José Luis Fernández Chapou, Carlos Alejandro Vargas

Dispersión de una onda electromagnética plana por una partícula cargada

Ciencia Ergo Sum, vol. 7, núm. 2, julio, 2000
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Printed Version): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Dispersión de una onda electromagnética plana por una partícula cargada

José Luis Fernández Chapou* y Carlos Alejandro Vargas*

Recepción: 20 de julio de 1999
Aceptación: 06 de septiembre de 1999

Electromagnetic Plane Wave Scattering by a Charged Particle
Abstract. *We present a simple method to solving the relativistic problem of a charged particle when it is moving in presence of an electromagnetic plane wave field. Employing the relativistic Newton's second law in the mean rest reference system, the particle paths for waves of different polarization were determined. Then the particle radiation intensity was calculated and compared to the forthcoming electromagnetic wave in the same reference system.*

Introducción

Un método de cálculo de la trayectoria relativista de una partícula cargada en presencia de una onda electromagnética plana (OEMP) fue proporcionado por L. D. Landau y E. M. Lifshitz (1980: 108 y 194), quienes encontraron la solución usando la ecuación de Hamilton-Jacobi en cuatro dimensiones. El método que ofrecen Landau y Lifshitz requiere conocimientos sobre el formalismo de Hamilton-Jacobi. En este trabajo se presenta un método alternativo, sorprendentemente sencillo, que emplea elementos estándar de la mecánica relativista, y es consistente en el sentido de que los resultados obtenidos son idénticos a los encontrados con el método de Landau y Lifshitz. El nuevo método que se considera apropiado para incluirse en cursos de electrodinámica consiste esencialmente en resolver el problema en términos de la segunda ley de Newton relativista, integrando directamente la ecuación diferencial que resulta de sustituir la expresión para la fuerza de Lorentz correspondiente al campo de una OEMP. Se supuso que al incidir la OEMP sobre una partícula cargada, ésta se dispersa debido a la radiación emitida por la aceleración provocada sobre la partícula. También se calculó la sección eficaz de dispersión σ considerando que la partícula radía ondas electromagnéticas en el sistema de referencia estacionario (SE) debido a su movimiento acelerado. El trabajo se organizó de manera que en la primera y segunda secciones se establecen los elementos de las ondas electromagnéticas planas y planas monocromáticas, respectivamente. En la tercera sección se establecen las ecuaciones de movimiento relativistas, en la cuarta se resuelven las ecuaciones de movimiento de una partícula en el campo de una onda electromagnética plana polarizada lineal y circularmente, mientras que en la quinta sección se obtiene la dispersión de una onda incidente sobre una partícula cargada; finalmente, se incluye un apartado de conclusiones.

Para proceder a la solución del problema se obtienen las ecuaciones de onda del campo electromagnético en términos del potencial vectorial $\vec{A}$ y el potencial escalar ϕ; se determina el movimiento de la partícula a partir de la fuerza de Lorentz (segunda ley de Newton) y se encuentran las intensidades de radiación respectivas.

La existencia de los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en el espacio libre de fuentes está determinada por las ecuaciones de Maxwell con $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$. Estas ecuaciones

* *Laboratorio de Fenómenos Críticos y Fluidos Complejos, Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco. Av. San Pablo 180, Del. Azcapotzalco. C. P. 02200 México, D. F.*
Correo electrónico: jlfc@hp9000a1.uam.mx y *cvargas@hp9000a1.uam.mx*
Carlos A. Vargas también es profesor de asignatura de la ESFM-IPN.
Los autores desean expresar su agradecimiento a los árbitros anónimos por sus comentarios y sugerencias al presente trabajo.

tienen soluciones no nulas que satisfacen las ecuaciones de onda siguientes:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

De las ecuaciones homogéneas de Maxwell $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ se deduce la existencia de los potenciales electromagnéticos $\vec{A}$ y ϕ, tales que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}\ , \tag{2a}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2b}$$

que al sustituirse en (1), conducen a

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right), \tag{3a}$$

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)}{\partial t} = 0. \tag{3b}$$

Los potenciales $\vec{A}$ y ϕ no son únicos para $\vec{E}$ *y* $\vec{B}$ elegidos, de manera que es posible imponerles la norma de Lorentz, esto es,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

por lo tanto $\vec{A}$ y ϕ satisfacen las ecuaciones de onda

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{5a}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \tag{5b}$$

Como se dijo antes, los potenciales $\vec{A}$ y ϕ no son únicos para un campo electromagnético con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ dados. Si $\vec{A}$ y ϕ generan un campo electromagnético con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ dados, entonces los potenciales $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$ y $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, con $f(\vec{r}, t)$ una función escalar arbitraria, también generan el mismo campo $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a través de las ecuaciones (2a) y (2b). A partir de estas transformaciones (llamadas transformaciones de norma) siempre es posible elegir los potenciales de modo tal que el potencial escalar ϕ sea cero. En tales condiciones

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{6a}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \tag{6b}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \tag{6c}$$

De esta manera, una onda electromagnética queda descrita a través de las ecuaciones (6a), (6b) y (6c) por un potencial vectorial $\vec{A}$ que satisface la ecuación de onda (5a). Aun cuando se haya impuesto la condición de que $\phi = 0$, el potencial $\vec{A}$ no está determinado de manera única, porque todavía es posible sumarle el gradiente de una función que no dependa explícitamente del tiempo (de este modo ϕ no cambia). En particular se puede elegir $\vec{A}$ de modo tal que se cumpla la ecuación (6c) en consistencia con la ecuación (4).

