  en el punto  $r$  como la posición de una partícula puntual  $\xi$  de masa igual a la unidad, en el instante  $\tau$ , moviéndose en un potencial externo  $U(\xi)$  bajo la acción de una fuerza de fricción,  $F_f = -(D-1)\xi\tau / \tau$ , entonces, la solución  $\phi(r)$  de la ecuación 8 describe la trayectoria de la partícula  $\xi(\tau)$ .

En dimensiones espaciales  $D > 1$ , la relación (9) representa a la ecuación de disipación de la energía, y para el caso de una dimensión espacial  $D = 1$  será la ecuación de conservación de energía de la “partícula análoga”. Entonces, para este último caso, la ecuación de movimiento será

$$\xi'' = \frac{\partial^2 U_p}{\partial \xi^2} = \frac{\partial U_p}{\partial \xi}.$$

Tenemos aquí a la ecuación de Newton para la partícula  $\xi$ , pero con signo contrario en su parte derecha. La densi-

dad de energía de la “partícula análoga” que se conserva con el tiempo  $\tau$  es descrita por la ecuación

$$W = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[ -k^2 \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^4 - \frac{1}{3} \xi^6 \right] \quad (10)$$

Las soluciones que investigaremos a partir del método de la analogía mecánica están determinadas por las siguientes condiciones físicas de frontera del sistema.

a) Soluciones tipo partículas (también llamadas “gotas”). Estas soluciones satisfacen:  $\phi \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

b) Soluciones tipo ondas solitónicas que pueden ser, a su vez, de dos formas: kink o escalón y burbuja, cuyas condiciones de frontera son del tipo condensado:  $\phi \rightarrow \phi_0$ , cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , donde  $\phi_0$  es un valor constante de campo.

## II. Modelo $\phi^4$

Analicemos primero un sistema simple discreto que ha sido un modelo donde se han encontrado soluciones solitónicas tipo compactones (Dusuel *et al.*, 1998). Supongamos que tenemos una serie de partículas cuyo comportamiento está modelado por un sistema del tipo Klein-Gordon. Las partículas pueden estar acopladas por el potencial de interacción  $U(\theta_{n+1} - \theta_n)$  y sujetas a un potencial no-lineal del sustrato en cada punto  $V(\theta_n)$ . La magnitud  $\theta_n(t)$  es el grado de libertad en cada punto, que representa el resultado de la influencia de los demás átomos en la red y efectos externos.

Consideramos ahora el potencial no-lineal del sustrato de la forma

$$V(\varphi_n) = \frac{V_0}{2} (1 - \varphi_n^2)^2 \quad (11)$$

y el potencial de interacción

$$U(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \frac{C_l}{2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2 + \frac{C_{nl}}{4} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^4. \quad (12)$$

Aquí  $V_0$ ,  $C_l$  y  $C_{nl}$  son constantes que controlan la barrera de potencial de doble pozo y las fuerzas de acoplamiento lineal y no-lineal respectivamente. La ecuación de movimiento para el caso general será

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - [U'(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - U'(\varphi_{n-1} - \varphi_n)] + V'(\varphi_n) = 0. \quad (13)$$

Sustituyendo aquí los valores de los potenciales para la  $n$ -ésima partícula tendremos

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = C_l (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n) + C_{nl} [(\varphi_{n+1} - \varphi_n)^3 + (\varphi_{n-1} - \varphi_n)^3] + 2V_0 (\varphi_n - \varphi_n^3). \quad (14)$$

Cuando las interacciones  $U'$  entre partículas son lineales, las soluciones tipo kink pueden ser calculadas exactamente en el límite continuo. De la ecuación discreta (13) los kinks pueden ser obtenidos por aproximación de perturbación o por métodos numéricos. Cuando  $U'$  incluye interacciones inarmónicas, ciertos modos internos específicos de vibración pueden ser creados. Cuando  $U'$  es no-lineal, el caso se torna interesante porque su acción sobre el sistema podría verse afectado por la presencia de términos dispersivos. Recientemente, para este caso, Rosenau y Hyman (Dusuel *et al.*, 1998) encontraron soluciones tipo ondas solitarias pero compactas. Como estas soluciones solitónicas robustas se caracterizan por la ausencia de colas infinitas, han sido denominadas *compactones*.

