Revista de Ciencias Sociales (RCS)
Vol. XX, No. 4, Octubre-Diciembre 2014, pp. 658 - 677
FACES - LUZ • ISSN 1315-9518

Equilibrio de Nash y resolución de conflictos

Vanegas de Medina, Maritza*
Pascal Pinillo, Jesús**

Resumen

En el presente artículo, se introduce la noción de juegos suma-cero construida a partir de las teorías de von Neumann y Morgenstern (1953) sus propiedades básicas y algunos ejemplos elaborados a partir del lenguaje matemático, para explicar a la luz de las teorías de Nash (1950) las estrategias usadas por los jugadores en el contexto económico, militar y social. También, se presenta la noción de juego suma no-cero, no cooperativos entre dos personas, asumiendo la continuidad diferenciable de la función de pago. Finalmente, se explica a través de ejemplos construidos por los autores, los métodos de determinación del equilibrio de Nash puro y una metodología elemental para la determinación del equilibrio de Nash mixto.

Palabras clave: Teoría de juegos, juego suma cero, equilibrio de Nash puro mixto, resolución de conflictos.

The Equilibrium of Nash and Conflict Resolution

Abstract

This article introduces the notion of sum-zero games constructed based on the theories of von Neumann and Morgenstern (1953), their basic properties and some examples developed from mathematical language to explain the strategies used by players in the economic, military and social contexts in the light of the theories of Nash (1950). Also, the notion of the non-zero-sum game, non-cooperative between two people, is presented, assuming the differentiable continuity of the payment function. Finally, using examples constructed by the authors, methods of determining pure Nash equilibrium and an elementary methodology for determining mixed Nash equilibrium are explained.

Key words: Game theory, zero-sum game, pure and mixed Nash equilibrium.

* Economista (Universidad del Zulia). Magister en Gerencia Pública. Doctora en Ciencias Humanas. Investigadora adscrta al Instituto de Investigaciones de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela. E-mail: maritzavanegasdemedina@yahoo.es

** Licenciado en Matemáticas (Universidad del Zulia LUZ). Magister y Doctor en Matemáticas en la Universidad Estatal de Louisiana, LSU, Baton Rouge, Luisiana, EUA. E- mail: Jesus_Pascal@hotmail.com

Recibido: 13-12-04 • Aceptado: 14-05-16

Introducción

La teoría de juegos ha sido creada para abordar, por medio de una estructura sistemática, entre otras cosas, relaciones conflictivas entre entes o personas. Una situación conflictiva es un juego, cuyos actores son los participantes en el conflicto. La existencia de un conflicto está relacionada con el deseo de cada jugador de mejorar sus circunstancias actuales en términos de incrementar algunas adquisiciones o por mejorar una posición de poder de carácter militar, económico, político o social.

Para 1944, John von Neumann y Oskar Morgenstern introdujeron la teoría de juegos basada en un nuevo método matemático, por primera vez no prestado de la física, y especialmente adaptado a las ciencias económicas y sociales, planteando que los métodos tomados de las ciencias naturales son inadecuados para esos propósitos. Estos científicos introducen la noción de juego, la cual consiste en un conjunto de jugadores racionales conocedores de la estructura del mismo, donde cada jugador tiene un conjunto de estrategias y una función de pago que depende del vector de estrategias seleccionadas por cada uno.

Estos autores presentan inicialmente un análisis matemático denominado juegos no-cooperativos de suma-cero, en los cuales las ganancias de un jugador son exactamente las pérdidas del otro jugador. Es por ello, que von Neumann y Morgenstern (1953), plantean la noción de solución cooperativa, relacionada con el concepto de conjuntos estables para una gran variedad de juegos específicos. Si bien este tipo de juegos tiene aplicación en el ámbito militar, tiene limitaciones en otras áreas; sin embargo, la metodología creada por ellos, es básica y orientadora para la solución de problemas de aplicación mediante modelos de juegos suma-no-cero, cooperativos y no-cooperativos, en que las ganancias de un jugador no implican la pérdida para otro.

El principal objetivo de la teoría de juegos, es determinar la conducta racional en situaciones de "juego" en las que los resultados son condicionados a las acciones de jugadores interdependientes; también, nos permitirá predecir qué ocurriría cuando individuos racionales tomen decisiones. "Individuos racionales" aquí significa una característica que los agentes cognitivos exhiben cuando adoptan creencias sobre la base de razones apropiadas.

Por tanto, en este trabajo se busca demostrar que la teoría de juegos permite dar cuenta de los procesos de toma de decisión racional de los agentes económicos en una ciencia social como la Economía, a través de la naturaleza de la elección, preferencias, racionalidad, riesgo e incertidumbre.

En cuanto a la metodología, se buscó explicar a través de formatos matemáticos la forma extensiva del juego y sus desarrollos; con el juego suma cero: definiciones, esperanza de pago, interacción estratégica entre dos jugadores, teoremas, estrategias óptimas, maximin y minimax; juegos suma no-cero y no-cooperativos: el principio de racionalidad y el principio de mayor satisfacción; y el equilibrio de Nash: método para determinar un equilibrio de Nash, cálculo del equilibrio de Nash mixto y existencia del equilibrio de Nash.

1. Juegos suma cero

En este tipo de juegos, se supone que las ganancias y las pérdidas las asumen los jugadores. La posición óptima debe ser conocida y el juego finito (Neumann y Morgenstern, 1953, Shubick, 1992). De esta manera tenemos las siguientes definiciones:

Definición. Sean m y n números cualesquiera. Un juego suma cero de orden m x n

entre dos personas es una matriz de orden m x n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m_1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde uno de los jugadores, simbolizado por J_*, escoge su opción seleccionando una fila entre las m filas de la matriz A, y el jugador, a quien denotaremos por J^*, escoge su opción seleccionando una columna entre las n- columnas de la matriz A. De lo expuesto se presentan las siguientes definiciones:

Definición. Una jugada individual consiste en el par ordenado, (A_i, A^j); A_i: *i-ésima fila,* A^j: *j-ésima columna*, a través de la selección realizada en forma simultánea e independiente por cada jugador.

Definición. Un resultado o "pago" es aquel producido por una jugada individual realizada y está representado por el número, a_{ij}, el cual se encuentra en la intersección de la fila A_i con la columna A^j, seleccionadas por los jugadores J_* y J^* respectivamente. Esta cantidad, a_{ij}, representa la cantidad a recibir por el ganador, y a su vez representa el monto a pagar por el perdedor.

$$A = \begin{bmatrix} & & A_{ij} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & a_{mj} & \cdots & \dots \end{bmatrix}$$

Se asume la siguiente convención: Si el número a_{ij} es positivo, entonces esto significa que el jugador J_* resulta ser el ganador y por lo tanto recibirá como pago la cantidad, a_{ij}, y el jugador J^* es el perdedor, y por lo tanto deberá pagar la cantidad *aij*. En caso contrario, es decir, si el número a_{ij}, es negativo, entonces, esto significa que es una pérdida por la cantidad de a_{ij} para el jugador J_* y una ganancia por la cantidad de a_{ij} para el jugador J^*. Entonces, cada jugador deseará maximizar o minimizar este resultado, por lo que, cada uno de ellos deberá diseñar una estrategia adecuada, que le permita tomar decisiones convenientes.

Definición. Una estrategia para el jugador J_* en un juego suma cero de orden m x n entre dos personas, es una *m - upla*, $(p_1, p_2, \dots, p_m)$, formada por números reales entre 0 y 1, es decir, $0 \le p_1 \le 1$, $0 \le p_2 \le 1$, …, $0 \le p_m \le 1$ y tales que, $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ donde, p_1 denota la probabilidad con la cual la fila A_1 será escogida; p_2 denota la probabilidad con la cual la fila A_2 será escogida; …; p_m denota la probabilidad con la cual la fila A_m será escogida análogamente.

Definición. Una estrategia para el jugador J^* en un juego suma cero de orden m x n entre dos personas, es una *n - upla*, $(q_1, q_2, \dots q_n)$, formada por números reales entre 0 y 1, es decir, $0 \le q_1 \le 1$, $0 \le q_2 \le 1$, …, $0 \le q_n \le 1$ tales que, $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, donde, q_1 denota la probabilidad con la cual la columna A^1 será escogida; q_2 denota la probabilidad con la cual la columna A^2 será escogida; …; q_n denota la probabilidad con la cual la columna A^n será escogida.