I. Ondas electromagnéticas planas

Si se considera el caso particular de ondas electromagnéticas para las cuales el campo varía en el espacio en una sola dirección (u ondas planas), y si el vector $\hat{n}$ es unitario en la dirección y sentido de variación del campo, entonces las ecuaciones del campo se reducen a

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} - c^2\left(\hat{n} \cdot \nabla\right)^2 \vec{F} = 0, \tag{7}$$

donde $\vec{F}$ es cualquiera de los campos, ya sea $\vec{E}$, $\vec{B}$ o $\vec{A}$. Esta ecuación se resuelve definiendo las variables siguientes:

$$\xi = t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c},$$

$$\eta = t + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c},$$

la solución general de (7) es entonces de la forma

$$\vec{F} = \vec{h}(\xi) + \vec{g}(\eta)$$

con $\vec{h}$ y $\vec{g}$ campos arbitrarios, o bien

$$\vec{F} = \vec{h}\left(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c}\right) + \vec{g}\left(t + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c}\right). \tag{8}$$

Suponiendo que $\vec{g} = 0$, la solución implica que en cada plano: $\{\vec{r} \in R^3 | \hat{n} \cdot \vec{r} = \text{cte.}\}$, el campo toma los mismos valores para las coordenadas $\vec{r}$ en instantes t que satisfacen la relación

$$t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c} = cte.,$$

es decir

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = cte. + ct,$$

que es la ecuación paramétrica de una familia de planos paralelos; esta relación describe un plano ortogonal a $\hat{n}$ para cada tiempo t. El primer término $\vec{h}$ en (8) representa una onda plana que se mueve en la dirección del vector $\hat{n}$, y $\vec{g}$ describe una onda plana que se mueve en sentido opuesto al de $\hat{n}$. Introduciendo las nuevas variables ξ y η en (4) y eligiendo $\phi = 0$ y $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, se tiene

$$\frac{1}{c}\left[(\hat{n}\cdot\nabla)\vec{A}\right]\cdot\hat{n} = 0.$$

De acuerdo con la ecuación (7),

$$\frac{\partial^2\left(\hat{n}\cdot\vec{A}\right)}{\partial t^2} = 0,$$

esto implica que

$$\frac{\partial\ \left(n\cdot\vec{A}\right)}{\partial\ t} = cte.,$$

pero la derivada $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ determina el campo eléctrico, entonces una componente no nula $\hat{n}\cdot\vec{A}$ representará, en el caso considerado, la presencia del campo eléctrico longitudinal constante. En virtud de que este campo no tiene relación con la onda electromagnética, es posible hacer que

$$\hat{n}\cdot\vec{A} = 0.$$

Si se considera una onda plana que se mueve en la dirección y sentido del vector unitario $\hat{n}$, en esa onda todas las magnitudes, y en particular $\vec{A}$, son funciones únicamente de

$$\xi = t - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c}.$$

De las ecuaciones (2a) y (2b) con $\phi = 0$, se deducen

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{d\xi},$$
$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\hat{n}\times\frac{d\vec{A}}{d\xi}, \qquad (9)$$

de donde se sigue que

$$\vec{B} = \hat{n}\times\vec{E}, \qquad (10)$$

lo que implica, según la ecuación (10), que las ondas electromagnéticas serán transversales con los campos eléctrico y magnético, perpendiculares entre sí e iguales en módulo.

II. Ondas electromagnéticas planas monocromáticas

Es conocido que cualquier onda electromagnética en la que el campo es una función periódica del tiempo, es posible expresarla como una superposición de funciones armónicas simples del tiempo por medio de una serie de Fourier, y por lo tanto es importante la situación particular para la cual el campo es una función armónica del tiempo; una onda caracterizada de esta manera se dice que es monocromática. En una onda de esta naturaleza todas las magnitudes del campo dependen del tiempo por un factor de la forma $\cos(\omega t + \alpha)$, donde ω es la frecuencia de la onda. En la ecuación de onda se tiene

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{F},$$

donde $\vec{F}$ representa a cualquiera de los campos vectoriales $\vec{E}$, $\vec{B}$ o $\vec{A}$, de manera que la distribución del campo $\vec{F}$ en el espacio está determinada por la ecuación siguiente:

$$(\hat{n}\cdot\nabla)^2\vec{F} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{F} = 0, \qquad (11)$$

cuya solución corresponde a una onda que se propaga en la dirección y sentido de $\hat{n}$, de manera que para el vector potencial $\vec{A}$ tomará la forma