Para el caso límite  $2V_0 \gg C_l$  y haciendo que  $C_{nl}\phi_n$  varíen lentamente de un sitio a otro, puede usarse la aproximación estándar continua  $\phi_n(t) \rightarrow \phi(X, t)$  y extender  $\phi_{n \pm 1}$ . Bajo estas condiciones, haciendo  $x = \frac{X}{a}$  (que es la medida de la distancia  $X$  en unidades de la distancia entre los puntos discretos de la red  $a$ ) y asumiendo que  $3C_{nl}\phi_x^2\phi_{xx} \gg \left(\frac{C_l}{12}\right)\phi_{xxxx}$ , de la ecuación (14), se obtiene

$$\phi_{tt} - C_l\phi_{xx} + 3C_{nl}\phi_x^2\phi_{xx} - 2V_0(\phi - \phi^3) = 0. \quad (15)$$

Se puede notar que  $C_l$  representa el cuadrado de la velocidad de onda lineal. Para  $C_{nl} = 0$ , la ecuación se reduce al modelo continuo de  $\phi^4$  con acoplamiento lineal, el cual admite soluciones tipo kinks de la forma *tanb*. Ahora, para el caso de onda viajera es necesario escribir su forma estándar:

$$\phi(s) = \phi(x - ut), \text{ tal que}$$

- a)  $\phi \rightarrow \pm 1$ , y
- b)  $\phi_s \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \pm\infty$ , (16)

donde  $s$  es la nueva variable dependiente de la velocidad de propagación  $u$ .

Regresamos, entonces, a la ecuación (1), la integramos con respecto a  $\phi$ , tomamos en consideración las condiciones de frontera citadas y obtenemos

$$\phi_t^2 - C_l\phi_x^2 - 3C_{nl}\phi_x^4 - 2V_0\left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{4}\right) + \frac{V_0}{2} = 0. \quad (17)$$

Al hacer uso de la relación (ecuación 16) simplificamos la ecuación anterior considerando  $\phi_t = -u\phi_s$ ,  $\phi_x = \phi_s$ , con el siguiente resultado

$$(u^2 - C_l)\phi_s^2 - 3C_{nl}\phi_s^4 + \frac{V_0}{2}(1 - \phi^2)^2 = 0 \quad (18)$$

Esta ecuación puede integrarse cuando  $u^2 - C_l = 0$ . Por lo tanto, tendremos dos casos: a) si  $C_l = 0$  (acoplamiento lineal

cero, por lo que no existirán ondas lineales) entonces  $u = 0$ ; b)  $u = \pm\sqrt{C_l}$ , la solución correspondiente es del tipo kinks con soporte compacto o compactones. Para este último caso tendremos

$$\phi_s = \pm\left(\frac{V_0}{6C_{nl}}\right)^{\frac{1}{4}}(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto,

$$\phi(x) = \pm \text{sen}\left[\left(\frac{V_0}{6C_{nl}}\right)^{\frac{1}{4}}(x - x_0)\right]. \quad (19)$$

Donde  $|x - x_0| < 1$  y  $\phi = \pm 1$ .  $x_0$  define la posición del centro del kink. Para el caso  $s = x - \sqrt{C_l}t$  tenemos

$$\phi(x) = \pm \text{sen}\left[\left(\frac{V_0}{6C_{nl}}\right)^{\frac{1}{4}}(s - s_0)\right] \quad (20)$$

donde  $|x - \sqrt{C_l}t| < 1$ , y  $\phi = \pm 1$ . A partir de las ecuaciones (19) y (20) se calcula toda la anchura del paquete de onda, la cual, para ambos casos, es igual a  $L = \pi\left(\frac{C_{nl}6}{V_0}\right)^{\frac{1}{4}}$ . Consecuentemente, cuando existe un acoplamiento no-lineal  $C_{nl}$  puede obtenerse una solución estática, pero cuando ambos acoplamientos (lineal y no-lineal) están presentes, puede descubrirse la existencia de una solución solitónica dinámica con velocidad  $\sqrt{C_l}(-\sqrt{C_l})$ .

Como es fácil de comprobar, el hamiltoniano que da origen a la ecuación 1 es

$$H = \sum_n \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + U(\phi_{n+1} - \phi_n) + V(\phi) \quad (21)$$

En la aproximación continua, usando (11) y (12), es posible calcular la energía total localizada en el paquete de onda viajera a velocidad  $\sqrt{C_l}$  mediante la siguiente expresión

$$E_{total} = \int_{-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}\gamma} \left[ \frac{1}{2}\phi_t^2 + \frac{1}{2}C_l\phi_x^2 + \frac{1}{4}C_{nl}\phi_x^4 + \frac{1}{2}V_0(1 - \phi^2)^2 \right] dx, \quad (22)$$

$$E_{total} = a\gamma\frac{\pi}{2}\left[C_l + 3\left(\frac{C_{nl}}{2} + V_0\right)\right] + \frac{a}{\gamma}\left[C_l\text{sen}(\gamma^2\pi) + \frac{1}{8}\left(\frac{C_{nl}}{+V_0}\right)\left(2\text{sen}(\gamma^2\pi) + \frac{1}{4}\text{sen}(2\gamma^2\pi)\right)\right].$$