Definición. Una estrategia se dice pura cuando consiste en el uso exclusivo de una sola fila o columna. Simbólicamente, una estrategia $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ para el jugador J_* es una estrategia pura si existe un i en $\{1,2,\dots,m\}$ tal que, $p_i = 1$, y $p_j = 0$, para cada $j \neq i$. Esto es, una estrategia pura para el jugador J_* tiene la forma, $(0,0,\dots,1,\dots,0)$, el número 1 en el lugar i. Esta estrategia significa que el jugador J_* siempre seleccionará la fila A_i. De modo análogo, se define una estrategia pura para el jugador J^*. Si el jugador J^* emplea una estrategia pura, entonces, su estrategia será de la forma, $(0, 0,\dots,1,\dots,0)$, el número 1 en el lugar j para algún j en el conjunto $\{1,2,\dots,n\}$. Y esto significa que el jugador J^* en cada jugada individual siempre seleccionará la j-ésima columna A^j.

Definición. Una estrategia se dice mixta cuando no es pura. Simbólicamente, una estrategia $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ es mixta si existen $i, j, i \neq j$, en el conjunto $\{1,2,\ldots, m\}$ tales que $p_i \neq 0$ y $p_j \neq 0$.

1.1 La esperanza de pago

Dadas las estrategias, $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ y $(q_1, q_2, \ldots q_n)$ de cada uno de los jugadores correspondientes a un juego suma cero de orden *m x n entre* dos personas, representado por la matriz,

$$A = \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Este se representa con el siguiente *arreglo*:

$$\begin{array}{c|cccc} & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \hline p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ p_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m0} \end{array}$$

La probabilidad del evento que consiste en obtener el pago a_{ij} , es la probabilidad conjunta entre los eventos siguientes, el evento en que el jugador J_* selecciona la i-ésima fila, A_i, de probabilidad es p_i, y el evento en que el jugador J^* selecciona la j-ésima columna, A^j, cuya probabilidad es q_j. Dado que estas dos selecciones se realizan de forma independiente, entonces la probabilidad de que los jugadores realicen tales selecciones es el producto de las probabilidades de tales eventos, la cual es, p_i x q_j.

Entonces la contribución específica del resultado, a_{ij} , a la esperanza de pago del juego, está dada por la expresión, a_{ij} x p_i x q_j. Así, la esperanza de pago del juego está dada por $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, p_i, q_j$; y como esta esperanza depende realmente de las estrategias seleccionadas por cada jugador, entonces podemos denotar la esperanza de pago del juego por la expresión, $E(p, q)$, y dada por, $E(p, q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, p_i q_j$.

1.2 Ejemplo en el campo militar

Si se considera un ejemplo en el campo militar de un bombardeo aleatorio de manera general, para ilustrar una estructura sistemática que permita reflejar las relaciones conflictivas entre dos países en una confrontación bélica, la forma extensiva del juego y sus desarrollos que permitirá develar el cálculo de las estrategias óptimas, maximin y minimax se presenta así: denotemos por J_* y J^*, los generales a cargo de las operaciones militares de cada país. El general J_* dirige un ataque aéreo diario, con dos aviones, un bombardero cargado con mucho poder bélico e instrumentación adecuada, y el otro más ligero. La misión es dejar caer solo una bomba sobre algún blanco específico de las fuerzas militares comandadas por el general J^*. Por el otro lado, el general J^* organiza la defensa; es decir, el contra-ataque aéreo con un avión de combate, el cual, se encuentra oculto esperando el ataque para responder por sorpresa, y eventualmente derribando, sólo uno de ellos. El bombardero tiene un 80% de chance de sobrevivir al contraataque, y en ese caso, tiene la seguridad de dejar caer la bomba en el blanco seleccionado de las fuerzas enemigas. Es decir, el bombardero tiene el siguiente rendimiento: 1) Si es atacado, tiene un 80% de éxito en dar en el blanco. 2) Si no es atacado, tiene un 100% de éxito de dar en el blanco. En cambio, el avión de soporte, más ligero, por no contar con suficiente armamento, maniobrabilidad y radar, tiene el siguiente rendimiento: 1) Si es atacado, tiene 50% de éxito de dar en el blanco. 2) Si no es atacado, tiene un 90% de éxito de dar en el blanco.

El general J_* sabe que si la bomba es colocada permanentemente en el bombardero, tiene una esperanza de, al menos un 80% de éxito en su misión. Dado que el general J^* está al tanto de esta situación, él podría contra-atacar consistentemente el bombardero para reducir la esperanza del general J_*, a no más allá de un 80% de éxito en su misión. Sin embargo, el general J_*, quien es un experto jugador de cartas, decide bombardear ocasionalmente con el avión ligero de soporte. Por ejemplo, una vez cada cuatro ataques, deja caer la bomba desde el avión ligero de soporte; es decir, 1/4= 0,25; del tiempo. Entonces, el general J^* se ve obligado a revisar su estrategia de contra-ataque permanente al bombardero y decide contra-atacar ocasionalmente al avión ligero de soporte, digamos por ejemplo, 1/5= 0,5, del tiempo. En estas circunstancias, las estrategias seleccionadas por cada general son:

Estrategia del general J_*: $(1-p,\ p) = \left(1-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right) = (0{,}75,\ 0{,}25)$

Estrategia del general J^*: $(1-q,\ q) = \left(1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = (0{,}5\ \ 0{,}5)$

	0,5 Bombardero	0,5 Avión Ligero
0.75 Bombardero	0.8	1
0.25 Avión Ligero	0.9	0.5

La esperanza de tener éxito, para el general J_*, en esta misión, está dada por: *E (0,2, 0,5)= 0,75(0,8)0,5 + 0,75(1)0,5 + 0,25(0,9)0,5 + 0,25(0,5)0,5 = 0,85,* este resultado significa que la estrategia del general J_* de tomar por sorpresa al general J^* ha dado resultado, pues ha aumentado su esperanza de tener éxito a un 85%. Entonces el general J^* decide revisar su estrategia y resuelve contra-atacar solo un 20% del tiempo al avión ligero de soporte.

En estas circunstancias las estrategias seleccionadas por cada general son las siguientes:

Estrategia del general J_*: $(1-p,\ p) = \left(1-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right) = (0{,}75,\ 0{,}25)$

Estrategia del general J^*: $(1-q, q) = \left(1-\frac{20}{100},\ \frac{20}{100}\right) = \left(1-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right) = (0{,}8,\ \ 0{,}2)$

	0,8 Bombardero	0,2 Avión Ligero
0.75 Bombardero	0.8	1
0.25 Avión Ligero	0.9	0.5

La esperanza de tener éxito, para el general J_*, en esta misión, está dada por: *E (0,25,0,5)= 0,75 (0,8) 0,8+0,75 (1)0,2+0,25 (0,9) 0,8+0,25 (0,5) 0,2 =0,835= 83,5%*. Esto significa que la disminución de la frecuencia de los contra-ataques al avión de soporte ligero han originado una reducción de la esperanza de éxito (del 85% al 83.5%) de los ataques del general J^*. Entonces, para reducir aún más la esperanza de éxito de los mencionados ataques, el general J_* resuelve eliminar la frecuencia de contra-ataques al avión ligero de soporte, esto es, el general J^* asume una estrategia pura, $q = 0$. En cuyo caso se tienen las siguientes estrategias:

Estrategia del general J_*: $\left(1-p,\, p\right)=\left(1-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=$

$$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\left(0{,}75,\ 0{,}25\right)$$

Estrategia del general J^*: $\left(1-q, q\right)=\left(1-0{,}0\right)=\left(1{,}0\right)$

	1 Bombardero	0 Avión Ligero
0.75 Bombardero	0.8	1
0.25 Avión Ligero	0.9	0.5

La esperanza de tener éxito, para el general J_*, en esta misión, está dada por: *E (0,25, 0,5) = 0,75(0,8)1 + 0,75(1)0 + 0,25(0,9)1 + 0,25(0,5)0 = 0,825 = 82,5%*. Este resultado permite concluir que cuando el general J_* ataca 1/4 del tiempo con el avión ligero de soporte, la mejor estrategia para el general J^* es simplemente ignorar el avión ligero y contra-atacar únicamente al avión bombardero. Por otro lado, estos cálculos indican que la estrategia del general J_*, (1-*p, p*) = (0,75, 0,25), ha permitido incrementar su esperanza de éxito, de un 80% a un 82.5%.