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \alpha\right), \qquad (12)$$

donde $\vec{A}_0$ es un vector complejo y el vector $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n}$ es el vector de onda; únicamente la parte real de $\vec{A}$ es la que tendrá significado físico. Por lo tanto, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de esta onda poseen formas análogas con la misma frecuencia ω. Sustituyendo (12) en (9) es posible obtener la relación de intensidades y el vector potencial de una onda monocromática en la forma

$$\vec{E} = i\frac{\omega}{c}\vec{A},$$
$$\vec{B} = i\vec{k}\times\vec{A}, \qquad (13)$$

al considerar específicamente la dirección del campo de una onda monocromática, el campo eléctrico se escribe como

$$\vec{E} = \mathrm{R}e\left\{\vec{E}_0 \exp i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \alpha\right)\right\}. \qquad (14)$$

A continuación todo lo que se diga para el campo eléctrico se cumple para el campo magnético, a menos que se indique lo contrario. La cantidad $\vec{E}_0$ es un vector complejo del cual suponemos, sin pérdida de generalidad, que su cuadrado es un número real (de no ser así $\vec{E}_0^2 = \left|\vec{E}_0^2\right|\exp\left(-i\beta\right)$ y bastaría con cambiar la constante de fase α por $\alpha + \beta$).

Se expresa en seguida $\vec{E}_0$ en la forma

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2,$$

donde $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son reales. Dado que el cuadrado

$$\vec{E}_0^2 = \vec{E}_1^2 - \vec{E}_2^2 + 2i\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2$$

debe ser una cantidad real, se tiene entonces que

$$\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 = 0.$$

Si eligimos un sistema de coordenadas cartesianas de modo que el eje X coincida con la dirección de propagación de la onda y el eje Y coincida con la dirección del vector $\vec{E}_1$, de la ecuación 14 se sigue entonces que

$$E_y = E_1 cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha\right), \tag{15a}$$

$$E_z = \pm E_2 sen\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha\right), \tag{15b}$$

donde se utiliza + (–) si E_2 está dirigido en el sentido positivo(negativo) del eje Z. De (15) se deduce que

$$\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} = 1. \tag{16}$$

De lo anterior es posible ver que en cada punto del espacio el vector campo eléctrico gira en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda, mientras que su extremo describe una elipse, de una onda con estas características se dice que está polarizada elípticamente. La rotación tiene lugar en el sentido contrario al de las manecillas del reloj si en (15b) vale el signo más, y en el sentido opuesto si vale el signo menos. Si $E_1 = E_2$, la elipse (16) se reduce a una circunferencia, esto es, la onda está polarizada circularmente. Si en cambio E_1 o E_2 es igual a cero, el campo de la onda es simple y en todas partes paralelo (antiparalelo) a una misma dirección. En este caso se dice que la onda está polarizada linealmente, o polarizada en un plano. Una onda polarizada elípticamente se puede considerar como la superposición de dos ondas polarizadas linealmente.

III. Ecuación de movimiento relativista

La teoría especial de la relatividad parte de los siguientes postulados enunciados por Einstein en 1905: a) Todas las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales (SRI); y b) La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, independiente del movimiento de la fuente, esto significa que tiene el mismo valor en cualquier SRI. Para satisfacer estos postulados, se define el espacio-tiempo de Minkowski $\boldsymbol{M}^4$ como un espacio vectorial de cuatro dimensiones que representa al conjunto de eventos

$$(ct = x^0,\ x = x^1,\ y = x^2,\ z = x^3) = (x^0,\ \vec{x})$$

donde c denota la velocidad de la luz, t el tiempo en que ocurre el evento y $\vec{x}$ es el radio vector que localiza al evento en el espacio euclidiano tridimensional E^3. En $\boldsymbol{M}^4$ se define la métrica invariante de Lorentz o intervalo ds entre dos eventos x y $x + dx$ como

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2dt^2 - |d\vec{x}|^2$$

Sean a y b dos vectores cualesquiera en $\boldsymbol{M}^4$, llamados también 4-vectores (cuadrivectores). El producto escalar de Minkowski entre estos 4-vectores se define como:

$$a \cdot b = a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b},$$

donde $\vec{a}\cdot\vec{b}$ es el producto escalar definido usualmente en ε^3.

El postulado (b) se cumple usando transformaciones de coordenadas lineales en $\boldsymbol{M}^4$ (llamadas transformaciones de Lorentz) que dejan invariante al producto escalar de Minkowski, las cuales evidentemente dejan invariante a ds^2. La invariancia de ds^2 es equivalente a la invariancia de la velocidad de la luz, tal como lo exige el postulado (b). El postulado (a) se cumple expresando las ecuaciones que representan las leyes de la física en términos de vectores o tensores definidos en $\boldsymbol{M}^4$. Por SRI, entendemos la clase de equivalencia que representa a todos los sistemas de referencia relacionados por una transformación de Lorentz en el sentido de que dado un SRI, cualquier otro SRI se obtiene de aquél mediante una transformación de Lorentz.