En el caso de onda estática  $u = \sqrt{C_l} = 0$ , obtenemos

$$E_{total}^* = a\gamma\frac{\pi}{2}\left[3\left(\frac{C_{nl}}{2} + V_0\right)\right] + \frac{a}{\gamma}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{C_{nl}}{+V_0}\right)\left(2\text{sen}(\gamma^2\pi) + \frac{1}{4}\text{sen}(2\gamma^2\pi)\right)\right],$$

donde  $\gamma = \left(\frac{V_0}{6C_{nl}}\right)^{\frac{1}{4}}$ , y es evidente que la energía está estrictamente localizada.

Como es conocido, un kink con sus característicos brazos o colas infinitas puede interactuar a larga distancia con un antikink; en el caso del compactón la interacción es más local, por lo que interactuará con un antcompactón sólo si hacen contacto directo en el mismo camino. Este fenómeno es muy similar al que se produce cuando chocan esferas duras en mecánica clásica o en física estadística.

La ecuación (17) también soporta otro tipo de solución, la cual se obtiene usando condiciones de frontera de la siguiente forma  $\varphi \rightarrow 0$  y  $\varphi_s \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \pm\infty$ . De acuerdo con estas condiciones, la constante de integración es cero, por lo tanto obtenemos

$$\varphi_l^2 - C_l \varphi_x^2 - 3C_{nl} \varphi_x^4 - 2V_0 \left( \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{4} \right) = 0 \quad (23)$$

Si integramos esta ecuación al caso  $(u^2 - C_l) = 0$ , entonces,

$$\int \frac{d\varphi}{\left(\frac{\varphi^4}{4} - \frac{\varphi^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}}} = \int \left(\frac{2V_0}{3C_{nl}}\right)^{\frac{1}{4}} dx. \quad (24)$$

Esta relación se puede simplificar aún más mediante el uso sucesivo de cambio de variables; así se observa que

$$x(\varphi) - x_0 = \sqrt[4]{2} \left(\frac{2V_0}{3C_{nl}}\right)^{-\frac{1}{4}} \left[ \text{ArcTanh} \left(1 - \frac{2}{\varphi^2}\right)^{\frac{1}{4}} - \text{ArcTang} \left(1 - \frac{2}{\varphi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (25)$$

o en términos de la función hypergeométrica  $F(a, b, c, z)$ ,

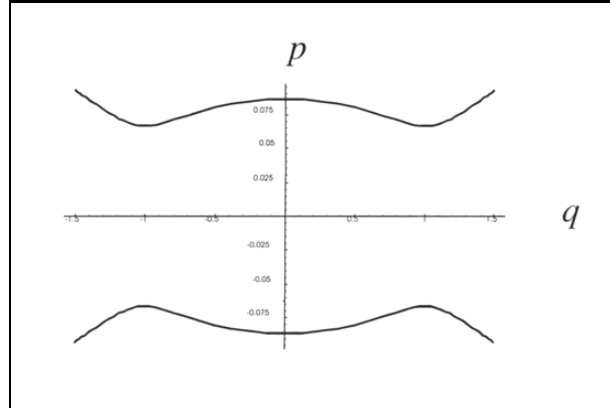
$$x(\varphi) - x_0 = \left(\frac{2V_0}{3C_{nl}}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{2\varphi \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{\varphi^2}{2}\right)}{\left(-\varphi^2 + \frac{\varphi^4}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

La inversa de la función de posición  $x(\varphi)$  (ecuación 25), es la solución  $\varphi(x)$  de la ecuación (23) que “vive” en el máximo relativo del potencial.

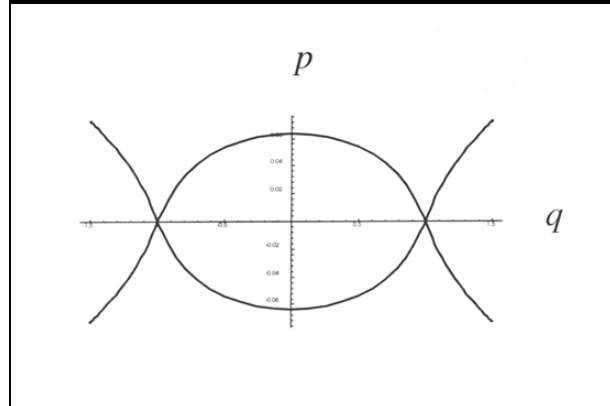
### 1. Trayectorias de fase del modelo $\varphi^4$