Observación. Del ejemplo anterior podemos observar algunas interrogantes: ¿Podrá el general J_* mejorar su esperanza de éxito de *82.5%* con alguna otra estrategia? ¿Cuál es la estrategia óptima que el general J_* puede adoptar? ¿Cuál es la mejor réplica que el general J^* puede adoptar ante una estrategia específica cualquiera del general J_*? ¿Tendrá el general J^* una réplica óptima tal que sea independiente de la decisión tomada por el general *gentlemen**?*

1.3 Estrategias óptimas

Definición. Llamaremos contra-estrategia, aquella estrategia diseñada por un jugador para responder una estrategia específica empleada por el otro jugador.

Teorema A. Consideremos un juego suma cero de orden 2 x 2 entre dos personas. Si un jugador emplea una estrategia fija, entonces su oponente tiene una contra-estrategia o réplica pura óptima.

Demostración. Supongamos que *E* (*p, q*) representa la esperanza de pago para el juego suma cero de orden 2 x 2 entre dos personas, sabiendo que el jugador J_* asume como estrategia de juego, $(1-p, p)$, con $0 \leq p \leq 1$ y el jugador J^* asume como estrategia de juego, $(1-q, q)$, con $0 \leq q \leq 1$. Asumamos que la matriz del juego es $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}$. Las estrategias de los jugadores se representan con el siguiente *arreglo*, Entonces, la esperanza de pago del juego está dada por la expresión:

$$E\,(p, q) = (1-p)(1-q)a + (1-p)q \cdot b + p(1-q)c + p \cdot q \cdot d \qquad (1)$$

$$\textit{Arreglo}:\ \begin{array}{c|cc} & 1-q & q \\ \hline 1-p & a & b \\ p & c & d \end{array}$$

Primer caso: Se observa, cuando el jugador J^* emplea una estrategia fija, $[1-q, q]$. Entonces, nuestro problema consiste en encontrar un número *p* tal que, $0 = p = 1$ y $[1-p, p]$, es una estrategia óptima para el jugador J_*. Retomando la expresión **(1)** de la esperanza de pago, obtenemos: $E\,(p\, q) = (1-q-p+p\cdot q)\, a + q\cdot b - q\cdot b\cdot p + c\cdot p - c\cdot q\cdot p + d\cdot q\cdot p = a - a\cdot q - a\cdot p - a\cdot q\cdot p + q\cdot b - q\cdot b\cdot p + c\cdot p - c\cdot q\cdot p + d\cdot q\cdot p = (-a + a\cdot q - q\cdot b + c - c\cdot q + d\cdot q)p + a - a\cdot q + q\cdot b$. Observe que *a, b, c, d* y *q* son valores constantes y nosotros queremos optimizar el valor de la función, $F(p) = E(p, q)$, la cual es una función lineal de una sola variable, a saber; *p*, para $0 = p = 1$. Esto es, $F(p) = M \,.\, p + N;$ con *M* y *N* constantes tales que, $M = -a + a\cdot q - q\cdot b + c - c\cdot q + d\cdot q$ $N = a - a\cdot q + b\cdot q$.

Entonces, podemos afirmar lo siguiente;

$F(p) = E(p, q)$ asume su mínimo valor en el punto, $p = \begin{cases} 0 & si \quad M \geq 0 \\ 1 & si \quad M \leq 0 \end{cases}$

$F(p) = E(p,q)$ asume su máximo valor en el punto, $p = \begin{cases} 1 & si \quad M \geq 0 \\ 0 & si \quad M \leq 0 \end{cases}$

En otras palabras la función, $F(p) = E(p, q)$ es optimizada en los puntos, $p = 0$, $p = 1$. Lo cual significa que el jugador J_* podría asumir una contra-estrategia óptima pura dada por, $[1 - p, p] = [1, 0]$, para $p = 0$ $[1 - p, p] = [0, 1]$, para $p = 1$, para lograr el mejor resultado del juego.

Observación. Consideremos nuevamente la expresión: $F(p) = E(p, q) = (-a+a\cdot q+c-b\cdot q-c\cdot q+d\cdot q)p+(a-a\cdot q+b\cdot q)$ Observe que, Para $p = 0$ $F(0) = E(0,q) = a-a\cdot q+b\cdot q$ Para p=1, $F(1) = E(1, q) = c-c\cdot q+d\cdot q$. Entonces, $F(p) = E(p, q) = [-E(0, q) + E(1, q)]p + E(0, q) = E(0,q)(1-p)+p\cdot E(1,q)$. Y esto significa que el punto, $F(p) = E(p, q)$ es un punto intermedio del segmento lineal de extremos, $F(0) = E(0, q)$, y $F(1) = E(1, q)$ lo cual dice que la función, $p \to F(p) = E(p, q)$ asume sus valores extremos en los puntos, $p = 0$, $p = 1$. Esto es, hemos llegado a la misma conclusión.

Segundo Caso: Si asumimos que el jugador J_* emplea una estrategia fija, $[1–p, p]$. Entonces, tenemos que encontrar un número q tal que, $0 \leq q \leq 1$, y $[1-q\ q]$ es una estrategia óptima para el jugador J^*. Sabemos que, $E(p,q) = (1-p)(1-q)\ a+(1-p)q\cdot b+p(1-p)\ c+p\cdot q\cdot d = a-a\cdot q-a\cdot p+a\cdot p\cdot q+q\cdot b-p\cdot q\cdot b+p\cdot c-p\cdot q\cdot c+p\cdot q\cdot d = (-a+a\cdot p+b-p\cdot b-p\cdot c+p\cdot d)\ q+a-a\cdot p+p\cdot c$. Entonces, tal como en el primer caso. $E(p,q)$ es una función que depende de una sola variable, la variable q, ya que; a, b, c, d y p son constantes. Es decir, tenemos la función, $F(q) = E(p,q) = M \cdot q + N$; con M y N constantes, la cual es una función lineal y tal como en el primer caso es optimizada en los puntos $q = 0$ o $q = 1$ y por lo tanto, el jugador J^* podrá asumir una contra-estrategia pura óptima dada por, $[1 - q, q] = (1, 0)$ si $q = 0$ o $[1 - q, q] = (0, 1)$ si $q = 1$. Este resultado también puede ser obtenido de la siguiente manera: Sabemos que, $E(p, q) = (-a + a \cdot p + b - p \cdot b - p \cdot + p \cdot d)q + a - a \cdot p + p \cdot c.$ Entonces: $E(p,0) = a - a \cdot p + p \cdot c$ $E(p,1) = b - p \cdot b + p \cdot d$. Luego, $E(p,q) = [E(p, 1) - E(p, 0)]q + E(p, 0) = q \cdot E(p, 1) + (1 - q)E(p, 0)$. Esto significa que el número $E(p, q)$ es un punto intermedio del segmento lineal que une los extremos $E(p, 1)$ y $E(p, 0)$. Además, vemos que los números, $E(p, 1)$ y $E(p, 0)$ son los valores extremos de la función, $F(q) = E(p, q)$. Es decir, la función q $F(q)$ es optimizada sobre los puntos, $q = 0$, o $q = 1$.

Observación. Este resultado también es válido para el caso de un juego suma cero de orden m x n entre dos personas, con m y n números naturales cualesquiera.