Una partícula material en $\boldsymbol{M}^4$ se caracteriza por una línea parametrizada $C: \{x \in \boldsymbol{M}^4 \,|\, x = x(\lambda);\ \lambda \in I \subseteq R\}$, llamada línea de universo, y un número $m_0 \geq 0$ constante, llamado masa propia, que representa la masa medida en un sistema donde la partícula está instantáneamente en reposo. Si C es la trayectoria en el espacio-tiempo de un rayo de luz (fotón), entonces $ds^2 = 0$ a lo largo de la curva y $m_0 = 0$. Para una partícula con $m_0 \neq 0$, $ds^2 > 0$ a lo largo de su línea de universo, de modo que es posible encontrar un sistema de referencia en el que $d\vec{x}' = 0$ y por tanto

$$ds^2 = c^2dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) = c^2dt'^2 \equiv c^2d\tau^2,$$

donde $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ es el vector velocidad de la partícula y

$$\tau \equiv \int_C \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$$

es por definición el tiempo propio de la partícula, el cual representa al tiempo medido por un observador en reposo con relación a la partícula.

Es posible usar el tiempo propio τ para parametrizar la línea de universo C de la partícula de modo que el cuadrivector $u = \frac{d\underline{x}}{d\tau}$ tangente a C, llamado 4-vector velocidad, tiene por componentes

$$\underline{u} = \frac{d\underline{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \gamma\left(c, \vec{v}\right),$$

donde

$$\gamma \equiv \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{dt}{d\tau}.$$

De estas expresiones se obtiene que

$$u^2 \equiv u \cdot u = c^2$$

a lo largo de la línea C. El 4-vector momento de la partícula se define como

$$\underline{p} = m_0\, u = (mc,\ m\vec{v}),$$

donde

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

es la llamada masa relativista de la partícula, medida desde un sistema de referencia donde la partícula se mueve con velocidad $\vec{v}$. Nótese que $m \to \infty$ conforme $v \to c$.

El 4-vector fuerza de Minkowski es el vector definido a lo largo de C como

$$\underline{f} = \frac{d\,\underline{p}}{d\tau} = m_0\frac{d\,\underline{u}}{d\tau},$$

en componentes se tiene que

$$f^0 = \gamma\frac{dmc}{dt}$$

y

$$\vec{f} = \gamma\frac{dm\vec{v}}{dt} = \gamma\vec{F},$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza de Newton tal como se expresa en la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad (17)$$

donde $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ es, por definición, la cantidad de movimiento de la partícula. Esta expresión representa justamente la ecuación de movimiento relativista para una partícula urgida por una fuerza $\vec{F}$, la cual depende de la naturaleza de la interacción que actúa sobre la partícula. Puesto que $u^2 = c^2$ es constante a lo largo de C, el cuadrivector aceleración $\frac{d\,u}{d\tau}$ es ortogonal a u (o sea $\underline{u}\cdot\frac{d\,\underline{u}}{d\tau} = 0$) en la métrica de Minkowski. Por esta razón $\underline{f}\cdot\underline{u} = 0$, y por lo tanto se tiene $f^0 = \gamma\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{c}$ que al compararse con la ecuación f^0 expresada más arriba, se obtiene

$$\frac{d\left(mc^2\right)}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

o bien

$$dmc^2 = F\cdot d\vec{x}.$$

Esto significa que el cambio o incremento Δmc^2 es igual al trabajo realizado sobre la partícula $\int\vec{F}\cdot d\vec{x}$, el cual representa la energía ε impartida a la partícula. Por esta razón, entre otras, se sugiere la equivalencia entre la masa y la energía según la relación

$$\varepsilon = mc^2$$

De esta relación se tiene también que

$$p^0 = \frac{\varepsilon}{c}. \qquad (18)$$

IV. Movimiento de una partícula cargada en el campo de una onda electromagnética plana, polarizada lineal y circularmente

En esta sección se resuelve primero el problema para la partícula en el campo de una onda electromagnética plana (OEMP) en su forma más general.