La ecuación (18) permite obtener la trayectoria de fase de las soluciones tipo kinks y de tipo oscilatorio en una determinada región. Como es bien conocido, las trayectorias de fase de los solitones están representadas por las llamadas separatrices. Los respectivos coeficientes para la representación numérica de las trayectorias de fase son:  $\mu^2 = 350$ ,  $C_l = 208$ ,  $C_{nl} = 14$ ,  $500$ ,  $V_0 = 2$ . La trayectoria de fase con las condiciones de

**FIGURA 1A. REPRESENTACIÓN DE LA TRAYECTORIA DE FASE TIPO KINK CUANDO  $u^2 > C_l > 0$ .**



**FIGURA 1B. TRAYECTORIA DE FASE CORRESPONDIENTE AL CASO  $u^2 < C_l$ .**



frontera (ecuación 16) da indicaciones para deducir la existencia de soluciones tipo kinks, en vista de que esta trayectoria de fase es idéntica a la trayectoria común que soportan kinks (figura 1a y figura 1b).<sup>1</sup>

Ahora veamos el caso del potencial estándar correspondiente al modelo de  $\varphi^4$  dado por la ecuación (11). El potencial puede reescribirse como

$$U = -W = \frac{V_0}{2} (1 - \xi^2)^2. \quad (26)$$

Analizaremos con la analogía mecánica las características de la solución tipo kink para este potencial. La dinámica de la partícula se determina por el potencial  $W$  con la siguiente condición de frontera:  $\partial\xi/\partial\tau \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Este potencial tiene dos máximos absolutos en  $\xi = \pm 1$  y un míni-

1. En las gráficas presentadas se hace el cambio común de variables:  $\varphi_s = p, \varphi = q$ .

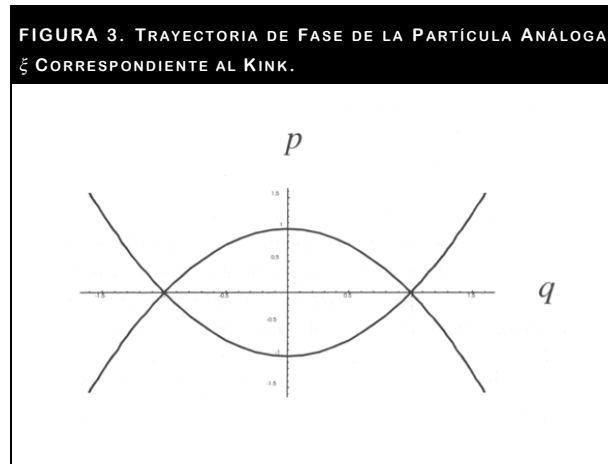
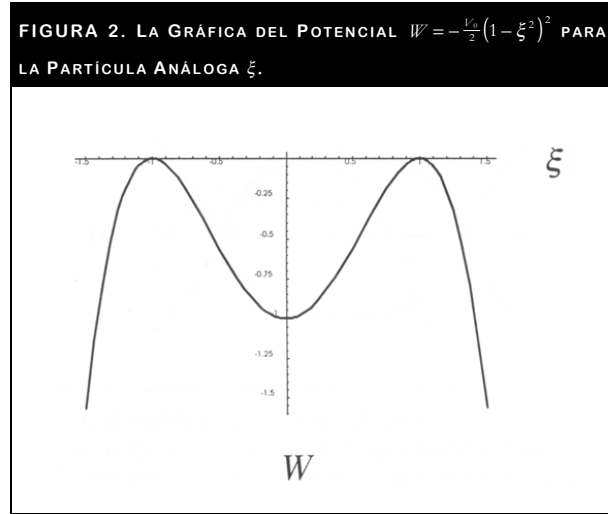
mo relativo en  $\xi = 0$  (figura 2). Al iniciar su movimiento en cualquiera de los máximos, la “partícula análoga” podrá terminar su movimiento en el otro; esta solución corresponde a la solución estática tipo kink, cuyo espacio fase correspondiente al potencial  $W$  (ecuación 26) se describe por la ecuación

$$(\xi')^2 = V_0(1 - \xi^2)^2$$

(véase figura 3) en donde  $\xi' = p$ ,  $\xi = q$ . Del potencial que surge en el estudio de la solución inestable (ver ecuación 23 para el campo) se obtiene el potencial inverso correspondiente a la partícula análoga

$$W = -(\xi^4 / 4 - \xi^2 / 2).$$

Este potencial soporta una partícula análoga estática (ecuación 23) que “vive” en el mínimo situado en  $\xi = 0$ . Como la



partícula análoga está situada en el mínimo, entonces es de esperar que sea estable bajo la influencia de pequeñas perturbaciones.