1.4 La estrategia maximin

Determinemos y justifiquemos una buena estrategia para el jugador J_*, cuyo contendor adopta una posición defensiva o pesimista, en un juego suma cero de orden *2 x 2* entre dos personas cuya matriz de pago está dada por,

A	*b*
C	*D*

En virtud del teorema A, para cualquier estrategia de juego, $(1 - p, p)$ empleada por el jugador J_*, el otro jugador, J^* podrá encontrar una contra-estrategia óptima, a ser escogida entre alguna de las dos posibles estrategias puras siguientes, (1, 0), para $q = 0$ y (0, 1), para $q = 1$

La esperanza de pago para el jugador J_*, en caso que el jugador J^* realice la selección, (1, 0), es decir $q = 0$, está dada por, $E(p$, 0). En este caso el juego está determinado por el *arreglo,* y se tiene, $E(p, 0) = (1 - p)(1)a + p(1)c = a(1 - p) + cp = (c - a)p + a$.

$$Arreglo: \begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ \hline 1-p & a & b \\ p & c & d \end{array}$$

Por otro lado, la esperanza de pago para el jugador J_*, en caso que el jugador J^* realice la selección, (0, 1), es decir, $q = 1$ está dada por, $E(p, 1)$. En este caso, el juego está determinado por el *arreglo*, y se tiene, $E(p, 1) = (1 - p)(1)b + p(1)d = b(1 - p) + dp = (d - b)p + b$.

$$Arreglo: \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 1-p & a & b \\ p & c & d \end{array}$$

Dado que el jugador J^* hará todo lo posible por que el jugador J_* reciba el menor pago, él realizará su selección comparando los números $E(p, 0)$ y $E(p, 1)$, para escoger al menor. Entonces, la esperanza de pago para el jugador J_*, la cual denotaremos por, $E_*(p)$, será, $E_*(p) = mín\ \{E(p,0), E(p,1)\}$

Esto significa que la esperanza de pago del jugador J_* está determinada completamente por la función, $p \to E_*(p)$, la cual depende de una sola variable, la estrategia p correspondiente al jugador J_*.

Analicemos ahora cada una de las funciones, $E(p, 0) = (c - a)p + a$ $E(p, 1) = (d - b)p + b$.

Observemos, que ambas funciones dependen linealmente de la variable p, la cual por ser una probabilidad varía en el intervalo $0 \leq p \leq 1$. Entonces, las gráficas de estas funciones consisten en segmentos lineales sobre el intervalo [0, 1], en el eje p. El gráfico de la función $E(p, 0)$ consiste en el segmento lineal que une los extremos $(0, a)$ y $(1, c)$.

Analicemos ahora la función $E(p, 1)$

p	$E(p,0)$
0	a
1	c

El gráfico de la función $E(p, 1)$ consiste en el segmento lineal que une los extremos $(0,b)$ y $(1,d)$. La configuración de la gráfica de la función, p? $E_*(p)$ depende de la alineación de los parámetros a,b, c y d.

- En este caso, $E(p, 0) = E(p, 1)$, pa, Entonces, $E_*(p) = mín(E(p, 0), E(p, 1)), = E(p, 0)$.
- En este caso, la estrategia óptima para el jugador J^* es $q = 0$, esto es (1, 0) es la contra-estrategia óptima para el segundo jugador. Y dado que la función $E_*(p) = E(p, 0)$ alcanza su máximo valor en el punto $p = 1$. Entonces (0, 1) es la estrategia óptima para el jugador J_*, dado que esta estrategia le garantiza el máximo valor de su esperanza de pago.

Veamos, ahora el caso $b < c < d < a$. En este caso, se tiene que los segmentos lineales se cruzan en un punto, $(m,E(m, 0)) = (m,E(m, 1))$ Y se puede observar según la gráfica que, $E(p, 1) \leq E(p, 0)$, para $0 \leq p \leq m$ y $E(p, 0) \leq E(p, 1)$, para $m \leq p \leq 1$. Entonces:

$$E_*(p)\begin{cases} E(p,1), & 0 \leq p \leq m \\ E(p,0) & m \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Esto significa que la estrategia óptima para el jugador J^*, la cual podemos resumir así:

$q = 1$: (0,1) es una contra estrategia óptima para el segundo jugador cuando $p \leq m$

$q = 0$: (1,0) es una contra estrategia óptima para el segundo jugador cuando $p \geq m$.

Dado que el máximo valor de la función $E_*(p)$ es alcanzado en el punto $p = m$ donde se cruzan las gráficas de $E(p, 0)$ y $E(p, 1)$, esto significa que la estrategia $(1 - m,m)$ es la estrategia óptima para el jugador J_*. Estos dos casos presentados sintetizan todas las configuraciones posibles para el análisis de la función $p \to E_*(p)$ .Observe que sólo hay dos posibles situaciones para las gráficas de las funciones $E(p, 0)$ y $E(p, 1)$, es decir, o bien los segmentos lineales correspondientes a $E(p, 0)$ y $E(p, 1)$ tienen un punto de intersección, o bien no lo tienen.

Para el caso que las gráficas de las funciones $E(p, 0)$ y $E(p, 1)$ no tengan un punto de intersección, entonces la función, $E_*(p)$, coincidirá con una de ellas, aquella, cuyo gráfico se encuentre por debajo de la otra. Esto determinará la contra-estrategia óptima del jugador J^*. El jugador J_* podrá seleccionar la estrategia p que le garantice el máximo valor de la función $E_*(p)$. Ese valor de p le brindará la óptima estrategia al jugador J_*.

Para el caso que las gráficas de las funciones $E(p, 0)$ y $E(p, 1)$ tengan un punto en común, digamos que en el punto, $p = m$ se tiene $E(m, 0) = E(m, 1)$. Entonces la función $E_*(p)$ coincidirá con alguna de ellas en el intervalo $[0,m]$, con aquella cuyo gráfico se encuentra por debajo de la otra.

Asimismo, la función $E_*(p)$, coincidirá con la otra en el intervalo $[m,1]$. Esto determinará completamente la contra-estrategia óptima del jugador J^*. El jugador J_* podrá seleccionar la estrategia, $p = m$, la cual le brinda el máximo valor para la función $E_*(p)$. Es decir, la estrategia, $(1 - m,m)$, es la estrategia óptima para el jugador J_*.

Teorema B. Si el punto (x, y) es un punto de máxima altura sobre el gráfico de la función, $E_*(p)$ Entonces: 1. $[1 - x; x]$, es llamada la estrategia máxima para el jugador J_*.

2. El número y es el máximo valor de la esperanza de pago para el jugador J_*.

Definición. La estrategia $[1 - x, x]$, es llamada la estrategia máxima para el jugador J_*. Observe que cada punto sobre el gráfico de la función $E_*(p)$ es el mínimo entre las dos posibilidades que tiene el jugador J^* de seleccionar su estrategia. Y el jugador J_* está seleccionando entre estos puntos aquel que tiene la máxima altura; es decir, el jugador J_* está maximizando la respuesta minimal que brinda el jugador J^*. Por ello, la estrategia óptima del jugador J_* es llamada usualmente, la estrategia Maximin.

1.5 La estrategia minimax

Determinemos y justifiquemos una buena estrategia para el jugador J^*, cuyo contendor adopta una posición ofensiva u optimista, en un juego suma cero de orden *2 x 2* entre dos personas cuya matriz de pago está dada por:

A	*b*
C	d

En virtud del teorema A, para cualquier estrategia de juego, $(1 - q, q)$ empleada por el jugador J^*, el otro jugador, J_* podrá encontrar una contra estrategia óptima, a ser escogida entre alguna de las dos posibles estrategias puras siguientes, $(1,0)$, para $p = 0$ y $(0, 1)$, para $p = 1$.

La esperanza de pago para el jugador J^*, en caso que el jugador J_* realice la selección, $(1, 0)$, es decir $p = 0$, está dada por, $E(0, q)$. En este caso el juego está determinado por el siguiente arreglo,

$$\begin{array}{c|cc} & 1-q & q \\ \hline 1 & a & b \\ 0 & c & d \end{array}$$

y se tiene, $E(0, q) = (1 - q)(1)a + q(1)b = a(1 - q) + bq = (b - a)q + a.$

Por otro lado, la esperanza de pago para el jugador J^*, en caso que el jugador J_* realice la selección (0, 1), es decir, $p = 1$ está dada por, $E(1, q)$. En este caso, el juego está determinado por el arreglo, y se tiene, $E(1, q) = (1 - q)(1)c + q(1)d = c(1 - q) + dq = (d - c)q + c$.