Si se tiene una partícula con carga q en presencia de un campo electromagnético $\vec{E}$ y $\vec{B}$, sobre ésta actúa una fuerza llamada fuerza de Lorentz, dada por la expresión

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right), \qquad (19a)$$

al sustituir en (17), se determinan las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right). \qquad (19b)$$

Como ya se mencionó en la sección I, el campo que corresponde al de una OEMP está caracterizado por el vector potencial $\vec{A}(\xi)$, tal que

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{d\xi}, \qquad (20a)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\hat{n}\times\frac{d\vec{A}}{d\xi}, \qquad (20b)$$

donde $\xi = t - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c}$. Eligiendo un sistema de coordenadas de manera que el eje X coincida con la dirección y sentido del vector $\hat{n}$, esto es,

$$\hat{n} = (1, 0, 0), \qquad (21)$$

con los campos $\vec{A}$, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, situados en el plano YZ y usando (20) y (21) en (19) se obtiene

$$\frac{dp_X}{dt} = \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{E}, \qquad (22a)$$

$$\frac{d\vec{P}}{d\xi} = -\frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}, \tag{22b}$$

aquí $\vec{P}$ está contenido en el plano *YZ*. Esto es, se ha descompuesto al momento $\vec{p}$ como una suma de vectores: $\vec{p} = \hat{n}p_x + \vec{P}$, donde $\vec{P}$ es la proyección del vector $\vec{p}$ sobre el plano *YZ* ortogonal a $\hat{n}$.

El campo eléctrico es el único que realiza trabajo sobre la carga, por lo tanto la potencia disipada está dada por

$$W = q\vec{v}\cdot\vec{E} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{23}$$

donde ε es la energía relativista total de la partícula. Sustituyendo (23) en (22) e integrando, las expresiones que resultan son

$$\beta = \frac{\varepsilon}{c} - p_x, \tag{24a}$$

$$\vec{P} = \vec{\alpha} - \frac{q}{c}\vec{A}, \tag{24b}$$

donde β es una constante y $\vec{\alpha}$ es un vector bidimensional constante. Usando la ecuación relativista $\varepsilon^2 = m_0^2c^4 + c^2(p_x^2 + \vec{P}^2)$ en (24a) se obtiene

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} + p_x^2 = \frac{m_0^2c^2 + \vec{P}^2}{\beta}, \tag{25}$$

y eliminando p_x y $\frac{\varepsilon}{c}$ se encuentra que

$$p_x = -\frac{\beta}{2} + \frac{m_0^2c^2 + \vec{P}^2}{\beta}, \tag{26a}$$

$$\frac{\varepsilon}{c} = \frac{\beta}{2} + \frac{m_0^2c^2 + \vec{P}^2}{\beta}, \tag{26b}$$

sustituyendo (24b) en la ecuación (26a) se obtiene

$$p_x = -\frac{\beta}{2} + \frac{m_0^2c^2 + \vec{\alpha}^2}{2\beta} - \frac{q}{c\beta}\vec{\alpha}\cdot\vec{A} + \frac{q}{2\beta c^2}\vec{A}^2. \tag{27}$$

Las ecuaciones (24) y (27) determinan el ímpetu y la energía de la partícula cargada en términos del vector potencial de la OEMP. Para encontrar la trayectoria de la partícula se procede a integrar las ecuaciones (24b) y (27), para lo cual se necesita la relación $\vec{p} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}$, que se sigue de las ecuaciones $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\varepsilon = mc^2$, los vectores $\vec{p}$ y $\vec{v}$ son tridimensionales. De acuerdo con esta relación y la ecuación (24a) se tiene

$$p_x = \frac{\beta}{c}\frac{dx}{d\xi} \quad \text{y} \quad \vec{P} = \frac{\beta}{c}\frac{d\vec{r}}{d\xi},$$

donde $\vec{r} = (y, z)$. Sustituyendo en (24b) y (27) e integrando las expresiones que resultan se obtienen las siguientes ecuaciones paramétricas (con ξ como parámetro)

$$x = \frac{c}{2}\left(\frac{m_0^2c^2 + \vec{\alpha}^2}{\beta^2} - 1\right)\xi - \frac{q}{\beta^2}\int\vec{\alpha}\cdot\vec{A}(\xi)d\xi$$

$$+ \frac{q^2}{2c\beta^2}\int\vec{A}^2(\xi)d\xi, \tag{28a}$$

$$\vec{r} = \frac{c}{\beta}\vec{\alpha}\xi - \frac{q}{\beta}\int\vec{A}(\xi)d\xi, \tag{28b}$$

$$t = \xi + \frac{x}{c}. \tag{28c}$$

Al tomar el valor medio en el tiempo de las cantidades en (28) los términos de primer grado respecto de la función periódica $\vec{A}(\xi)$ se anulan. Siempre es posible elegir un sistema de referencia donde la partícula se encuentre, en promedio, en reposo, esto es, un sistema cuyo valor medio del ímpetu sea igual a cero. Imponiendo esta condición se obtiene de la ecuación (24b) que

$$\vec{\alpha} = 0 \tag{29}$$

y aplicándola a la ecuación (28b) se obtiene

$$\beta^2 = m_0^2c^2 + \frac{q^2}{c^2} < \vec{A} >. \tag{30}$$

El primer término del lado derecho de (28a) puede escribirse como:

$$\frac{c}{2}\int\left(\frac{m_0^2c^2 + \vec{\alpha}^2}{\beta^2} - 1\right)d\xi,$$

de (29) y (30) se obtiene

$$\frac{m_0^2c^2 + \vec{\alpha}^2}{\beta^2} - 1 = -\frac{q}{\beta^2c^2} < \vec{A}^2 >; \tag{31}$$

después, sustituyendo (29) y (31) en (28), se obtienen las ecuaciones que determinan el movimiento de la partícula:

$$x = \frac{q^2}{2c\beta^2}\int\left[\vec{A}^2(\xi) - < \vec{A}^2(\xi) >\right]d\xi, \tag{32a}$$