### III. Modelo $\varphi^6$

En el caso no-relativista, a la ecuación que gobierna el comportamiento del modelo  $\varphi^6$  se le llama también ecuación no-lineal cúbica-quinta de Schrödinger (ENCQS). Esta ecuación es una de las más importantes (históricamente) en la física de materia condensada, tiene numerosas aplicaciones en óptica, dinámica de fluidos, ingeniería, biología, química y matemáticas aplicadas. La similitud con la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica es evidente, pero solamente en la forma. La esencia y las implicaciones físicas de ambas son muy diferentes. Esta ecuación cúbica-quinta aparece, por ejemplo, en hidrodinámica nuclear con fuerzas efectivas de Skyrme y tiene la forma cuasiclásica ya conocida (Makhankov *et al.*, 1989):

$$i\psi + \nabla\psi + \alpha\psi + \psi(|\psi|^2 - |\psi|^4) = 0. \tag{27}$$

Usando la transformación,

$$\psi(x, t) = \sqrt{\rho} \exp\{i\theta(x, t)\}$$

$$\rho = |\psi|^2, \quad v = \partial_x \theta$$

la ecuación 27 se reduce a un sistema de ecuaciones usado en la hidrodinámica nuclear

$$\partial_t \rho + 2v \partial_x \rho = \partial_x \left[ \frac{\partial_{xx} \rho}{2\rho} - \frac{1}{4\rho^2} (\partial_x \rho)^2 \right] + \partial_x [(\rho - 1)(3\rho - 1 + 2A)]$$

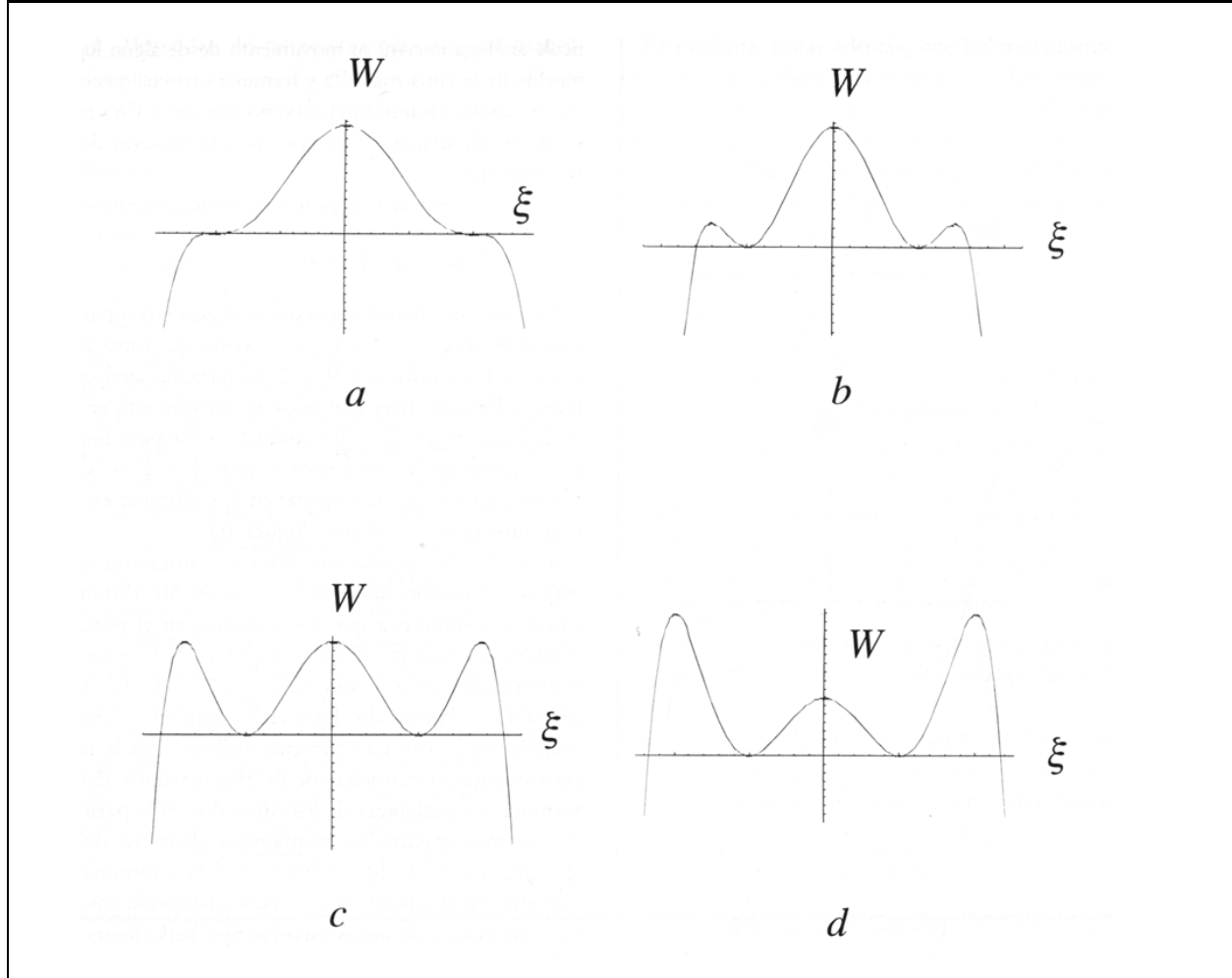
$$\partial_t \rho + 2\partial_x (\rho v) = 0 \tag{28}$$