Dado que el jugador J_* hará todo lo posible por recibir el mayor pago, él realizará su selección comparando los números $E(0,q)$ y $E(1, q)$, para escoger al mayor. Entonces, la esperanza de pago para el jugador J^*, la cual denotaremos por, $E^*(q)$, será, $E_*(q) = máx\{E(0, q),E(1, q)\}$. Esto significa que la esperanza de pago del jugador J^* está determinada completamente por la función, $q \rightarrow E^*(q)$ la cual depende de una sola variable, la estrategia q correspondiente al jugador J^*.Observemos que ambas funciones $E(0, q)$ y $E(1, q)$ dependen linealmente de la variable q, la cual por ser una probabilidad varía en el intervalo $0 \leq q \leq 1$. Entonces, las gráficas de estas funciones consisten en segmentos lineales sobre el intervalo [0,1], en el eje q. Para el caso que las gráficas de las funciones $E(0,q)$ y $E(1, q)$, no tengan un punto de intersección, entonces la función, $E^*(q)$, coincidirá con una de ellas, aquella cuyo gráfico se encuentre por encima de la otra. Esto determinará la contra estrategia óptima del jugador J_*. El jugador J^* podrá seleccionar la estrategia q que le garantice el mínimo valor de la función $E^*(q)$. Ese valor de q le brindará la óptima estrategia al jugador J^*. Para el caso que las gráficas de las funciones $E(0, q)$ y $E(1,q)$, tengan un punto en común, digamos que en el punto, $q = m$, se tiene $E(0,m) = E(1,m)$. Entonces, la función $E^*(q)$, coincidirá con alguna de ellas en el intervalo $[0,m]$, con aquella cuyo gráfico se encuentra por encima de la otra. Asimismo, la función $E^*(q)$, coincidirá con la otra en el intervalo $[m,1]$. Esto determinará completamente la contra estrategia óptima del jugador J_* .El jugador J^* podrá seleccionar la estrategia, $q = m$, la cual le brinda el mínimo valor para la función $E^*(q)$. Es decir, la estrategia, $(1 - m,m)$ es la estrategia óptima para el jugador J^* .

Teorema C. Si el punto (x, y) es un punto de mínima altura sobre el gráfico de la función, $E^*(q)$. Luego:

- $[1 - x, x]$, es llamada la estrategia Minimax para el jugador J^*.
- El número y es el valor de la esperanza Minimax de pago para el jugador J_*.

Observe que cada punto sobre el gráfico de la función $E^*(q)$ es el máximo entre las dos posibilidades que tiene el jugador J_* de seleccionar su estrategia. Y el jugador J^* está seleccionando entre estos puntos aquél que tiene la mínima altura; es decir, el jugador J^* está minimizando la respuesta maximal que brinda el jugador J_*. Por ello, la estrategia óptima del jugador J^* es llamada usualmente, la estrategia Minimax.

2. Juegos suma no-cero y no-cooperativos entre dos personas

Recordemos que los juegos suma-cero entre dos personas, son aquellos donde las ganancias de un jugador son exactamente las pérdidas del otro jugador.

Definición. Los juegos suma-no-cero son aquellos juegos donde las ganancias de un jugador no son necesariamente las pérdidas del otro jugador, juegos donde el pago puede no ser cuantificable y donde las decisiones de cada jugador pueden depender de las decisiones del otro jugador. En algunos casos, el pago puede ser por ventajismo y en otros, por algún comportamiento razonable de parte de alguno de los jugadores, el juego puede conducir a grandes ganancias para ambos.

Definición. Los juegos no-cooperativos, son aquellos juegos donde se asume que los jugadores no se consultarán entre ellos bajo ninguna forma para mejorar su resultado o pago. Nos dedicaremos en esta sección, al estudio de juegos suma-no-cero no cooperativos entre dos personas.

En los juegos suma-cero entre dos personas se tiene un arreglo rectangular,(a_{ij}) donde cada a_{ij} representa el pago correspondiente a la jugada realizada mediante la escogencia de una fila i por parte del jugador J_* y una columna j por parte del jugador J^*. Sin embargo, como en los juegos suma-no-cero, la ganancia de un jugador no es necesariamente la pérdida del otro jugador, entonces el pago no puede representarse mediante un simple número. Ahora, al resultado obtenido en el juego suma-no-cero por la escogencia de la fila i, por parte del jugador J_* y una columna j por parte del jugador J^*, le corresponderá un pago representado por el par ordenado, (a_i, b_j) donde a_i denota el pago correspondiente al jugador J_*, y b_j denota el pago correspondiente al jugador J^*. El par (a_i, b_j) es llamado el par ordenado de pago. Entonces, el arreglo matricial correspondiente para un juego suma-no-cero entre dos personas es:

(a, α)	(c, γ)
(b, β)	(d, δ)

Con algún cuidado, las estrategias para los juegos suma cero pueden ser aplicadas en este caso. En un juego suma cero, cuando uno de los jugadores, digamos, el jugador J_*, trata de maximizar el pago, el jugador J^* trabaja para minimizar ese mismo pago. En cambio, ahora, como cada jugador tiene su propio pago y en forma independiente, los pagos de uno y otro jugador, entonces, se asumirá que cada jugador basará sus decisiones en función de su propio pago. Esto se puede formalizar con el "Principio de racionalidad".

El principio de racionalidad consiste en asumir que cada jugador desea obtener el mejor resultado posible. Este principio permite afirmar que cada jugador no tomará en cuenta los pagos del otro jugador para diseñar sus estrategias y la toma de decisiones. Entonces, cada uno de los jugadores estará enfrentando un juego, tal como un juego suma cero.

El jugador J_* trabajará, para maximizar su pago, con el arreglo,

a	b
c	d

en contra de su oponente, el jugador J^*, quien trabajará también, tal como su contrincante, para maximizar su pago, con el arreglo,

α	β
γ	δ

entonces, cada jugador tendrá sus estrategias maximin y minimax.

Por ejemplo, las dos estrategias maximin determinarán el pago del juego, el cual consiste en un par ordenado formado por las estrategias maximin puras y será llamado el par de valores puros del juego suma-no-cero no cooperativo entre dos personas. Este principio se puede mostrar con el famoso ejemplo del dilema del prisionero.

Dos personas son arrestadas por su participación y complicidad en un robo. La fiscalía tiene evidencias suficientes únicamente para condenarlos por el robo, a ambos. Sin embargo, se presume que los ladrones portaban armas, lo cual, es un delito mucho más grave que un simple robo y se podría procesarlos por robo a mano armada, en caso de obtener suficientes evidencias para ello. Los prisioneros son encarcelados en celdas separadas y no se pueden comunicar entre sí. A los prisioneros se les ofrece el siguiente trato o arreglo: ***1.*** *Si usted ofrece testimonio de que su compañero estaba armado durante el robo y su compañero no presenta testimonio en contra suya, entonces, su sentencia será suspendida y su compañero tendrá 6 años de cárcel.* ***2.*** *Si ambos presentan testimonio en contra de su compañero, entonces, ambos tendrán una sentencia de 3 años de cárcel.* ***3.*** *Si ninguno de los dos presenta testimonio en contra de su compañero, entonces, ambos tendrán una sentencia de 1 año de cárcel.* Ambos prisioneros, han sido informados sobre la oferta o arreglo presentado por las autoridades, el cual, es el mismo para ambos. A ambos se le ha concedido un tiempo prudente para pensar, pero ninguno de ellos tiene conocimiento sobre la decisión de su compañero. Esta situación puede ser modelada como un juego suma-no-cero entre dos personas. Los jugadores son los prisioneros. Este juego está determinado por el siguiente arreglo matricial:

Observe que cada prisionero tiene dos posibles acciones, a saber, decide aceptar el trato o lo rechaza. Los resultados posibles de este juego pueden ser ordenados según las preferencias de los prisioneros. Para el jugador J_*: (Acepta, Rechaza) > (Rechaza, Rechaza) > (Acepta, Acepta) > (Rechaza, Acepta). Este es el orden natural, dada la sentencia que le corresponde al jugador J_*, a saber,

	Rechaza	Acepta
Rechaza	(-1, -1)	(-6,0)
Acepta	(0, -6)	(-3, -3)

La relación $(a, b) > (c, d)$ significa que (a, b) ofrece un mejor resultado que (c, d) al jugador respectivo. Para el jugador J^* el orden según sus preferencias, es el siguiente: (rechaza, acepta) > (rechaza, rechaza) > (acepta, acepta) > (acepta, rechaza).

Par de Estrategias (acepta rechaza)	Sentencia 0 Libre
(rechaza, rechaza)	1 año
(acepta, acepta)	3 años
(rechaza, acepta)	6 años.