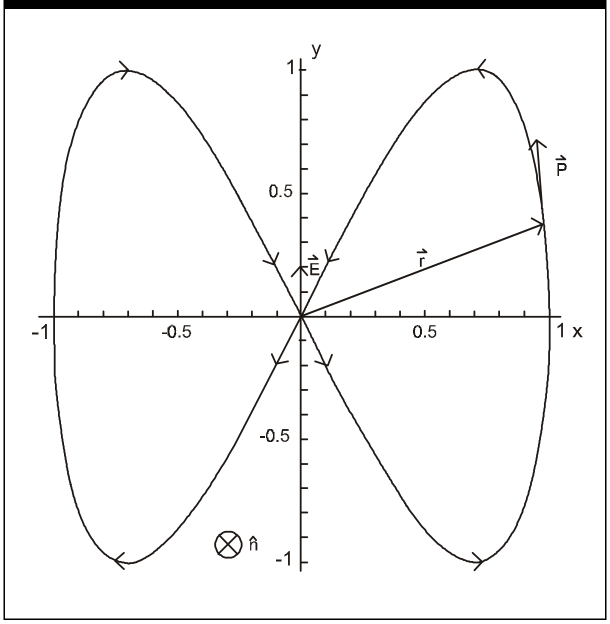
$$\vec{r}(y,z) = -\frac{q}{\beta}\int\vec{A}(\xi)d\xi, \tag{32b}$$

$$t = \xi + \frac{q^2}{2\beta^2c^2}\int\left[\vec{A}^2(\xi) - < \vec{A}^2(\xi) >\right]d\xi, \tag{32c}$$

$$p_x = \frac{q^2}{2\beta c^2}\left[\vec{A}^2(\xi) - < \vec{A}^2(\xi) >\right], \tag{32d}$$

$$\vec{P} = -\frac{q}{c}\vec{A}^2(\xi), \tag{32e}$$

FIGURA 1. Trayectoria descrita por una carga que se mueve en presencia de una onda electromagnética plana polarizada linealmente en el sistema de referencia en el que la partícula está en promedio en reposo. La trayectoria es simétrica en forma de moño, con su eje longitudinal paralelo al eje X. La dirección de propagación de la onda $\hat{n}$ es perpendicular al plano de la figura, y el campo $\vec{E}$ es paralelo al eje Y.



$$\varepsilon = c\beta + \frac{q^2}{2\beta c}\left[\vec{A}^2(\xi) - <\vec{A}^2(\xi)>\right], \qquad (32f)$$

donde β queda determinada por la ecuación (30).

A continuación se aplican estas ecuaciones para resolver el problema de una carga en el campo de una onda monocromática polarizada linealmente y de otra onda polarizada circularmente.

Para el campo de una onda polarizada linealmente se eligió un sistema coordenado en el cual el eje Y coincide con la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ de modo que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 cos\omega\xi,$$

luego de la ecuación (20a), e integrando, se obtiene

$$\vec{A} = -\frac{c\vec{E}_0}{\omega} sen\omega\xi,$$

y después, sustituyendo esta expresión en el conjunto de las ecuaciones (32), se sigue que la representación paramétrica del movimiento en el sistema de referencia en el cual la partícula se encuentra en promedio en reposo, está dada por

$$x = -\frac{q^2E_0^2c}{8\beta^2\omega^3} sen2\omega\xi,$$

$$y = -\frac{qE_0c}{\beta\omega^2} cos\omega\xi,$$

$$z = 0,$$

$$t = \xi - \frac{q^2E_0^2}{8\beta^2\omega^3} sen2\omega\xi,$$

con el parámetro β obtenido de

$$\beta^2 = m_0^2c^2 + \frac{q^2E_0^2}{2\omega^2},$$

y las expresiones para el ímpetu $\vec{p}$ resultan

$$p_x = -\frac{q^2E_0^2}{4\beta\omega^2} cos2\omega\xi,$$

$$P_y = \frac{qE_0}{\omega} sen\omega\xi,$$

$$P_z = 0.$$

Por tanto, la carga se mueve en el plano XY siguiendo una curva simétrica en forma de moño (∞) con su eje longitudinal paralelo al eje X, como se ilustra en la figura 1.