donde

$$A = \frac{1}{2} \left[ -4 + \frac{3}{2\alpha} \pm \frac{3}{2|\alpha|} \sqrt{1 + 4\alpha} \right]. \tag{29}$$

La siguiente generalización de esta ecuación fue hecha por Jackiw y Pi, quienes describen a la materia no-relativista interactuante con campos de Chern-Simons calibrados en 2 + 1 dimensiones (Jackiw y Pi, 1990). Como fue demostrado por estos autores, dicha teoría admite simetría conformal incluyendo la invariancia de dilatación y una invariancia conformal especial en adición a las simetrías convencionales del espacio-tiempo, que incluye traslaciones espacio-temporales, rotaciones y transformaciones de Galileo. Las soluciones solitónicas no topológicas que lle-

FIGURA 4. REPRESENTACIÓN DEL POTENCIAL  $W = U(\xi)$  QUE AL DETERMINAR EL COMPORTAMIENTO DE LA "PARTÍCULA"  $\xi$ , PARA DISTINTOS VALORES DE LA "TEMPERATURA"  $A$ , ASÍ A)  $A = 1$ , LA PARTÍCULA ANÁLOGA NO CORRESPONDE A UNA ONDA SOLITARIA ESTÁTICA; B)  $A < 4$  MUESTRA LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES TIPO BURBUJA; C)  $A = 4$ , EL COMPORTAMIENTO DEL POTENCIAL  $W$  DETERMINA LA EXISTENCIA DE GOTAS; D)  $A > 4$ , LAS GOTAS COMPARTEN SU EXISTENCIA CON LOS KINKS.



van carga eléctrica así como flujo magnético (llamado Jackiw-Pi solitones) fueron explícitamente obtenidos en el citado trabajo.

### 1. Trayectorias de fase del modelo $\varphi^6$

Conviene analizar ahora ciertas propiedades de las trayectorias de fase para el modelo  $\varphi^6$ . La densidad  $U(\varphi^6)$  del potencial  $V$  tiene la siguiente forma (Agüero, 1998):

$$U = -W = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)^2(\xi^2 - A) \quad (30)$$

Con las condiciones de frontera tipo partículas y de tipo condensado (kinks y burbujas) del modelo  $\varphi^6$ , estudiaremos las soluciones solitónicas para diferentes valores de  $A$ .

Análogamente, la dinámica de la partícula se determina por el potencial  $W$ .