Escribamos ahora las correspondientes sentencias,

Par de Estrategias (rechaza, acepta)	Sentencia 0 Libre
(rechaza, rechaza)	1 año
(acepta, acepta)	3 años

2.1 Análisis de la estrategia maximin pura para cada jugador

Para el jugador J_*, -1 -6 *min*: - 6; 0 -3 *min*: - 3 *Max min*: -3. Entonces, la estrategia maximin pura para J_* es, [0, 1]; Para el jugador J^*,-1 -6 *min*: - 6; 0 -3 *min*: - 3 *Max min*: -3. Entonces, la estrategia Maximin pura para J^* es, [0, 1]. Entonces, la pareja de valores puros obtenida es la siguiente, (Acepta, Acepta), cuyo valor es, (-3, -3). La estrategia Maximin pura conduce a los prisioneros a aceptar ambos el trato o arreglo y por lo tanto, ambos sentenciados a 3 años de prisión. Cuando el prisionero toma la decisión de aceptar el trato, lo hace para garantizar un tiempo máximo de prisión de 3 años. Aunque, si ambos rehúsan el trato, lograrían una mejor sentencia; es decir, estarían en prisión solo 1 año. En este caso, ambos jugadores optan por una estrategia que les garantice una estadía máxima en prisión de 3 años. En cierto modo, se puede afirmar que en cada jugador habría cierto grado de satisfacción por la decisión tomada. Ambos jugadores saben que si ellos deciden rechazar la oferta, podrían estar en prisión sólo un año. Pero también, saben que el jugador que rechace la oferta podría ser condenado a 6 años, si su oponente hubiere aceptado la oferta. En ese caso, el jugador condenado a 6 años habría perdido la posibilidad de estar en prisión tan solo 3 años, lo cual tenía garantizado, si hubiese aceptado la oferta. Además, el jugador condenado a 6 años se encuentra en una situación de arrepentimiento por la decisión tomada.

2.2 El principio de mayor satisfacción

Consideremos por ejemplo el juego suma cero,

5	0	5
1	"1"	1
5	0	5

La estrategia Maximin para el jugador J_* lo induce a decidir por la segunda fila, veamos esto con más detalle. Se observa que el número 1 encerrado entre comillas (en la tabla anterior) es un punto de silla; es decir, este número 1 es el máximo de su columna y el mínimo de su fila. Pero también se puede obtener este hecho observando el arreglo, tomando los mínimos de cada fila y luego eligiendo el máximo entre estos mínimos, esto es:

5	0	5	min: 0
1	1	1	min: 1 max min: 1
5	0	5	min: 0

Esto significa, que el jugador J_* debe seleccionar la segunda fila. Observe que si el jugador J_* selecciona alguna de las otras dos filas, podría tener un pago 5, el cual es mucho mejor que el pago 1 que recibe siguiendo la estrategia Maximin. Pero si el otro jugador J^* selecciona la segunda columna, entonces el jugador J_* recibirá como pago, 0 ; es decir, pierde la posibilidad de recibir el pago 1 el cual lo tenía garantizado si seguía la estrategia Maximin, escogiendo la segunda fila.

Los estudios sobre el comportamiento humano indican que la búsqueda de garantías es una motivación muy fuerte. Las decisiones de un jugador pueden no conducir al mejor pago, entre todos los pagos posibles, pero esas decisiones deben basarse en el logro de algunas garantías y el logro de la mayor satisfacción posible, sin tomar en cuenta las decisiones de su oponente. Esto es lo que se le denomina como "*El principio de mayor satisfacción*".

3. El equilibrio de Nash

Un aspecto a considerar es la solución de los juegos no cooperativos, para lo cual Nash (1950, 1951, 1953) introduce la noción de punto de equilibrio, hoy comúnmente llamado Equilibrio de Nash. Nash, además, usa el teorema de Brower para garantizar la existencia del punto de equilibrio para juegos no-cooperativos entre un número finito de jugadores y posteriormente, presenta otra demostración de la existencia del punto de equilibrio usando el teorema del punto fijo de Kakutani (1941) para funciones multivaluadas semi-continuas superiormente.

Además, Nash (1950) rompe con la tradición de que la negociación es un juego indeterminado (que depende de las habilidades y experiencia de los jugadores) asumiendo que la negociación entre jugadores racionales conduce a un único resultado. Introduce la noción de solución negociada y resuelve el problema para el caso de un juego cooperativo entre dos personas. Entre las aplicaciones económicas se pueden mencionar: el oligopolio, equilibrio del mercado, negociación, calidad del producto, subastas, seguros, educación superior, discriminación, servicios públicos, entre otros (Harsanyi y Reinhard Selten, 1972, 1988).

Definición. Dado un juego suma diferente de cero entre dos personas, según el arreglo matricial siguiente:

(a, α)	(b, β)
(c, γ)	(d, δ)

Un resultado del juego se llama "Equilibrio de Nash" si el correspondiente par ordenado de pago, (x , y) es tal que, x es el máximo de su columna, y es el máximo de su fila. También se dice por simplicidad que el par (x, y) es un equilibrio de Nash. El equilibrio de Nash satisface el principio de mayor satisfacción de los juegos suma cero. En efecto, asumamos que (x, y) es un punto de equilibrio de Nash. Dado que x es el máximo de su columna y el elemento y es el máximo de su fila, se tiene; si el jugador J^* selecciona la columna que contiene al par ordenado (x,y), el jugador J_* no podrá arrepentirse por haber seleccionado la fila que contiene al par ordenado (x, y), ya que ninguna otra selección del jugador J^* le habría garantizado un mejor pago. Del mismo modo, si el jugador J_* selecciona la fila que contiene al par ordenado (x,y), el jugador J_* no se arrepentirá por haber seleccionado la columna que contiene al par ordenado (x, y), ya que ninguna otra selección del jugador J^* le habría garantizado un mejor pago.

Observación. En la definición del equilibrio de Nash, cada jugador es asumido preocupado por el arrepentimiento sobre sus propias acciones únicamente, y cualquier estado emocional que los jugadores pudieran tener por las decisiones de los demás jugadores, es ignorado. Esta limitación se debe a que la incorporación de los sentimientos conduciría necesariamente al desarrollo de nuevos modelos en esta teoría. Los puntos de equilibrio de Nash puros no necesariamente existen. El siguiente ejemplo es una muestra de ello,

(3,1)	(1,3)
(1,3)	(3,1)

3.1 Método gráfico para determinar un equilibrio de Nash puro

Para introducir esta metodología de una manera más fácil, usaremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Mercado cautivo

Consideremos dos empresas A y B y un mercado cautivado por estas dos empresas del modo siguiente:

- Si una de las empresas toma el mercado en forma exclusiva, obtiene una regalía de 100 dólares.
- Si ambas empresas toman el mercado simultáneamente, entonces cada una pierde 50 dólares.
- Si alguna empresa decide estar fuera del mercado, entonces, ni gana, ni pierde; es decir, obtiene como resultado, 0 dólares.

La matriz correspondiente a este juego es,

	Dentro	Fuera
Dentro	(-50,-50)	(100, 0)
Fuera	(0, 100)	(0, 0)

Analizando las posibles estrategias puras de ambos jugadores, se pueden diseñar 2 flechas horizontales y 2 verticales del siguiente modo: 1. Si el jugador J_* selecciona *Dentro* como estrategia, entonces su oponente, obviamente seleccionará *Fuera* como estrategia. Esta situación, se representa mediante una flecha horizontal con dirección hacia la derecha y en la parte superior de la matriz de juego. 2**.** Si el jugador J_* selecciona *Fuera* como estrategia, entonces su oponente, obviamente seleccionará *Dentro* como estrategia. Esta situación, se representa mediante una flecha horizontal con dirección hacia la izquierda y en la parte inferior de la matriz de juego. 3. Si el jugador J^* selecciona *Dentro* como estrategia, entonces su oponente, obviamente seleccionará *Fuera* como estrategia. Esta situación se representa mediante una flecha vertical con dirección hacia abajo y en el lado izquierdo de la matriz de juego. 4. Si el jugador J^* selecciona *Fuera* como estrategia, entonces su oponente, obviamente seleccionara *Dentro* como estrategia. Esta situación se representa mediante una flecha vertical con dirección hacia arriba y en el lado derecho de la matriz de juego. Entonces, se obtiene este gráfico:

	Dentro	Fuera
Dentro	(-50,-50)	(100, 0)
Fuera	(0, 100)	(0, 0)

Observamos las cuatro esquinas de este gráfico y asumimos el siguiente criterio que ayuda a determinar la presencia de un equilibrio de Nash puro.

Criterio. Si dos flechas concurren en alguna esquina, entonces el elemento correspondiente de la matriz del juego es un equilibrio de Nash puro. De allí, que según este criterio (100, 0) y (0, 100) son equilibrios de Nash puros para el juego del mercado cautivo.