Para el campo de la onda polarizada circularmente se tiene que:

$$E_y = E_0 \, cos\omega\xi, \qquad E_z = E_0 \, sen\omega\xi,$$

de donde

$$A_y = -\frac{cE_0}{\omega} sen\omega\xi,$$

$$A_z = \frac{cE_0}{\omega} cos\omega\xi.$$

Así, sustituyendo en las ecuaciones (32) se obtienen a su vez las ecuaciones que determinan el movimiento de la carga

$$x = 0, \qquad y = -\frac{qcE_0}{\beta\omega^2} cos\omega t \qquad z = -\frac{qcE_0}{\beta\omega^2} sen\omega t$$

y las componentes de su ímpetu

$$P_x = 0,$$

$$P_y = \frac{qE_0}{\omega} sen\omega t,$$

$$P_z = \frac{qE_0}{\omega} cos\omega t,$$

donde $\beta^2 = m_0^2c^2 + \frac{c^2E_0}{\omega^2}$. Entonces, la carga se mueve en el plano YZ a lo largo de una circunferencia de radio

$$\frac{qcE_0}{\beta\omega^2},$$

como se muestra en la figura 2, y su ímpetu tiene módulo constante dado por

$$P=\frac{qE_0}{\omega},$$

donde el ímpetu $\vec{p}$ en cada instante es paralelo a la dirección del campo magnético $\vec{B}$ de la onda electromagnética.

V. Dispersión de una onda incidente sobre una partícula cargada

Si una partícula se mueve con una velocidad no-relativista, $v << c$, ésta produce radiación como lo expresa la fórmula de Larmor (Marion, 1980: 278):

$$d\varepsilon=\frac{2q^2}{3c^3}|\vec{a}|^2\,dt, \tag{33}$$

donde $\vec{a}$ es la aceleración de la partícula. Esta fórmula es válida solamente si la velocidad relativa de la carga y el observador es pequeña. Sin embargo, la fórmula es exacta en el sistema de referencia que está instantáneamente en reposo con respecto a la carga. En este sistema de referencia (propio), el momento total radiado es cero:

$$d\vec{p}=0. \tag{34}$$

Para tratar el problema relativista, reescribimos las fórmulas (33) y (34) en forma 4-vectorial (Landau y Lifshitz, 1980: 108, 194). Es fácil ver que el 4-momento radiado $d\,\underline{p}$ debe escribirse como

$$d\,\underline{p}=-\frac{2e^2c}{3}\underline{a}^2d\,\underline{x}=-\frac{2e^2c}{3}\left(\underline{a}\cdot\underline{a}\right)\underline{u}d\tau. \tag{35}$$

De hecho, en el sistema de referencia propio, las componentes espaciales de u son cero, y por lo tanto

$$\underline{a}^2=-\frac{|\vec{a}|^2}{c^2}.$$

Entonces, las componentes espaciales de $\underline{p}$ se hacen cero y la componente temporal conduce a la ecuación (33).

El 4-momento total radiado durante el tiempo que pasa la partícula a través de un campo electromagnético dado es igual a la integral de (35), esto es

$$\Delta\underline{p}=-\frac{2cq^2}{3}\int\underline{a}^2d\underline{x}. \tag{36}$$

Ahora se reescribe esta fórmula expresándola en términos del campo electromagnético que produce la 4-aceleración de la partícula; para esto, las componentes de a se expresan en términos de la 4-fuerza de Minkowski.

$$a^0=\frac{f^0}{m_0}=\gamma\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{m_0c}$$

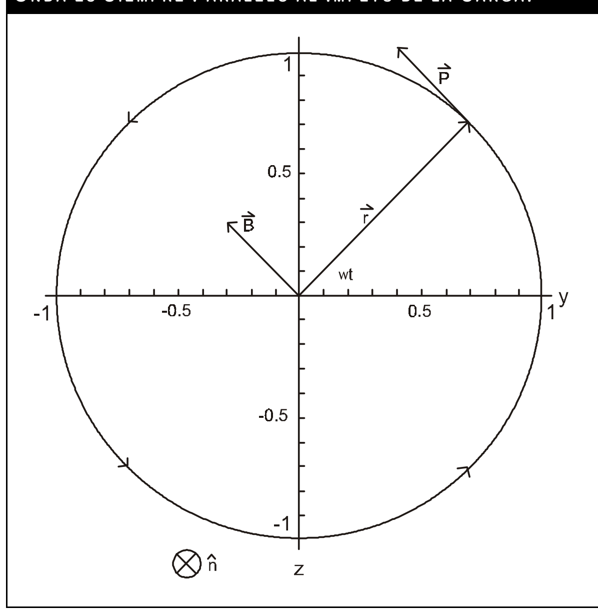
$$\vec{a}=\frac{\vec{f}}{m_0}=\gamma\frac{\vec{F}}{m_0},$$

Sustituyendo en la ecuación (36) las expresiones anteriores y utilizando la expresión para $\vec{F}$ dada por la fuerza de Lorentz (19b) en términos de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, la componente temporal de (36) queda en términos de los campos eléctrico y magnético externos como

$$\Delta\varepsilon=\frac{2q^4}{3m^2c^3}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\left\{\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right\}^2-\frac{1}{c^2}\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}dt. \tag{37}$$

Aquí se ha usado la relación $\varepsilon=cp^0$ dada por la ecuación (18).