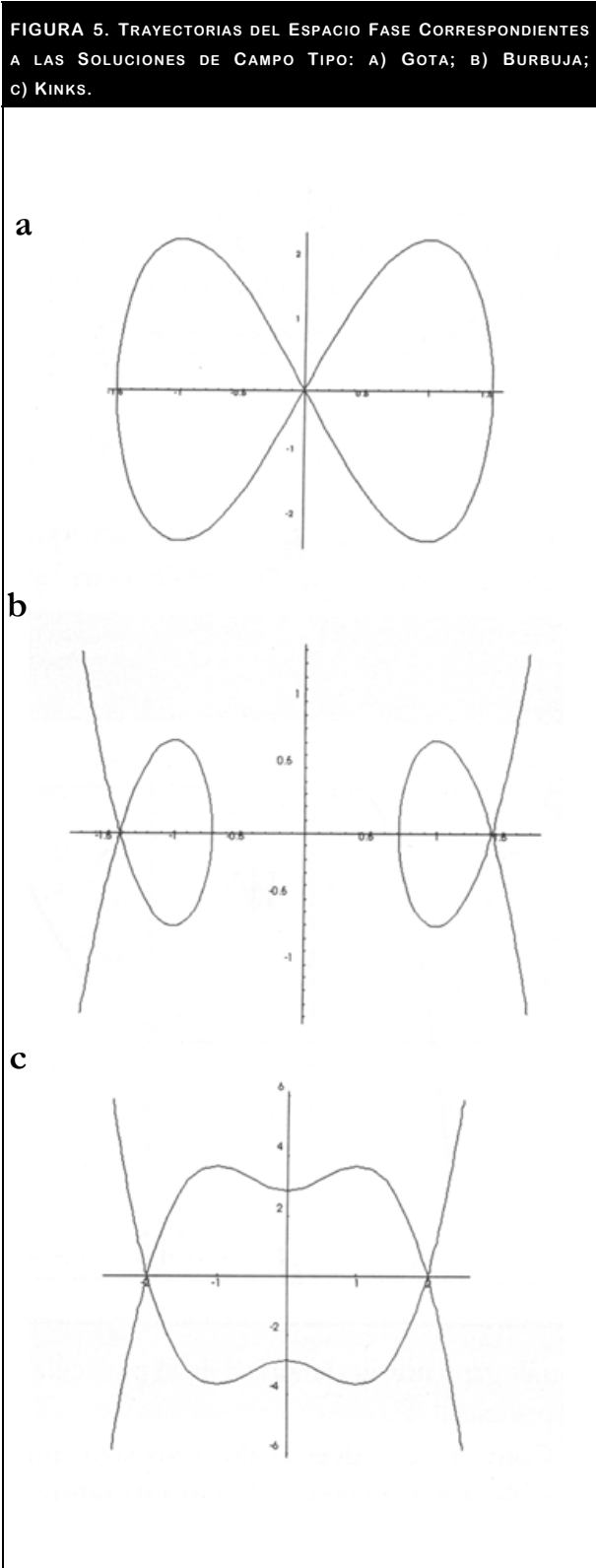
Conviene entonces analizar los siguientes casos:

a) Si  $A = 1$ , tenemos el punto de bifurcación, ya que para valores menores y mayores que  $A = 1$ , las soluciones tienen diferente naturaleza y, por lo tanto, bifurcan en otros tipos.

Entonces, el potencial  $W = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)^3$  tiene un máximo en  $\xi = \xi_0$ , cuyo valor es  $W = 1/2$ . Para este caso no es posible encontrar soluciones regulares estáticas, ya que posee sólo un máximo (figura 4a).

b) Si  $1 < A < 4$ , el potencial de acuerdo con el criterio de primera y segunda derivada, tendrá máximos en  $\xi_0 = 0$  y  $\xi_{\pm} = \pm\sqrt{(2A+1)/3}$ . Los valores máximos que toma





el potencial  $W$  en estos puntos son  $A/2$  y  $(2/27)(A-1)^3$ , respectivamente, y mínimos en  $\xi = \pm 1$  con valores del potencial  $W = 0$  en dichos puntos. Obviamente, como  $(A/2) > (2/27)(A-1)^3$  para  $A < 4$  el potencial  $W$  de la partícula adquiere dos máximos relativos en  $\xi_{\pm}$  (figura 4b). Nuestra partícula análoga iniciará su movimiento desde algún lugar permisible de la cima más alta y terminará en cualquiera de los dos máximos (distintos del máximo absoluto). Para este caso, la “partícula análoga” corresponde a la solución de campo tipo burbuja.

c) Si  $A = 4$ , entonces el potencial tendrá la siguiente forma

$$W = -1/2 (\xi^2 - 1)^2 (\xi^2 - 4)$$

En este caso, tenemos máximos degenerados para el potencial  $W$  en  $\xi = 0, \pm\sqrt{3}$ , y los valores que toma el potencial en estos puntos son  $W = 2$ . La partícula análoga puede tener soluciones tales que inicie su movimiento en la cima de la loma en  $\xi = \xi_0 = 0$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$  para finalizar su movimiento en la otra cresta cuando  $\xi = \xi_1 = \sqrt{3}$ . Este mismo proceso puede empezar en  $\xi_0$  y terminar en  $\xi = \sqrt{3}$  o en direcciones contrarias (figura 4c).

d) Si  $A > 4$  es similar a los dos casos anteriores, el potencial es del mismo tipo que la ecuación 30. Entonces, los cálculos conducen a que los máximos en el potencial  $W$  están situados en  $\xi = 0$  y  $\xi = \pm\sqrt{(2A+1)/3}$  y los valores correspondientes a  $W$  son  $A/2$  y  $(2/27)(A-1)^3$ . Tenemos ahora dos máximos absolutos en los extremos y un máximo relativo en  $\xi = 0$ . La “partícula análoga” puede iniciar su movimiento en cualquiera de los dos máximos absolutos y terminar en cualquiera de los otros dos. Si la partícula inicia su movimiento en el máximo absoluto del punto  $\xi = \sqrt{(2A+1)/3}$ , ( $\xi = -\sqrt{(2A+1)/3}$ ) y termina su movimiento en el otro máximo, estamos hablando entonces de las soluciones solitónicas estáticas tipo kink (figura 4d).