Observación. Este juego satisface las siguientes condiciones: 1. Ambas empresas tienen las mismas estrategias. 2. Ambas empresas obtienen los mismos resultados cuando seleccionan las mismas estrategias. 3. El intercambio de estrategias entre las empresas produce un intercambio de resultados para las empresas.

Definición. Un juego que cumple con estas tres condiciones es llamado un Juego Simétrico.

Definición. Un equilibrio de Nash se dice *Simétrico* si ambos jugadores adoptan las mismas estrategias y además, obtienen el mismo resultado. *Los 2 equilibrios de Nash puros del Juego del Mercado cautivo no son simétricos. Según Nash, toda estrategia pura jugada como parte de un equilibrio de Nash mixto tiene el mismo valor esperado o esperanza. Usaremos este hecho para determinar equilibrios de Nash mixtos.*

3.2 Cálculo del equilibrio de Nash mixto

Para ilustrar de una manera más fácil el cálculo de un equilibrio de Nash mixto, usaremos el juego para el juego del mercado cautivo definido arriba. Designemos: P_A (Dentro): La probabilidad de que la empresa *A* esté dentro del Mercado. P_A (Fuera): La probabilidad de que la empresa *A* esté fuera del Mercado. P_B (Dentro): La probabilidad de que la empresa *B* esté dentro del Mercado. P_B (Fuera): La probabilidad de que la empresa *B* este fuera del Mercado. Calculemos los resultados para la empresa *A*: Supongamos que la empresa *A* selecciona la estrategia pura: Dentro: mientras que la empresa *B* selecciona una estrategia mixta, P_B= [P_B (Dentro), P_B (Fuera)]. El valor esperado del resultado para la empresa *A* seleccionando la estrategia pura Dentro, es: E_A (Dentro)= P_B (Dentro) (-50)+P_B(Fuera)100. Ahora, supongamos que la empresa *A* selecciona la estrategia pura: Fuera: Entonces, el valor esperado del resultado para la empresa *A* seleccionando la estrategia pura Fuera es: E_A (Fuera) = P_B (Dentro) 0 + P_B (Fuera) 0 = 0. Dado que estos dos valores esperados son iguales, tenemos, E_A (Dentro) = E_A (Fuera) = 0. Esto es, P_B (Dentro) (-50) + P_B (Fuera) 100 = 0 **(1)**. Por otro lado, la estrategia mixta de la empresa *B* satisface la condición de ser una distribución de probabilidad, entonces, P_B (Dentro) + P_B (Fuera) = 1 (2).

De las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{aligned} -50\,P_B(Dnetro)+100\,[1-P_B(Dentro)] &= 0 \\ -150P_B(Dentro) &= -100 \\ P_B(Dentro) &= \frac{-100}{-180} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Entonces, usando la ecuación **(2)** se obtiene:

$$P_B(Fuera) = 1 - P_B(Dentro) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_B(Dentro) = \frac{2}{3},\ P_B(Fuera) = \frac{1}{3}$$

Si asumimos ahora, que la empresa B selecciona una estrategia pura, mientras que la empresa A selecciona una estrategia mixta: P_A = [Dentro), P_A (Fuera)]. El valor esperado para la empresa B seleccionando la estrategia pura: Dentro es:

$E_B\ (Dentro) = P_A\ (Dentro)\cdot(-50) + P_A\ (Fuera)$ 100

Ahora, supongamos que la empresa B selecciona la estrategia pura: Fuera, entonces:

$E_B\ (Fuera)=P_A\ (Dentro)\cdot(0) + P_A\ (Fuera)\cdot(0)$ = 0 . Dado que $E_B(Dentro) = E_B\ (Fuera)$ se tiene,

$$-50\cdot P_A\ (Dentro) + 100\cdot P_A\ (Fuera) = 0 \qquad (3)$$

Por otro lado, la estrategia mixta de la empresa A satisface la condición de ser una distribución de probabilidad; entonces:

$$P_A\ (Dentro) + P_A\ (Fuera) = 1 \qquad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} -50\cdot P_A(Dentro)+100[1-P_A(Dentro)] &= 0. \\ -50\cdot P_A(Dentro)-100P_A(Dentro)] &= -100. \\ -150\cdot P_A(Dentro) &= -100. \\ P_A(Dentro) &= \frac{-100.}{-150} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Entonces, usando la ecuación (4) se obtiene,

$$P_A(Fuera) = 1 - P_A(Dentro) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_A(Dentro) = \frac{2}{3},\ P_A(Fuera) = \frac{1}{3}$$

Entonces, se tienen las siguientes estrategias mixtas idénticas:

$\frac{A}{B}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$(-50{,}50)$	$(100{,}0)$
$\frac{1}{3}$	$(0{,}100)$	$(0{,}0)$

Los valores esperados para las empresas A y B son:

$$E_A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = (-50)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 100 = \frac{-200}{9} + \frac{200}{9} = 0$$

$$E_B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = (-50)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 100 = \frac{-200}{9} + \left(\frac{200}{9}\right) = 0$$

El Equilibrio de Nash Mixto resulta ser simétrico. Este equilibrio de Nash Mixto es llamado Ineficiente por que se obtiene el mismo valor esperado cero, el cual se obtuvo con el equilibrio de Nash puro.

Ejemplo. Hagamos un pequeño ajuste al juego del Mercado Cautivo. Asumamos que la empresa A obtiene un resultado de 150 dólares cuando entra al mercado en forma exclusiva y los demás resultados los mantenemos tal cual, esto es:

A{}B	Dentro	Fuera
Dentro	(-50,50)	(150,0)
Fuera	(0,100)	(0,0)

En este caso la empresa *A* tiene una ventaja competitiva sobre la empresa *B*; tal vez debido a una mejor estrategia de mercado, bajos costos, o algunos otros factores. De acuerdo con el método gráfico, podemos afirmar que en este caso también se tienen 2 equilibrios de Nash puros, a saber: (0,100) (150,0), los cuales no son simétricos. Determinemos ahora un equilibrio de Nash Mixto para este juego. Consideremos primero la empresa *B* con una estrategia mixta *q*, Para *p= 0*

A{}B	$1-q$	q
1	(-50,50)	(150,0)
0	(0,100)	(0,0)

La esperanza para la empresa *A* es:
Para $p = 1$,

A{}B	$1-q$	q
0	(-50,50)	(150,0)
1	(0,100)	(0,0)

La esperanza para la empresa *A* es: $E_A (1,q) = 0\cdot(1)\cdot(1-q) + 0\cdot(1)\cdot q = 0$

Sabemos que $E_A (1,q) = EA(0,q) = 0$. Entonces, $-50+200q=0 \; q=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$

Consideremos ahora la empresa *A* con una estrategia mixta *p*.
Para *q=0*

A{}B	1	0
1 - *p*	(-50,50)	(150,0)
p	(0,100)	(0,0)

La esperanza para la empresa *B* es: E_B (p,0) = (-50) (1 - *p*) + 100 *p* = - 50 + 50 *p* + 100 *p*
= - 50 + 150 *p*

Para *q*=1

A{}B	0	1
1 - *p*	(-50,50)	(150,0)
p	(0,100)	(0,0)

$E_B (p,1) = 0\cdot(1)(1-p) + 0\cdot(1)\cdot(p) = 0$

Sabemos que $E_B (p,0) = E_B (p,1)$.

Entonces: $-50-150p=0 \quad p=\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$

Entonces el equilibrio de Nash mixto esta dado por la pareja:

$$p=\frac{1}{3},[[1-p,p]]=\left[\left[1-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\right]=\left[\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]\right]$$

$$q=\frac{1}{4},[[1-q,q]]=\left[\left[1-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\right]=\left[\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]\right]$$

Esto es, el juego está determinado por el siguiente arreglo:

$\frac{A}{B}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$(-50,50)$	$(150,0)$
$\frac{1}{3}$	$(0,100)$	$(0,0)$

El valor esperado para cada una de las empresas esta dado por:

$$E_A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=(-50)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+(150)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=$$

$$-25+25=0$$

$$E_B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=(-50)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+(100)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=$$

$$-25+25=0$$

En este caso, el equilibrio de Nash mixto no es simétrico.

3.3 Existencia del equilibrio de Nash

Consideremos un juego suma diferente de cero entre dos personas:

Cada jugador tiene como espacio de estrategias al conjunto $[0,1] \subset R$.