FIGURA 2. Esquema de la Trayectoria Seguida por una Carga que se Mueve en Presencia de una Onda Electromagnética Plana Polarizada Circularmente. La Trayectoria es una Circunferencia de Radio $\frac{qcE_0}{\beta\omega^2}$ y cuyo Ímpetu tiene Módulo Constante $P=\frac{qE_0}{\omega}$. La Dirección de Propagación de la Onda es Ortogonal al Plano de la Figura, y el Campo Magnético $\vec{B}$ de la Onda es Siempre Paralelo al Ímpetu de la Carga.



a) A continuación se procede a obtener la intensidad de la radiación emitida por una carga que se mueve en un sistema estacionario en el campo de una OEMP polarizada circularmente. De acuerdo con los resultados obtenidos en la sección IV, la partícula se mueve en un círculo y su velocidad en cada instante es paralela a $\vec{B}$ y perpendicular a $\vec{E}$. Su energía cinética es:

$$mc^2 = \sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4} = c\beta .$$

De la ecuación (37) se obtiene que la intensidad de radiación de la partícula en el sistema de referencia en promedio en reposo es

$$I = \frac{2q^4}{3m_0^2c^3}\frac{\bar{E}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2q^4E_0^2}{3m_0^2c^3}[1+(\frac{qE_0}{m_0cw})^2].$$

La sección eficaz de dispersión σ se encuentra tomando el cociente entre la radiación de la partícula sobre un periodo de su movimiento y la intensidad incidente, e integrando sobre un ángulo sólido (Marion, 1980: 278, 434) como sigue (en este caso $<I> = I$):

$$\sigma = \frac{8q^4E_0^2\pi}{3m_0^2c^3\left(E_0'\right)^2}\left[1+\left(\frac{qE_0}{m_0c\omega}\right)^2\right],$$

donde E_0' es el campo eléctrico de la onda incidente en el sistema de referencia en promedio en reposo. Para calcular E_0' es necesario conocer las condiciones iniciales del movimiento de la partícula en el sistema del laboratorio.

b) Para el caso en que la carga se mueve en una OEMP polarizada linealmente, la intensidad de radiación en el sistema estacionario se consigue sustituyendo los resultados obtenidos en la ecuación (37), obteniéndose

$$I = \frac{2q^4\bar{E}_0^2\left(1-\frac{v_x^2}{c}\right)^2}{3m_0^2c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

y al promediar se tiene

$$< I >= \frac{q^4E_0^2}{3m_0^2c^3}\left[1+\frac{3}{8}\left(\frac{qE_0}{m_0c\omega}\right)^2\right].$$

Tomando el cociente entre el promedio de la radiación emitida por la partícula y la intensidad de la onda electromagnética incidente se encontró –después de integrar sobre el ángulo sólido, y según con la ecuación anterior– el parámetro de dispersión σ como:

$$\sigma = \frac{4q^4\pi E_0^2}{3m_0^2c^3E_0'^2}\left[1+\frac{3}{8}\left(\frac{qE_0}{m_0c\omega}\right)^2\right],$$

donde de nueva cuenta E_0' corresponde al campo eléctrico de la onda incidente en el sistema de referencia en el que la partícula está en promedio en reposo; dicho campo depende de las condiciones iniciales.

Por último, cabe mencionar que en este problema se despreció la reacción que ejerce la partícula al campo externo. Estos efectos resultan importantes si las fuerzas externas son tales que el movimiento cambie apreciablemente dentro de un tiempo característico del orden de

$$\tau = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m_0c^3},$$

o en distancias del orden de $c\tau$. Este es un criterio general en el marco de la electrodinámica clásica.[1]

Conclusiones

Se ha presentado un método alternativo para resolver el problema relativista de una partícula cargada en presencia de una onda electromagnética plana. Este método resulta particularmente sencillo comparado con otros sugeridos en la literatura. Considerando el movimiento acelerado de la carga, se mostró que es posible analizar la dispersión de la onda incidente según su polarización en el sistema de referencia en que la partícula está, en promedio, en reposo.

Por último, se considera que el método aquí propuesto es ilustrativo y adecuado para introducirlo en los cursos de electrodinámica dirigidos a estudiantes de ciencias e ingeniería.

Bibliografía

Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. 2nd ed. Wiley, New York. pp. 780-782.

Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. (1980). *The Classical Theory of Fields*. 4th ed. Pergamon Press, Oxford. pp. 108-118 y 194-198.

Marion, J. B. (1980). *Classical Electromagnetic Radiation*. 2nd ed. Academic Press, New York. pp. 278-279 y 434.

1. Al lector interesado en profundizar en estas cuestiones se sugiere consultar el capítulo 17 de *Classical Electrodynamics* de J. D. Jackson, 1975.