De la ecuación (10) para la energía constante es fácil obtener la relación

$$(\xi')^2 = (\xi^2 - 1)^2 (\xi^2 - A) + K$$

que describe las trayectorias de la partícula análoga en el espacio fase  $(\xi', \xi) = (p, q)$ , donde  $K = cte$ . De las condiciones de frontera para las soluciones tipo gotas en la región  $A > 1$  se deduce que  $K = A$  (véase figura 5a). Para las burbujas y kinks la constante es  $K = (4/27)(A-1)^3$ ; las burbujas “viven” en el segmento  $1 < A < 4$  y los kinks en la región  $A > 4$  (figuras 5b y 5c).

Como un caso particular, regresando al análisis de las características de soluciones solitónicas de acuerdo con los valores del parámetro  $A$  de la analogía mecánica para

valores  $0 < \mathcal{A} < 1$ , el potencial adquiere un máximo relativo en  $\xi_0 = 0$ , dos mínimos absolutos en  $\xi_{min} = \pm \sqrt{(2\mathcal{A} + 1)/3}$  y dos máximos relativos laterales en  $\xi_{max} = \pm 1$ . Como es de esperarse, el potencial toma el valor de  $\mathcal{A}/2$  en  $\xi_0$  y  $(2/27)(\mathcal{A} - 1)^3$  en  $\xi = \pm \sqrt{(2\mathcal{A} + 1)/3}$ . En este sector los vacíos estables  $\xi_{min}$  dependen del parámetro relevante del sistema  $\mathcal{A}$ , pero los vacíos inestables  $\xi_{max}$  no dependen de  $\mathcal{A}$ , que es un caso totalmente contrario al descrito más arriba.

### Conclusiones

Para el modelo de  $\varphi^4$  hemos demostrado analíticamente que en el límite continuo, con acoplamiento no-lineal, además de las soluciones tipo compactones existe una solución peculiar que “vive” en el máximo relativo del potencial. Construimos una analogía mecánica con un potencial de doble pozo enlazado por los campos no-lineales (kinks) que surgen de las condiciones de frontera tipo condensado. Nuestro modelo es también conveniente para ilustrar y estudiar cualitativamente las propiedades dinámicas de kinks.

Para el caso del modelo  $\varphi^6$  se comprobó que posee una variedad de soluciones solitónicas como las burbujas y los escalones (kinks). Todo ello depende del parámetro relevante del sistema, y podríamos interpretarlo como la “temperatura”  $\mathcal{A}$ . Es fácil observar que el sistema puede poseer tres mínimos, de los cuales dos serán simétricos y degenerados. Para este modelo también se construyen las analogías mecánicas correspondientes y se comparan los solitones en diferentes regiones del espacio paramétrico.

De la discontinuidad del parámetro de orden cuando ocu-

rren transiciones de fase, un potencial con dos mínimos simétricos como posee el modelo de  $\varphi^4$  es incapaz de describir transiciones de fase de primer orden. Esto constituye una de las razones por la que el modelo  $\varphi^6$  es el más adecuado para describir sistemas no-lineales que experimentan transiciones de fase de primer y de segundo orden.

Es evidente, notar además, que los movimientos finitos en valles y los infinitos en el espacio de fase están divididos por ciertas curvas (las separatrices); a las que corresponden las soluciones tipo solitones. En dos y más dimensiones aparecen las fricciones, y las curvas de las “partículas” se alteran. Nosotros aquí nos hemos restringido sólo al caso cuando estas fricciones no están presentes.



### BIBLIOGRAFÍA

- Agüero Granados, M. A. (1998). “Autointeracción de sexto orden en teoría no-lineal de campos”, en *Revista Mexicana de Física*. 44 (1) 82.
- Dusuel, S.; Michaux, P. y Remoissenet, M. (1998). “From Kinks to Compactonlike Kinks”, en *Phys. Rev. E* 57(2)
- Jackiw R. y Pi, S. Y. (1990). *Phys Rev Lett*. 64, 2969; *Phys. Rev. D* 42, 3500
- Makhankov, V.G. (1990). *Soliton Phenomenology*. Kluwer Academic Publisher.
- Makhankov, V. G.; Rybakov, Yu. P. y Sanyuk, B. I. (1989). *Model Skeyrma i Solitony v Fiziki Adronov* (in russian). Dubna, P4-89-568.
- Manton, N. S. y Merabet, H. (1996).  $\varphi^4$  Kinks-Gradient Flow and Dynamics. Preprint DAMTP 96-45