Designemos por x_1 la estrategia seleccionada por el jugador J_*; $x_1 \in [0, 1]$.

Designemos por x_2 la estrategia seleccionada por el jugador J_*; $x_2 \in [0, 1]$.

Para cada jugador tenemos una función de utilidad, digamos:

Para J_*, $(x_1,x_2) \to u_1(x_1, x_2)$. Para J^*, u_2: $[0,1] \times [0,1] \subset R^2 \to R$ $(x_1,x_2) \to u_2(x_1, x_2)$.

Proposición. *Si las funciones de utilidad* u_1 y u_2 *de cada jugador son continuamente diferenciables, entonces existe un equilibrio de Nash.*

Sketch. Asumimos las funciones de utilidad de cada jugador, u_1 y u_2, continuamente diferenciables y por lo tanto podemos afirmar que:

Para cada $x_2 \in [0,1]$, existe $f_1(x_2) \in [0,1]$, tal que: $u_1(f_1(x_2), x_2)$,

es el máximo valor de la función utilidad,

$$(x_1, x_2) \to u_1(x_1, x_2), \text{ con } x_2 \text{ fijo.}$$

Es decir, el número $f_1(x_2) \in [0, 1]$ maximiza la función, $(y, x_2) \to u_1(y, x_2)$, con x_2 fijo. Análogamente, para cada $x_1 \in [0, 1]$, existe, $f_2(x_1) \in [0, 1]$ tal que: $u_2(x_1, f_2(x_1))$ es el máximo valor de la función de utilidad,

$$(x_1, x_2) \to u_2(x_1, x_2), \text{ con } x_1 \text{ fijo.}$$

Es decir, el número $f_2(x_1) \in [0, 1]$, maximiza la función, $(x_1, y) \to u_2(x_1, y)$, con x_1 fijo. Entonces, tenemos dos funciones continuas,

$$f_1, f_2: [0, 1] \to [0, 1]$$

$$x_1 \to f_2(x_1)$$

$$x_2 \to f_1(x_2)$$

y construimos la función:

$$f: [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1],$$

definida por: $(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = (f_1(x_2), f_2(x_1))$ la cual llamaremos la función de Óptima Estrategia.

Sean, f_1 y f_2, son las funciones componentes de la función f, ambas continuas, por lo tanto resulta f continua. Observe que el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ C R^2 es cerrado y acotado en R^2, y por lo tanto, compacto. Entonces, debido al Teorema del Punto Fijo, la función continua de Óptima Estrategia:

$$f: [0,1] \times [0,1] \to [0, 1] \times [0, 1]$$

tiene un punto fijo; esto es, existe un punto $(x_1^*, x_2^*) \in [0, 1] \times [0, 1]$,

tal que, $f(x_1^*, x_2^*) = (f_1(x_2^*), f_2(x_1^*)) = (x_1^*, x_2^*)$.

Veamos que el punto fijo (x_1^*, x_2^*) es un punto de equilibrio de Nash.

Observe que: $f_1(x_2^*) = x_1^*$,

$$f_2(x_1^*) = x_2^*.$$

Observe que: $u_1(x_1^*, x_2^*) = u_1(f_1(x_2^*), x_2^*)$ maximiza la función:

$(x, x_2^*) \to u_1(x, x_2^*)$, x_2^* fijo,

lo cual significa que:

$$u_1(x_1^*, x_2^*) = u_1(f_1(x_2^*), (x_2^*))$$

es el máximo valor de la columna correspondiente a la estrategia x_2^*.

Por otro lado, $u_2(x_1^*, x_2^*) = u_2(x_1^*, f_2(x_1^*))$ maximiza la función,

$$(x_1^*, y) \to u_2(x_1^*, y), \ x_1^* \text{ fijo,}$$

lo cual significa que:

$$u_2(x_1^*, x_2^*) = u_2(x_1^*, f_2(x_1^*)),$$

es el máximo valor de la fila correspondiente a la estrategia x_1^*. Esto es, (x_1^*, x_2^*) es un equilibrio de Nash.

4. Consideraciones finales

Para los años 1950–1953, Nash introduce en varios de sus artículos dos aspectos determinantes para la teoría de juegos: El primero de ellos es la distinción entre juegos cooperativos y juegos no-cooperativos; para lo cual, es preciso considerar que los juegos cooperativos son aquellos donde éste se desarrolla de tal forma que los jugadores pueden llegar a acuerdos entre sí para la determinación de sus estrategias. El segundo aspecto a considerar surge como una solución para los juegos no-cooperativos, para lo cual Nash (1950, 1951, 1953) introduce la noción de punto de equilibrio, hoy comúnmente llamado Equilibrio de Nash. Desde esta perspectiva, un vector de estrategias es un equilibrio de Nash, siempre y cuando la estrategia de cada uno de los jugadores sea la mejor réplica a las estrategias de los demás jugadores. En otras palabras, el equilibrio de Nash es aquel vector de estrategias que maximiza la función de pago de cada jugador. Nash, además, usa el teorema de Brower para garantizar la existencia del punto de equilibrio para juegos no-cooperativos entre un número finito de jugadores y posteriormente, presenta otra demostración, mucho más elegante, de la existencia del punto de equilibrio usando el teorema del punto fijo de Kakutani (1941) para funciones multivaluadas semicontinuas superiormente.

Por otro lado, la teoría económica ortodoxa establece que el problema de la negociación es indeterminado; es decir, la distribución de las ganancias dependerá de las habilidades y la experiencia de cada jugador. Sin embargo, Nash (1950) en su tesis de PhD rompe radicalmente con esa tradición asumiendo que la negociación entre jugadores racionales conduce a un único resultado e inicia el estudio y análisis para determinarlo. Introduce entonces la noción de solución negociada y resuelve el problema para el caso de un juego cooperativo entre dos personas. El trabajo de Nash, realizado en apenas tres años, impactó de manera determinante el desarrollo de la teoría de juegos, ampliando sustancialmente su campo de aplicaciones. Entre las aplicaciones económicas se pueden mencionar: el oligopolio, equilibrio del mercado, negociación, calidad del producto, subastas, seguros, educación superior, discriminación, servicios públicos, entre otros. En la actualidad, el equilibrio de Nash es el método más exitoso usado en la literatura económica y otras áreas afines para resolver problemas relacionados con los procesos sociales; en efecto, una situación social generalmente es modelada como un juego no cooperativo; entonces, el equilibrio de Nash es calculado y sus propiedades, traducidas e interpretadas en términos del problema social original.

Bibliografía citada

Harsanyi, John C. and Selten, Reinhard (1972). “A generalized Nash Solution for two-person bargaining games with incomplete information”. **Management Science**. 1972. Vol. 18. No 5. January, Part 2. USA. Pp. 80-106.

Harsanyi, John C. and Selten, Reinhard (1988). A General Theory of Equilibrium Selection in Games. Mass. Inst. of Technology Press, Cambridge. USA. Pp. 378-380.

Kakutani, Shizuo (1941). “A generalization of Brouwer’s fixed point theorem”, **Duke Mathematical Journal**. Sept. 1941. Vol. 8. Nº 3. USA. Pp. 457-459.

Nash Jr, John Forbes (1950). “Equillibrium points in n person games”, **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**. Jan. 15, 1950. Vol. 36. No. 1.USA. Pp. 48-50.

Nash Jr, John Forbes (1950). Non-cooperative Games, PhD thesis, Mathematics Department, Princeton University, USA. Pp.1-15.

Nash Jr, John Forbes (1950). "The Bargaining Problem". **Econometrica**, Apr.1950. Vol.18, No.2. The Econometric Society,USA. Pp 155-162.

Nash Jr, John Forbes (1951). "Non-cooperatives games". **Annals of Mathematics**. Sept. 1951. Vol. 54. No 2. Princenton, USA. Pp. 286-295.

Nash Jr, John Forbes (1953). "Two-person cooperative games". **Econometrica**. Jan. 1953.Vol. 21.No. 1. The Econometric Society. USA. Pp. 128-140.

Shubick, Martin (1992). **Teoría de Juegos en las Ciencias Sociales, Conceptos y soluciones**. Fondo de Cultura Económica, S.A. México. Pp. 127-172.

Von Neumann, John and Morgenstern, Oskar (1953). **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press. USA. Pp. 8-84.